

《研究ノート》

ルックバックオプションの価格理論についての注意

藤 田 岳 彦

1 はじめに

本論文では、2つのルックバックオプションをとりあげ、その理論価格を計算する。

1つは、株式を保有する投資家が株式が値下がりする (or 高値で売れない) というリスクをヘッジするオプションで、もう1つは、三浦 ([8]) が導入した α -パーセントイルオプションをとりあげる。ここでは、ギルサノフの公式を用いてドリフトなしのブラウン運動の結果から、ドリフト付のブラウン運動についての結果を導く。後者のオプションについては、すでに、赤堀 ([2])、Dassios ([3]) 等の結果があるが、この場合に、ドリフトの変換公式を用いて価格を計算する方法は、新しいと思われる。また、ある同時分布についての新しい結果という副産物も得られるが、これについては後述する。

2 第1のルックバックオプション

以下のような状況を設定する。株式を保有している投資家が、期間 $[0, T]$ の間に株式を売却するとする。すると、 S_t を t における株価、 M_T を期間の中で最高値とすると、当然 $M_T \geq S_T$ である。この差 $M_T - S_T$ が最高値での売りを逃した場合の期間 T までの値下がり分である

この値下がり分をリスクヘッジすることを考える。 K を正の定数として、ペイオフが、 $\max(M_T - S_T - K, 0)$ で与えられるルックバックオプションを買うと $M_T - K \leq \max(M_T - S_T - K, 0) + S_T \leq M_T$ より、時点 T で売った場合、最高値からの値下がり幅が、 K で抑えられるのである。このようなオプションの価格 $E_c[\max(M_T - S_T - K, 0)]$ (ここで、 $c = S_0 = \text{初期値}$) をまず、決定したい。

これは, M_T, S_T の 2 次元同時分布が決定できれば, これによる期待値をとることにより価格が計算できる. よって, 以下は M_T, S_T の 2 次元同時分布を調べる. 株価のモデルをドリフト付幾何ブラウン運動 (Black-Scholes モデル) にとることにより, その同時分布が決定できることを示す.

定理 1

$X_t = \sigma B_t + \mu t, M_T = \max_{0 \leq t \leq T} X_t$ (B_t は標準ブラウン運動) とおくと,

$$P_2(M_t \in da, X_t \in dy) = \frac{2(2a-x-y)}{|\sigma|^3 \sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{2\mu(a-y)}{\sigma^2}} e^{-\frac{(2a-x-y-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}} dady \quad \text{ここで, } x < a,$$

$y < a$ ($\mu=0$ の場合には, 多くの文献がある. 例えば, [5])

証明

まず $\mu=0, \sigma=1$ の時, 鏡像原理より,

$$B_t^a = B_t \text{ on } \{t < T_a\}, \quad B_t^a = 2a - B_t \text{ on } \{t > T_a\}$$

$$T_a = \inf \{t > 0 \mid X_t = a\} \text{ とおくと,}$$

B_t^a と B_t は, 同法則.

よって, $a \leq b, b > 0$ とすると

$$\begin{aligned} P_0(M_t > b, B_t < a) &= P_0(T_b < t, B_t < a) = P_0(T_b < t, B_t^b < a) \\ &= P_0(T_b < t, B_t > 2b-a) = P_0(M_t > b, B_t > 2b-a) = P_0(B_t > 2b-a) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{2b-a}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \end{aligned}$$

よって, a, b で偏微分して

$$P_0(M_t \in db, B_t \in da) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} (2b-a) e^{-\frac{(2b-a)^2}{2t}} dadb$$

$$P_0^\mu(A) = E_0 \left(1_A e^{\mu B_t - \frac{1}{2} \mu^2 t} \right) \quad \text{ここで, } A \text{ は, } \sigma(B_s, s \leq t) \text{ 可測集合}$$

とおくと, ギルサノフの公式より,

$$\begin{aligned} P_x(M_t \leq a, X_t \leq y) &= P_0 \left(\max_{0 \leq s \leq t} \left(\frac{x}{\sigma} + B_s + \frac{\mu}{\sigma} s \right) \leq \frac{a}{\sigma}, \frac{x}{\sigma} + B_t + \frac{\mu}{\sigma} t \leq \frac{y}{\sigma} \right) \\ &= P_0^{\frac{\mu}{\sigma}} \left(\max_{0 \leq s \leq t} \left(\frac{x}{\sigma} + B_s \right) \leq \frac{a}{\sigma}, \frac{x}{\sigma} + B_t \leq \frac{y}{\sigma} \right) \\ &= P_0^{\frac{\mu}{\sigma}} \left(\max_{0 \leq s \leq t} (B_s) \leq \frac{a-x}{\sigma}, B_t \leq \frac{y-x}{\sigma} \right) \end{aligned}$$

$$= \iint_{u \leq \frac{a-x}{\sigma}, v \leq \frac{y-x}{\sigma}, v \leq u} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \right) (2u-v) e^{-\frac{(2u-v)^2}{2}} e^{\frac{\mu}{\sigma} v - \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\sigma^2} t} dudv$$

