

在庫調整にもとづく自律的制御メカニズムについて

長谷部 勇 一

はじめに

本稿の目的は、最近の著作 Korman・Martos (ed.) *Non Price Control* (以下 NPC と略す) において研究された自律的制御 Vegetative Control について、特にその解析的分析を中心にして検討することである。

Anti—Equilibrium (以下 AE と略す) では、新古典派一般均衡論に代わる、経済システム一般理論の概念的枠組みと、いくつかの積極的な命題が提示された。しかしながら、公理的な経済システム論、システムの多重制御、自律機能、適応性、不均衡というような重要な研究課題の厳密な検討は、今後の「展望的研究プラン」として残されていた。コルナイのその後の研究は、このう

ち不均衡(不足の経済)の問題と自律的制御の問題の二つの大きな流れのなかに位置づけられるが、NPC はこの後者に関する現在までの到達点をまとめたものである。NPC では、AE において示された自律的制御に関する諸命題を、数字モデルを用いることによって理論的な検討を加え、さらには自律機能よりも上位の制御メカニズムについての分析も行い、それらの間の比較が行なわれている。

本稿では最も下位レベルである自律的制御を対象として、まずその概念について説明した後で、基本的な数学モデルと考えられるコルナイ・マルトシュモデルとダンチ・フニャーディ・シバークモデルを取り上げて、それらの解析的構造に焦点をあてた検討を行う。

コルナイらの分析の特徴の第一は、システムは目的関数の最適化を達成するよう制御されるのではなく、現実に観察可能な標準指標 *norm* を目標にした制御が行なわれるとみなしていることである。これは、システムの現実的な機能分析をめざすコルナイの一貫した特徴である。その第二の特徴は、従来の研究では価格調整モデルは分権的であり、非価格調整は集権的であるという二分法が暗黙のうちに存在していたのに対し、非価格調整でしかも分権的でもあるモデルを提示している点である⁽¹⁾。第三は、このような分権システムを記述する用具として、現代的な制御理論を応用している点である。制御理論は60年代にはいると、ポントリヤギンの最大原理の登場によって、一入力一出力形式の伝達関数を中心にしたものから、多入力多出力形式の状態空間表示が主流を占めるようになり、現代的制御理論と呼ばれるようになった。各企業と各消費者の分権的、非集計的な状態は、この状態空間表示によって詳細に記述することができるのである。

それゆえ本稿でも、制御理論の概念や定理を応用して分析を行うが、それらの定義、証明は補論として要約し

ておいた⁽²⁾。

(1) 過去において制御理論を応用した研究といえば、集計的なマクロの問題であった(たとえば Justin [4])。

(2) 以下で用いられる特殊記号は次のように定義される。

$\exp(x) = e^x$ ($e = 2.718 \dots$)、 $i = \sqrt{-1}$ 、 A^b : 行列 A は行列ベクトル b の転置、 $\langle b \rangle$: ベクトル b からなる対角行列、 A_{ij} b_{ij} : 行列 A または列ベクトル b の要素、 e_j : 単位ベクトル、 $1 = [1, 1, \dots, 1]^T$: 集計ベクトル、 E : 単位行列、 O : ゼロベクトル又はゼロ行列、 $\frac{dx}{dt}$ (微分)、 $\Delta x(t) = x(t+1) - x(t)$ (差分)

一 自律的制御メカニズム

自律的制御とは、 ΔE における定義によれば、経済システムの実物過程の単純な反復に関連しており習慣的決定がその機能を制御しているものである。自律的機能に関連した情報の構造は相対的に単純で、主に非価格情報(たとえば在庫、注文)から成り立っている。一例をあげると、企業に過剰な製品在庫があれば生産水準を下げ、逆に在庫不足ならば上げることが、価格調整や計画当局からの指令によらず自律的に行なわれるということである。

(109) 在庫調整にもとづく自律的制御メカニズムについて

第1表 制御メカニズムの特徴

	価 メカニズム	格 メカニズム	指 メカニズム	令 メカニズム	自律的制御メカニズム	
					在庫信号	売り手と買い手の直結
組 織	分散的 すべての売り 手と買い手の 共通活動の結果	集中的	分散的	集中的	分散的	分散的
					組織内部で生 起	一組の売り手買い手間の 排他的結合
情報構造： 主要情報類型	価	格	下方への指令 上方への報告		在庫信号	需要と（生産）可能性 についての直接情報
生産者の 行動ルール	価格変化→ 投入産出変化		指令→遂行		在庫変化→投 入産出変化	買い手（売り手）の情 報→（消費者の）適応
生産者の動機	利潤増加		規律、指令遂 行への関心		機能すなわち企業の 運営との一体化	生き残りや円滑な

（出所） Kornai-Martos [3] p. 62.

NFCでは、制御が自律的である場合の経済システムの特徴を次のように厳密に規定する。(1)各組織の実物プロセスは、組織自身によってのみ測定される（内部的観測）。(2)情報は個々の組織内で処理され、組織間における情報の伝達には存在しない（非相互通信性）。(3)制御に関する情報は、実物組織の制御単位によって生産される（孤立性）。したがって、システム内には計画当局のように専門的に制御を行う組織は存在しない。このような特徴をもつ自律的制御メカニズムを価格メカニズムと指令メカニズムと比較したのが第1表である。

二 自律的制御の一般モデル

自律的制御は、自動制御理論でいうところのフィードバック制御の一種と考えられる。（フィードバック制御については補論一参照。）すなわち、在庫調整にもとづく自律的制御の場合は、生産者の製品在庫や原材料在庫、消費者の消費財在庫などが制御変量に、標準在庫指標 *normal stock* が目標信号に、最終消費が外部効果に相当する。では、在庫にもとづく自律的制御メカニズムの動学的決定アルゴリズムを記述しよう。