両辺を a, y で偏微分して証明が終わる。

(証明終)

次のような株価モデルを考える。リスク中立測度のもとでは、株価過程 $S(t)$ の従う確率微分方程式のドリフトは、安全利子率を r (正の定数) とすると、 $rS(t)$ となるので、

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dB(t)$$

を株価 $S(t)$ の満たす確率微分方程式としてとる。

すると、伊藤の公式より、 $S(t) = S(0)e^{rB_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}$ となる。

よって、定理1より求めるオプション価値は、以下の通り。

$$S_0 = c \text{ として } M(t) = ce^{\max_{s \geq 0} \sigma B(s) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)s} \text{ となるので、}$$

$$\begin{aligned} & e^{-rT} E_c[\max(M_T - S_T - K, 0)] \\ &= e^{-rT} \int_{a > 0, a > y} \max(c(e^a - e^y) - K, 0) \frac{2(2a-y)}{|\sigma|^3 \sqrt{2\pi T^3}} \\ & \quad e^{-\frac{2(r - \frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma^2}(a-y)} e^{-\frac{(2a-y - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2}{2\sigma^2 T}} dady \end{aligned}$$

注意

定理1は、吸収壁を持つドリフト付ブラウン運動の推移確率密度を求めることによっても証明できる。([4] 参照)

3 α -パーセントイルオプション

三浦([7], [8])は、次のような興味深いルックバックオプションを考案した。

$X(t)$ を連続な確率過程とし、

$$A(t, x) = \frac{1}{t} \int_0^t 1_{x-}(X(s)) ds = \frac{1}{t} \int_0^t 1_{(-\infty, x]}(X(s)) ds, \text{ また,}$$

$$1_{(-\infty, x]}(y) = \begin{cases} 1 & \cdots y \leq x \\ 0 & \cdots y \geq x \end{cases} \text{ のとき}$$

とする。

すると、 $A(t, \cdot)$ は増加関数で、その逆関数 $m(t, \cdot)$ が存在する。

すなわち, $A(t, m(t, \alpha)) = \alpha (0 \leq \alpha \leq 1), m(t, A(t, x)) = x$ などが, 成立する.
 $A(t, x) > \alpha \Leftrightarrow m(t, \alpha) > x$

ここで, $m(t, \alpha)$ を $X(s) (0 \leq s \leq t)$ の α -パーセンタイルと呼ぶ.

例えば, $\alpha = \frac{1}{2}$ ととると, $m\left(t, \frac{1}{2}\right)$ は, $X(s) (0 \leq s \leq t)$ のメディアンであり,
 $m(t, 1) = \max_{0 \leq s \leq t} X(s)$ にも, 注意しておく.

この $m(t, \alpha)$ によって書かれるオブションを α -パーセンタイルオブションと呼ぶ.

典型的な例として, $E_c[\max(m(t, \alpha) - K, 0)]$ を挙げておく. またこのオブションの効能については, [8] を参照のこと.

赤堀 ([2]) は, $E_c[\max(m(t, \alpha) - K, 0)]$ の価格式の計算を実行した. また, Dassios ([3]) も類似の結果を得, さらに分布論からの考察も行っている. 本論文では, ギルサノフの公式を用いることにより, 価格式を求める.

まず, 前のようにドリフト無しのケースについて考察する.

$B(t)$ を標準ブラウン運動とし, つぎのような汎関数をとる.

$$f(t, x) = E_x \left[e^{aB(t)} e^{-\beta \int_0^t 1_{0-}(B(s)) ds} \right] \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

すると, ファインマン・カッツの公式より, つぎの偏微分方程式を満足する

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \beta 1_{0-}(x) f, \quad f(0, x) = e^{ax}$$

両辺のラプラス変換 $Lf(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-\xi t} f(t) dt$ をとることにより,

$$-e^{ax} + \xi \hat{f} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial x^2} - \beta 1_{0-}(x) \hat{f}$$

すると,

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial x^2} - \xi \hat{f} - e^{ax} = 0 \quad x > 0 \quad \text{のとき,}$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial x^2} - (\xi + \beta) \hat{f} - e^{ax} = 0 \quad x < 0 \quad \text{のとき,}$$

境界条件を考慮すると,

$$x > 0 \quad \text{のとき,} \quad \hat{f} = \frac{e^{ax}}{\xi - \frac{1}{2} \alpha^2} + C_1 e^{-\sqrt{2\xi} x}$$

$$x < 0 \quad \text{のとき,} \quad \hat{f} = \frac{e^{ax}}{\xi + \beta - \frac{1}{2} \alpha^2} + C_2 e^{\sqrt{2(\xi + \beta)} x}$$

となる定数 C_1, C_2 が存在する.