(111) 在庫調整にもとづく自律的制御メカニズムについて

〈仮定〉

(a) 時間 $t \in \mathbb{N}_0$ において各変数は微分可能。初期値はたとえば r_{ij}^0, q_{ij}^0 のように表わす。

(b) 結合生産なし ($d_{ij} \geq 0$)。

(c) 資源は生産されなし ($f_{in} \in \mathbb{N}_0$)。また摩擦せず、その増減は第 0 生産者 (自然) の在庫を変化させる。

(d) 財の品質は同質。需給が一致している場合、それらの出会いを保証するメカニズムは存在していると仮定する。

まず、原材料と資源の投入関数は、

$$(1) \quad d_{ij} = d_{ij}(r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{in}, t)$$

$$(2) \quad f_{in} = f_{in}(r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{in}, t)$$

となる。各在庫と資源のバランス方程式は、

$$(3) \quad \dot{q}_{ij} = r_{ij} - \sum_{k=1}^N Y_{kij} - \sum_{k=1}^M z_{kij}$$

$$(4) \quad \dot{V}_{ij} = \sum_{k=1}^N Y_{kij} - d_{ij}$$

$$(5) \quad \dot{w}_{ij} = \sum_{k=1}^N z_{kij} - o_{ij}$$

$$(6) \quad \dot{x}_{in} = \sum_{k=0}^N s_{kin} \quad (i \neq 0)$$

$$(7) \quad x_n = \sum_{i=0}^N x_{in}$$

$$(8) \quad Y_{kij} = -Y_{kji}, s_{kin} = -s_{kni}$$

となる。生産と購買に関する行動ルールは、消費と在庫の関数と考えられるので、

$$(9) \quad r_{ij} = \rho_{ij} \left[q_{ij}, \sum_{k=1}^N Y_{kij} + \sum_{k=1}^M z_{kij} \right]$$

$$(10) \quad \sum_{k=1}^N Y_{kij} = \eta_{ij} [V_{ij}, d_{ij}]$$

$$(11) \quad \sum_{k=1}^N z_{kij} = \zeta_{ij} [w_{ij}, o_{ij}]$$

$$(12) \quad \sum_{k=0}^N s_{kin} = \sigma_{in} [x_{in}, f_{in}] \quad (i \neq 0)$$

となる。行動ルールには他の生産者や消費者からの情報が含まれていないが、これは自律的制御の非相互通信性と孤立性を表現してゐる。

方程式 (1) ~ (12) によって自律的制御の一般モデルが構成される。次に、この制御メカニズムの特性について検討しなければならぬ。制御理論では、制御の良し悪しを

様々な観点から評価するが、システムの安定性の吟味はその基本的な評価規準である。それは、システムの解が終局的にある特定の状態の近傍にとどまるかどうかを示す概念である。ここでは、安定性ということをやアブノフの意味で定義することしよう。システムの解が有界でないならば不安定、解が有界ならば安定と呼び、解が有界でも無限大にする時ゼロに近づくならば漸近的安定と呼ぶ。

安定性の次に検討されるのが存続可能性 Viability である。システムがある制御メカニズムに従って作動する場合、少なくともそのシステムは、「生きる」という条件を満たすことが必要である。たとえば、システムの状態変数が負になったり制約条件を満たさなくなる場合、そのシステムは現実性を失ない存続することが不可能になっているのである。したがって、ある制御メカニズムが、システムの存続を維持しながら制御機能を果たすことができるのかどうかは制御の評価規準となる。これを存続可能性といい、先の一般モデルにおいては、

$$(13) \quad r_{ij}, q_{ij}, V_{ij}, w_{ij}, z_{0i} \geq 0, \quad z_{in} \leq f_{in} \quad (i \neq 0)$$

がその条件である。

自律的制御メカニズムが、安定性や存続可能性規準を満たすものであるのかどうかということを明らかにするために、一般モデルを特定化しなければならない。以下では、それをレオンチェフ型に特定化し、連続時間型と離散時間型の場合に分けて検討する。

三 レオンチェフ型の連続モデル

—— コルナイ・マルトシュモデル ——

コルナイとマルトシュは、一般モデルをレオンチェフ型に特定化し、連続時間のもとで検討した。(このモデルは二人の頭文字より KM モデルと呼ばれる)。このモデルには、制御を示す行動ルールの相異に応じて、KM-1 モデルと KM-2 モデルという二つのバリエーションがある。前者は後者の分析に含まれているので、ここでは KM-1 モデルを主に取り上げて検討する。

次の仮定を (a) ~ (d) に追加することによってシステムを特定化する。

- (e) 変数はすべて確定的である。
- (f) 唯一の消費者 ($M=1$)。

(g) 経済の実物域はレオンチエフ型である。

(i) 稀少な一次資源は存在しない ($m=0$)。

(ii) 第 i 生産物は第 i 生産者によってのみ生産される ($m=N$)。

(iii) 投入は生産水準に比例する ($a_{ij}=A_{ij}r_{ij}$)。

(h) $A(t)=[A_{ij}(t)]$ は非負で、 $t \geq 0$ で連続かつ微分可能で、そのフロベニウス根は 1 より小。

(i) 初期の生産 r^0 は維持可能 sustainable である ($r^0 - A^0 r^0 > 0$)。

(j) 消費関数 C_i は、十分 sufficient である。

$$V_i t_i; \quad C_i(t) > \left| r^0 - \sum_{j=1}^n A_{ij} r^0 - C_i^0 \right| \quad (t \geq 0)$$

(k) 初期在庫は正である ($q_i^0, V_i^0, w_i^0 > 0$)。

すると KM—2 モデルのバランス方程式は次のように特定化される。

$$(14) \quad \dot{q} = r - Y1 - z$$

$$(15) \quad \dot{V} = Y - A(r)$$

$$(16) \quad \dot{w} = z - c$$

q^*, V^*, w^* をそれぞれの変数に対応する標準在庫指標

normal stock ⁽²⁾ とし、 B_i と C_i を第 i 生産者の制御パラメータとし、それらを要素とする対角行列を B, C とする。制御メカニズムを示す行動ルールは次のようにセットされる。

$$(17) \quad \dot{r} = Y1 + z - 2BC\dot{q} + C^2(q^* - q)$$

$$(18) \quad \dot{V} = A(r) + A(r) - 2BC\dot{V} + C^2(V^* - V)$$

$$(19) \quad \dot{z} = c - 2BC\dot{w} + C^2(w^* - w)$$

ここで $B=0$ とおけば KM—2 モデルが得られる。⁽²⁾ KM—2 モデルは、 $(2n^2 + 4n)$ 本のスカラー方程式と同数の未知数を有する線型微分方程式から成っている。係数行列は正であるので、 $t=0$ において q^0, V^0, r^0, w^0, z^0 とし、一意解をもつ。

では次に安定性の分析を行なおう。連続型の線型システムにおける安定性規準は一般に次のように定式化される(補論二参照)。

〈補題一〉

システム行列 P の固有値がすべて異なるならば、

(i) 固有値のうち少なくとも一つが正の実部をもつならば、システムは不安定である。

(ii) すべての固有値が負の実部をもつならば、システムは漸近的安定である。

(iii) すべての固有値が非正の実部をもつならばシステムは安定で、ゼロの実部をもつものが存在すれば漸近的安定でない安定である。

補題一によれば、システムの安定性は、システム行列の固有値の性質に依存することがわかる。ここでは製品在庫量 q を例にとって検討しよう。(14)を微分して(17)に代入し、第 i 生産者に注目して整理すれば、

$$(20) \quad \dot{q}_i = -2B_i C_i q_i - C_i^2 q_i + C_i q_i^*$$

を得る。システムの状態変数として

$$x = [q_i, \dot{q}_i]^T$$

システム行列として、

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -C_i^2 & -2B_i C_i \end{bmatrix}$$

をとれば、(20)は次のような標準形になる。

$$(21) \quad \dot{x} = Px + C_i^2 \begin{bmatrix} 0 \\ q_i^* \end{bmatrix}$$

またシステム行列 P の固有値を λ とおけば、

$$(22) \quad \lambda = -B_i C_i \pm \sqrt{B_i^2 C_i^2 - C_i^2}$$

である。

まず $B_i = 0$ とした $KM-1$ モデルの場合を考察しよう。(22)より固有値を求めれば、

$$(23) \quad \lambda = \pm i C_i$$

となり、実部はゼロとなっている。よって、補題一(iii)より次のことが成り立つ。

〈命題一〉

$KM-1$ モデルは漸近的安定でない安定である。

その一般解は、行列表示をすれば次のような形になる。

$$(24) \quad q = q^* + (\cos C_i t) (q^0 - q^*) + C_i^{-1} (\sin C_i t) (q^0 - Y^0 \mathbf{1} - z^0)$$

(24)において $\cos C_i t$ と $\sin C_i t$ を合成することができるので、 q は一定の振幅の周期関数となり、漸近的安定でない安定であることがわかる。

$KM-2$ モデルの場合¹⁴⁾ $|B_i|/NW_1$ に分けて考察しなければならぬ。

(a) $|B_i| > 1$ のケース

この場合、固有値 λ は実数となる。補題一より、安定であるための条件は、

$$(25) \quad -B_2C_2 \pm C_2\sqrt{B_2^2 - 1} \leq 0$$

である。一般に $C_2 > 0$ と考えられるので、(25)を満たす領域は、

$$(26) \quad B_2 > 1$$

である。したがってこの一般解は、 $D_2 = C_2\sqrt{B_2^2 - 1}$ とおけば、

$$(27) \quad q = q^* + \frac{1}{2}e^{-B_2C_2t}\{(e^{D_2t} + e^{-D_2t})(q^0 - q^*) + (e^{D_2t} - e^{-D_2t})D^{-1}[\gamma^0 - \gamma^0\mathbf{1} - z^0 + BC(q^0 - q^*)]\}$$

となり、 $t \rightarrow \infty$ ならば $e^{-B_2C_2t} \rightarrow 0$ となるので、非周期的な漸近的安定である。

(b) $|B_2| \wedge 1$ のケース

固有値は複素数となつて

$$(28) \quad \lambda = -B_2C_2 \pm iC_2\sqrt{1 - B_2^2}$$

となる。このとき、補題一より安定であるための条件は、実部が非正となればよいため、

$$(29) \quad -B_2C_2 \leq 0$$

である。したがって(29)を満たす B_2 の領域は、

$$(30) \quad 0 < B_2 < 1$$

で、このとき q_t は漸近安定となる。この場合の q の一般解は、 $D_2 = C_2\sqrt{1 - B_2^2}$ とおけば、

$$(31) \quad q = q^* + e^{-B_2C_2t}\{(\cos D_2t)(q^0 - q^*) + D^{-1}(\sin D_2t)[\gamma^0 - \gamma^0\mathbf{1} - z^0 + BC(q^0 - q^*)]\}$$

となり、(30)が成りたてば、周期的な漸近的安定であることが確かめられる。

(c) $|B_2| = 1$ のケース

これは、固有値が重根となるケースで、コルナイとマルトシユでは除外されている。補題一からは安定性条件を導けないので、一般解を求めてから、安定性条件を吟味しよう。

固有値は、 $B_2 = \pm 1$ に応じてそれぞれ

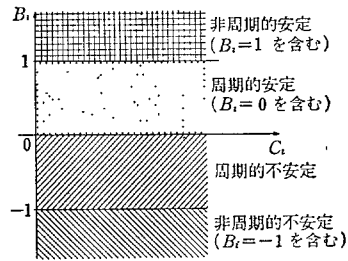
$$(32) \quad \lambda = C_2 \text{ または } \lambda = -C_2$$

となる。このときの一般解は、

$$(33) \quad q = q^* + e^{-C_2t}\{q^0 - q^* + [\gamma^0 - \gamma^0\mathbf{1} - z^0 + C(q^0 - q^*)]t\} \quad (B_2 = 1)$$

$$(34) \quad q = q^* + e^{C_2t}\{q^0 - q^* + [\gamma^0 - \gamma^0\mathbf{1} - z^0 + C(q^0 - q^*)]t\} \quad (B_2 = -1)$$

第2図 KM-2 モデルの安定領域



$$-C(q^0 - q^*)]k \quad (B_i = -1)$$

となる。したがって、 $C_i > 0$ であるから、 $B_i = 1$ ならば非周期的な漸近安定、 $B_i = -1$ ならば非周期的な不安定であることがわかる。

以上をまとめれば次の命題を得る。

〈命題一〉

KM-2 モデルは、パラメータを適当にとれば漸近的安定になる。すなわち、 $B_i \neq 1$ ならば非周期的漸近的安定、 $0 < B_i < 1$ ならば周期的漸近的安定となる。

これを座標を用いて領域で示せば第2図のようになる。
〈命題一〉、〈命題二〉は、 q だけでなく $V \cdot w \cdot r \cdot Y \cdot z$ についても成立することは同様の方法を用いて明らかにすることができる。

存続可能性については、次の命題が成り立つ。

〈命題三〉

$t \geq 0$ のときすべての i に対して

$$(35) \quad a_i(t) > \left| r^0 - \sum_{j=1}^n A_{ij} r_j^0 - a_i^0 \right| (1 + \varepsilon_i)$$

を成り立たせる ε_i が存在するならば、システムの存続を可能にするパラメータが存在する。

(1) 以上の特定化により一般モデルにおける $f \cdot x \cdot s$ は捨象される。また y_{ij} とおいたことにより、 Y_{ijk} と z_{ijk} についてはそれぞれ Y_{ij} 、 z_{ij} となる。さらに y_{ij} としたもので i の区別は必要ないので、 C_{ij} と z_{ij} はそれぞれ C_j 、 z_j となる。そして以下では、添字のない変数はそれぞれのベクトル又は行列を表わすものとする。

(2) ここで標準在庫指標とは、現実のプロセスで観察される統計的平均値をさす。normal としても、「望ましい」水準を意味しないことに注意すべきである。

(3) 制御理論では伝達関数の特性に応じて、比例制御(P制御)、微分制御(D制御)、積分制御(I制御)などに区分するが、これに従えば、KM-1モデルはI制御、KM-2モデルはPI制御といえる。

(4) 具体的な解を求める場合は、補論二のような一般解はあまり有効でなく、ラプラス変換を用いた方が便利である。その手法については[8]の3章参照。尚、以下の式に現われる $\cos C_0 \sin C_0 e^{C_0 t} + \cos C_0 \sin C_0 e^{C_0 t}$ を成分とする対角行列を意味する。

(5) たとえば、

$$q^* = q^0, V^* = V^0, w^* = w^0, B_1 \leq \frac{\sqrt{2e_1 + e_2^2}}{1 + e_1}$$

ならば存続可能であることが証明される。

四 レオンチェフ型の離散モデル

—— ダンチ・フニャーディ・シバークモデル ——

Dancs—Hunyadi—Sivák らが KM モデルを離散型に修正したモデルは、DHS モデルと呼ばれる。この場合離散型にした意義は、単に微分演算子を差分演算子に置き代えたということではなく、KM モデルでは無視された時間の遅れを明示的に考慮することにある。

仮定は、仮定(d)と(h)の微分可能性・連続性を除けば、

KM モデルと同じである。(尚、DHS モデルでは、存続可能性は検討されないので仮定(i)と(j)も必要である。)

1 を差分演算子として、KM-2 モデルに対応する DHS-2 モデルを記述すれば、

バランス方程式

$$(36) \quad \Delta q = r - Y_1 - z$$

$$(37) \quad \Delta V = Y - A \langle r \rangle$$

$$(38) \quad \Delta w = z - c$$

行動ルール

$$(39) \quad \Delta r = \Delta Y_1 + \Delta z - 2BC \Delta q + C^2(q^* - q)$$

$$(40) \quad \Delta Y = \Delta(A \langle r \rangle) - 2BC \Delta V + C^2(V^* - V)$$

$$(41) \quad \Delta c = 2BC \Delta w + C^2(w^* - w)$$

となる。(39)―(41)において $B=0$ とおき行動ルールだけ変更したのが DHS-1 モデルであるが、KM モデル同様、DHS-2 モデルを中心に分析を行う。

離散型の線型システムの安定性・標準も連続型と同様に、標準形に変形した際のシステム行列の固有値の性質によって分類される。(補論一参照)。

〈補題二〉

システム行列 Q の固有値がすべて異なるならば、
(i) 絶対値が 1 より大きい固有値を一つでも持つならば、
システムは不安定である。

(ii) 固有値の絶対値がすべて 1 より小さいならば (但し、
+1 を含む)、システムは漸近的安定である。

(iii) 固有値の絶対値がすべて 1 より大きくないならば、安定で、1 に等しいもの (+1 は除く) が存在するならば、漸近的安定でない安定である。

ここでも $q(t)$ に注目して、安定性の分析を行なおう。(39) をさらに差分して (39) に代入すると、生産者に関する方程式として、

$$(42) \quad \Delta^2 q_i(t) = -2B_i C_i \Delta q_i(t) + C_i^2 [q_i^* - q_i(t)]$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned} \Delta^2 q_i(t) &= \Delta q_i(t) - \Delta q_i(t-1) \\ &= q_i(t+1) - 2q_i(t) + q_i(t-1) \end{aligned}$$

を代入すれば、

$$(43) \quad q_i(t+1) = q_i(t) + (1-2B_i C_i) [q_i(t) - q_i(t-1)] + C_i^2 [q_i^* - q_i(t-1)]$$

(43) 式の右辺第二項は、将来の在庫は前期から今期の在庫の変化に、第三項は前期の在庫と標準在庫指標との差に依存していることを示す。標準形に変形するため、

$$x(t) = [q_i(t-1), q_i(t)]^T$$

を状態変数ベクトルとし、

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1+2B_i C_i - C_i^2 & 2-2B_i C_i \end{bmatrix}$$

をシステム行列にとれば、

$$(44) \quad x(t+1) = Qx(t) + C_i^2 \begin{bmatrix} 0 \\ q_i^* \end{bmatrix}$$

となる。すると Q の固有値は一般に、

$$(45) \quad \lambda = 1 - B_i C_i \pm C_i \sqrt{B_i^2 - 1}$$

である。

また、DHS-1 モデルについて検討しよう。 $B=0$ であるから、 Q の固有値は、

$$(46) \quad \lambda = 1 \pm i C_i$$

となる。絶対値をとると、 $C_i > 0$ であるから

$$|\lambda| = \sqrt{1 + C_i^2} > 1$$

となり、〈補題二〉より不安定であることがわかる。

〈命題四〉

DHS-1 モデルは、不安定である。

この時、 $q_i(t)$ に関する一般解は、

$$(47) \quad q_i(t) = q_i^* + h_i(1 + C_i^2)^{1/2} \sin(I_i t + \theta_i)$$

$$\text{ここで, } h_i = \frac{1}{C_i} \sqrt{C_i^2(q_i^0 - q_i^*)^2 + (r_i^0 - \sum_{j=1}^n Y_i^0 j - z_i^0)^2},$$

$$\theta_i = \arcsin \frac{q_i^0 - q_i^*}{h_i}, \quad I_i = \frac{C_i}{\sqrt{1 + C_i^2}}$$

となり、振幅が増加していく周期関数となることがわかる。安定性を有する KM-1 モデルに時間の遅れを導入すると、不安定なシステムになってしまうのである。

DHS-2 モデルについては、 $|B_i|/M_i$ のそれぞれについて分けて検討しなければならない。

(a) $|B_i| > 1$ のケース

固有値は二つの実数となり、それらを

$$\lambda = 1 - B_i C_i + C_i \sqrt{B_i^2 - 1}, \quad \lambda = 1 - B_i C_i - C_i \sqrt{B_i^2 - 1}$$

とおく。

(i) $B_i < -1$ ならば $\lambda > 1$ となるので、システムは非周期的不安定である。

(ii) $C_i < 2$ かつ $B_i > \frac{4 + C_i^2}{4C_i}$ または、 $C_i \geq 2$ かつ $B_i > 1$ ならば、 $\lambda < -1$ となるのでシステムは周期的不安定となる。

(iii) $C_i < 1$ かつ $1 < B_i < \frac{1 + C_i^2}{2C_i}$ ならば $0 < \lambda < 1$ かつ $0 < \lambda < 1$ となるので、システムは非周期的な漸近的安定となる。

(iv) $C_i < 1$ かつ $\frac{1 + C_i^2}{2C_i} < B_i < \frac{4 + C_i^2}{4C_i}$ または、 $1 \leq C_i < 2$

かつ $1 < B_i < \frac{4 + C_i^2}{4C_i}$ ならば、 $-1 < \lambda < 1$ かつ $-1 < \lambda < 0$ 、または $-1 < \lambda < 1$ かつ $-1 < \lambda < 0$ となるので、

システムは周期的漸近的安定となる。

以上のことは、次のように表わせる $q_i^{(t)}$ の一般解からも明らかである。

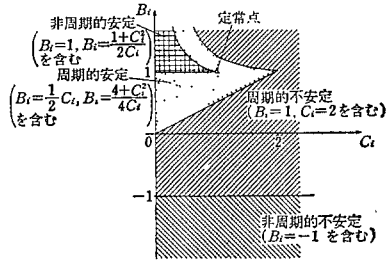
$$(48) \quad q_i(t) = q_i^* + \frac{1}{2} D_i^{-1} [\lambda^t [r^0 - \sum Y_i^0 j - z_i^0] + (1 - \lambda)(q_i^0 - q_i^*)] - \lambda^t [r^0 - \sum Y_i^0 j - z_i^0] + (1 - \lambda)(q_i^0 - q_i^*)]$$

$$D_i = \sqrt{B_i - 1}$$

(b) $|B_i| < 1$ のケース

この場合固有値は複素数となって、

第3図 DHS-2 モデルの安定領域



と表わすことができる。したがって絶対値は、

$$\lambda = 1 - B_1 C_1 + i C_1 \sqrt{1 - B_1^2}$$

$$|\lambda| = \sqrt{1 - 2B_1 C_1 + C_1^2}$$

となる。(補題1)より

(a) $0 < |C_1| < B_1 < 1$ ならば $|\lambda| < 1$ となって、システムは減衰振動し、漸近的安定となる。

(b) $0 < |C_1| = B_1 < 1$ ならば、 $|\lambda| = 1$ となって、一定の振幅で振動し、漸近的安定でない安定となる。

(c) $1 < B_1 < \text{Min} \left[\frac{C_1}{1}, \frac{C_1}{2} \right]$ ならば、 $|\lambda| > 1$ となって振動は発散し、システムは不安定となる。

$|B_1| < 1$ の場合の一般解は、

$$(49) \quad q_i(t) = q_i^* +$$

$$+ (1 - 2B_1 C_1 + C_1^2)^{1/2} \sin(\phi_i \cdot t + \phi_i) m_i$$

$$(50) \quad \phi_i = \arcsin \frac{C_1 \sqrt{1 - B_1^2}}{1 - 2B_1 C_1 + C_1^2}, \quad \phi_i = \arcsin \frac{q_i^0 - q_i^*}{m_i}$$

$$m_i = \left[\frac{(q_i^0 - q_i^*)^2}{\sin^2 \phi_i} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2B_1 C_1 + C_1^2}} - 1 \right) + 1 \right]^{1/2}$$

となり、(a)～(c)は明らかである。

(c) $|B_2| = 1$ のケース

固有値が重根となるこのケースは、DHSモデルでも検討されていない。先の(補題1)を直接適用できないので、まず一般解を求めれば、

$$(50) \quad q_i(t) = [q_i^0 - q_i^* + (1 - C_1)^{-1} C_1 (q_i^* - q_i^0) + \tau_i^0 - \sum Y_i^0 j - z_i^0] e^j (1 - C_1)^t + q_i^* \quad (B=1)$$

$$(51) \quad q_i(t) = [q_i^0 - q_i^* + (1 + C_1)^{-1} C_1 (q_i^0 - q_i^*) + \tau_i^0 - \sum Y_i^0 j - z_i^0] e^j (1 + C_1)^t + q_i^* \quad (B=-1)$$

となる。よって、(a) $B=1$ ならば、システムは非周期的不安定。

- (i) $B \equiv 1$ かつ $0 < C < 1$ ならば、非周期的漸近的安定。
 (x) $B \equiv 1$ かつ $1 < C < 2$ ならば、周期的漸近的安定。
 (ii) $B \equiv 1$ かつ $C \geq 2$ ならば、周期的不安定。
 (y) $B \equiv C \equiv 1$ ならば、 $q_i^i(C) \equiv q_i^i^*$ となり一種の定常状態となる（漸近的安定でない安定）。

以上(i)―(y)を領域で示せば第3図になる。

これより次の命題を得る。

〈命題五〉

時間的遅れを伴うDHS—2モデルにおいても適当なパラメータを選べば、システムは安定になる。すなわち、

$$1 \leq B_i < \frac{1+C_i^2}{4C_i} \quad \text{または} \quad 0 < \frac{C_i}{2} \leq B_i < 1$$

ならばシステムは安定となる。

まとめに代えて

以上、自律的制御メカニズムに関する二つのモデルの解析的分析を行うことにより、この抽象度の高いモデルにおける、AEで提起された自律的機能の安定性について

では、厳密に論証されることが明らかになった。

しかしながら、現実度を少しでも高めようとすれば残された問題は多い。その第一は、自律的制御は、技術革新をも誘導しうるのかどうかという点である。ここで行われたのは、外延的成長の保証であって、内包的成長を導くような機能については未知の問題である。第二は、稀少な外部資源が存在する場合、実物域は自律的に制御されうるのかどうかという点である。第三は、自律的制御はどの程度効率的であるのかということである。

以上の問題の他に、自律的制御メカニズムと他の制御メカニズム、たとえば価格メカニズムや指令メカニズム或いは、それらの中間的形態等々との関連を明確にし、それらの多段階的複合的制御メカニズムを研究するという課題はAEで強調されていたが、この点は今後に残されたより大きな問題といえよう。

〈参考文献〉

- [1] Kornai, J. *Anti-Equilibrium*. North-Holland, 1971.
 [2] Kornai, J.-Martos, B. "Autonomous Functioning of the Economic System." *Econometrica*. Vol. 41.
 [3] Kornai, J.-Martos, B. (ed.) *Non Price Control*, North-

Holland, 1981.

[4] Tustin, A, *The Mechanism of Economic System*, Heinemann, 1953.

[5] コルナイ『反均衡の経済学』(岩城訳) 日本経済新聞社、一九七五年。

[6] 久保庭真彰「計画化と自律性」『経済評論』一九七四年四月。

[7] ——「社会主義経済の動学的多部門モデル」『経済研究』第三十三巻一号、一九八二年一月。

[8] 久保庭編訳「コルナイ・マルトシュ編『非価格制御』」、『統計研究参考資料』法政大学日本統計研究所、一九八二年十一月。

〈補論一〉フィードバック制御と標準形

(一) フィードバック制御

制御とは一般に、ある目的に適合するように対象となつてゐるものに所要の操作を加へることであると定義される。制御される対象を制御対象、制御を行うものを制御装置という。制御対象に属する量のうちで制御される量を制御変量といい、制御の目的値を示し、制御装置に伝えられる信号を目的信号、制御装置から制御対象に加

えられる信号を操作信号という。また、制御対象は、その環境からも通常は影響を受けるが、これを外部効果という。

制御対象の多くにおいては、制御変量に関する情報が集められ、その情報が再び制御装置に加えられ、目標信号とともに操作信号に影響を与へている。これがフィードバック制御と呼ばれるもので、第4図がその図式化である。

(二) 制御の標準形

単純なフィードバック制御を数学的に記述するため、次のように記号を定義しよう。

x : 制御変量ベクトル y : 検出信号ベクトル y^* : 目標信号ベクトル v : 操作信号ベクトル z : 外部効果ベクトル

システムは線形で、検出信号は外部効果に影響されることはなく x に比例すると仮定する。制御装置に入力される信号は制御動作信号と呼ばれるが、それは $y^* - y$ に等しい。

まず、連続時間型のフィードバック制御の標準的狀態空間表示を記述しよう。

制御対象の方程式は、

$$(52) \quad \dot{x} = Gx + H_0 + I_2$$

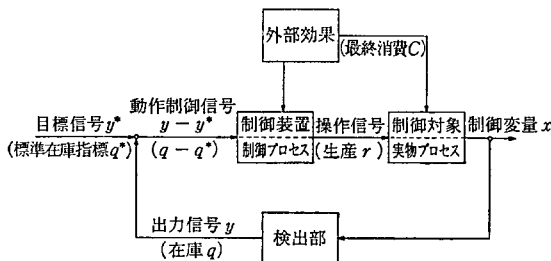
測定方程式は、

$$(53) \quad y = Mx$$

制御装置の方程式は、

$$(54) \quad v = J_0 + K(y^* - y) + Nz$$

第4図 フィードバック制御



である。さて、 $[z, v]^T$ をひとつの状態ベクトル、 $[z, y^*]^T$ を入力ベクトルとおけば、

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & H \\ -KM & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ N & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^* \\ y^* \end{bmatrix}$$

と書き換えることができる。改めて、 $x = [z, v]^T$, $u = [z^*, y^*]^T$

$$P = \begin{bmatrix} G & H \\ -KM & J \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} I & 0 \\ N & K \end{bmatrix}$$

とおけば、連続型の線型の制御システムの状態空間表示は、

$$(55) \quad \dot{x} = Px + Ru$$

と表わすことができる。

次に離散時間型の場合を示そう。

(52) を単純に差分方程式に直すと、

$$(56) \quad \Delta x(t) = Gx(t) + H_0(t) + I_2(t)$$

であるが、 $\Delta x(t) = x(t+1) - x(t)$ を代入して

$$(57) \quad x(t+1) = (E+G)x(t) + H_0(t) + I_2(t)$$

となる。ここで $G = E+G$ とおき、 J についても同様にすると制御対象、測定、制御装置の方程式はそれぞれ、

$$(58) \quad x(t+1) = Gx(t) + H_0(t) + I_2(t)$$

$$(59) \quad \dot{y}(t) = Mx(t)$$

$$(60) \quad v(t+1) = J(t) + K[y^*(t) - y(t)] + Nz(t)$$

となる。1)1)は

$$Q = \begin{bmatrix} \bar{G} & H \\ -KM & J \end{bmatrix}$$

とおき、改めて $x(t) = [x(t)', v(t)']$, $u(t) = [z(t)', y^*(t)']$ と定義すれば、離散型の状態空間表示は、

$$(61) \quad x(t+1) = Qx(t) + Ru(t)$$

と表わすことができる。

制御の動態は、微分方程式(5)或いは、差分方程式(6)によって記述されるのである。

〈補論二〉安定性の条件

システムの状態は、(5)或いは(6)で記述されるが、そのにおいて $x \equiv 0$ とおくと同次微分(差分)方程式

$$(62) \quad \dot{x} = Px$$

$$(63) \quad x(t+1) = Qx(t)$$

が得られる。これらの解で、初期条件 $x(0) = x_0$ を満たすものを基本解という。

微分方程式(5)の一般解を求めるために、両辺に積分因

数 $\exp(-Pt)$ をかけて整理すれば、

$$\exp(-Pt)\dot{x} - P\exp(-Pt)x = \exp(-Pt)Ru(t)$$

1)1)は、行列関数 $\exp(Pt)$ は、

$$\exp(Pt) = E + \frac{Pt}{1!} + \frac{(Pt)^2}{2!} + \dots$$

と定義されている。左辺が $\exp(-Pt)x$ の微分したものであるから、両辺を 0 から t まで積分すれば、

$$\exp(-Pt)x(t) \Big|_{t=0} = \int_0^t \exp(-P\tau)Ru(\tau)d\tau$$

$$\exp(-Pt)x - x^0 = \int_0^t \exp(-P\tau)Ru(\tau)d\tau$$

$$(64) \quad x = \exp(Pt)x^0 + \int_0^t \exp\{P(t-\tau)\}Ru(\tau)d\tau$$

これが一般解となる。すると、基本解を x_0 で表わせば、

$$(65) \quad x_0 = \exp(Pt)x^0$$

となる。 P を $n \times n$ 行列で n 個の異なる固有値をもつと仮定し、それらを $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ と表わし、さらにそれらを成分にもつ対角行列を A とおけば、

$$P = T^{-1}AT$$

となる T が存在する。(T^{-1} は $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ に対応する固有ベクトルを並べたもの。) すると、 $\exp(Pt)$ は、次の

ように変形できる。

$$\exp(Pt) = T^{-1} \exp(At) T = \sum_{j=1}^n e^{\lambda_j t} T^{-1} e_j e_j^T$$

$$\text{ii)} \quad D_j = T^{-1} e_j e_j^T \quad \lambda_j \neq \lambda_{j'} \quad j \neq j'$$

$$(66) \quad \exp(Pt) = \sum_{j=1}^n e^{\lambda_j t} D_j$$

となる。(66)の右辺の各項の $e^{\lambda_j t} D_j$ を検討しよう。 λ_j は、一般に複素数であり、かつ λ_j が固有値ならば、その共役な複素数 λ_j^* も固有値で、それらの固有ベクトルも共役の関係にあるから、

$$(67) \quad e^{\lambda_j t} D_j + e^{\lambda_j^* t} \bar{D}_j$$

$$= \frac{1}{2} (2 + i\omega) e^{i(\phi + i\psi)} + \frac{1}{2} e^{(2 - i\omega)t} (\phi - i\psi)$$

$$= \frac{1}{2} e^{2t} [(\cos \omega t) + i(\sin \omega t)] (\phi - i\psi)$$

$$+ [\cos \omega t - i(\sin \omega t)] (\phi - i\psi)]$$

$$= e^{2t} \{(\cos \omega t) \phi - (\sin \omega t) \psi\}$$

と変形することができ、複素固有値をもつ場合も実数の形式で解を表現することができるのである。また(65)式右辺第二項も(67)と同様な形になるので、一般解の分析は基本解の分析に帰着することになる。

式の行列 ϕ の任意の要素を α 、それに対応する ϕ の要素を β とおけば、

$$(68) \quad \alpha \cos \omega t - \beta \sin \omega t = r \cos(\omega t - \theta)$$

$$\text{但し} \quad \begin{cases} r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ \theta = \arctan\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) \end{cases}$$

となる。(67)と(68)により、(66)式の各項の動きについて、固有値の性質に応じて次の六つのケースに分類できる。

① λ が正の実数の場合。 λ は $t \rightarrow \infty$ の時、単調に増加する。

② λ が負の実数の場合。 λ は $t \rightarrow \infty$ の時、単調に減少する。

③ $\lambda = 0$ の場合。 $e^{\lambda t} = 1$ で定数項となる。 P が特異の時、このケースが生じるがここでは除外する。

④ λ と λ^* が正の実部をもつ複素数の場合。 $e^{\lambda t}$ は $t \rightarrow \infty$ のとき単調増加し、(68)で表わされる第二項とあわせれば、(67)は振幅が無限に増加していく周期的な振動を示す。

⑤ λ と λ^* が負の実部をもつ複素数の場合。 $e^{\lambda t}$ は振幅が 0 に近づいていく周期的な振動。

⑥ λ と $\bar{\lambda}$ が純虚根の場合。 $\delta=0$ より $\delta^k=1$ となり (67) は振幅が一定の周期的な振動。

これにより行列 P の固有値がすべて異なる場合の安定性の規準は (補題一) としてまとめられるのである。

次に離散型システムについて検討しよう。(61) の一般解と基本解を求めると、(61) 式の両辺に Q^{-t-1} をかけて整理すれば、

$$Q^{-t-1}x(t+1) - Q^{-t}x(t) = Q^{-t-1}Ru(t)$$

$t=0$ から $t-1$ までは、両辺の和をとれば、

$$\sum_{\tau=0}^{t-1} [Q^{-\tau-1}x(\tau+1) - Q^{-\tau}x(\tau)] = \sum_{\tau=0}^{t-1} Q^{-\tau-1}Ru(\tau)$$

右边を計算すると、二つの項だけ残り、

$$Q^{-t}x(t) - x^0 = \sum_{\tau=0}^{t-1} Q^{-\tau-1}Ru(\tau)$$

$$(69) \quad x(t) = Q^t x^0 + \sum_{\tau=0}^{t-1} Q^{t-\tau-1} Ru(\tau)$$

また、基本解は、

$$(70) \quad x_a(t) = Q^t x^0$$

Q を先と同様に、 n 個の異なる固有値をもつと仮定してスペクトル分解すれば、

$$(71) \quad Q^t = \sum_{j=1}^n \lambda_j^t D_j$$

λ_j を極座標形式にかければ、ド・モアールの公式より

$$(72) \quad \lambda_j^t = \rho_j^t (\cos w_j t + i \sin w_j t)$$

$$\text{但し } \rho_j = |\lambda_j|$$

$$w_j = \arctan \frac{\text{Im} \lambda_j}{\text{Re} \lambda_j}$$

となる。共役な複素数をもつ項の和は、

$$\lambda^t D + \bar{\lambda}^t \bar{D} = \rho^t [(\cos w t) \phi - (\sin w t) \psi]$$

と示すことができる。(72) の右辺の $\{\}$ の中も (68) と同様に $r \cos(wt - \theta)$ と表わすことができる。すると、先と同様にして次のように分類される。

① λ が実数で $|\lambda| > 1$ の場合。 $t \rightarrow \infty$ の時 λ^t は単調に増加する。

② λ が実数で $|\lambda| < 1$ の場合。 $t \rightarrow \infty$ の時 λ^t は符号を交替させながら絶対値は単調に増加する。

③ λ が実数で $-1 < \lambda < 1$ の場合。 $t \rightarrow \infty$ の時 λ^t は 0 に収束する。

④ $|\lambda| = 1$ の時、 $\lambda^t = 1$ で定数項となる。

⑤ $|\lambda| = 1$ の時、 λ^t は交互に 1 と -1 になる。

(127) 在庫調整にもとづく自律的制御メカニズムについて

⑥ γ と γ_1 が共役な複素数の場合、 γ_2 は周期的に振動し、その振幅は根の絶対値が 1 より大ならば、単調増加、1 より小ならば減少。1 と等しければ一定である。

以上より、離散型の安定性規準に関する〈補題二〉が得られる。

(一橋大学大学院博士課程)