さらに, $\hat{f}$ は, 連続微分可能なので,

$$\hat{f}(0+) = \hat{f}(0-), \frac{\partial \hat{f}}{\partial x}(0+) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x}(0-) \text{ より,}$$

$$C_2 = \frac{\sqrt{2(\xi+\beta)} - \sqrt{2\xi}}{(\sqrt{2\xi} - \alpha)(\xi + \beta + \frac{1}{2}\alpha^2)}$$

$$\text{よって,} \quad \hat{f}(0) = \frac{1}{\left(\sqrt{\xi} - \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{\xi+\beta} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)}$$

ここで, ラプラス変換の公式 ([1]) より

$$\frac{1}{\sqrt{\xi-\alpha}+b} = L\left(e^{at}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - be^{b^2t}\operatorname{erfc}(b\sqrt{t})\right)\right) = L\left(e^{(a+b^2)t}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_t^{+\infty}\frac{e^{-\frac{b^2}{2}v}}{v^{\frac{3}{2}}}dv\right)$$

$$\operatorname{erfc}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_u^{+\infty}e^{-u^2}du$$

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\xi}+\frac{\alpha}{\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}\alpha}{\xi-\frac{\alpha^2}{2}} = L\left(e^{\frac{\alpha^2}{2}t}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_t^{+\infty}\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{2}v}}{v^{\frac{3}{2}}}dv\right) + L\left(\sqrt{2}\alpha e^{\frac{\alpha^2}{2}t}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\xi+\beta}+\frac{\alpha}{\sqrt{2}}} = L\left(e^{-\beta t}e^{\frac{\alpha^2}{2}t}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_t^{+\infty}\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{2}v}}{v^{\frac{3}{2}}}dv\right)$$

つまり,

$$\hat{f}(0) = L\left(e^{(-\beta+\frac{\alpha^2}{2})t}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_t^{+\infty}\frac{e^{-\frac{b^2}{2}v}}{v^{\frac{3}{2}}}dv * e^{\frac{\alpha^2}{2}t}\left(\sqrt{2}\alpha + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_t^{+\infty}\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{2}v}}{v^{\frac{3}{2}}}dv\right)\right)$$

(ここで, $*$ は, たたみこみを表わす.)

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds$$

ラプラス変換の一意性より,

$$E_0\left[e^{aB(t)-\beta\int_0^t 1_{0-(B(s))}ds}\right] = e^{\frac{\alpha^2}{2}t}\int_0^t e^{-\beta s}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_s^{+\infty}\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{2}v}}{v^{\frac{3}{2}}}dv\left(\sqrt{2}\alpha + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{t-s}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{2}u}}{u^{\frac{3}{2}}}du\right)$$

ここで, $\mu > 0$ とすると, ギルサノフの公式より

$$E_0\left[e^{-\beta\int_0^t 1_{0-(B(s)+\mu s)}ds}\right]$$

$$\begin{aligned}
&= E_0^\mu \left[e^{-\beta \int_0^t 1_{0-}(B(s))ds} \right] = E_0 \left[e^{\mu B(t) - \frac{1}{2} \mu^2 t} e^{-\beta \int_0^t 1_{0-}(B(s))ds} \right] \\
&= \int_0^t e^{-\beta s} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_s^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}v}}{v^{\frac{3}{2}}} dv \left(\sqrt{2}\mu + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{t-s}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}u}}{u^{\frac{3}{2}}} du \right) \\
&= \int_0^t e^{-\beta s} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_s^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}v}}{v^{\frac{3}{2}}} dv \left(2\mu + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t-s}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}u}}{u^{\frac{3}{2}}} du \right)
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
&P_0 \left(\int_0^t 1_{0-}(B(s) + \mu s) ds < y \right) \\
&= \int_0^y \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_s^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}v}}{v^{\frac{3}{2}}} dv \left(2\mu + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t-s}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}u}}{u^{\frac{3}{2}}} du \right) ds \\
& \quad (= \phi(t, \mu, y) \text{ とおく.}) \\
&A(t, x) = \frac{1}{t} \int_0^t 1_{(B(s) + \mu s < x)}(s) ds \text{ を考える.}
\end{aligned}$$

$x > 0, 0 < y < 1$ とし,

$$P_0(A(t, x) > y)$$

$$\begin{aligned}
&= P_0 \left(\int_0^t 1_{(B(s) + \mu s < x)}(s) ds > ty \right) \\
&= P_0(\text{時刻 } 0 \text{ と } t \text{ の間で } B_s + \mu s \text{ が } x \text{ に時刻 } \tau \text{ で初めて到達し, 残りの } t - \tau \\
& \quad \text{時間内で } x \text{ の下側にいる時間が } ty - \tau \text{ 以上}) \\
&= \int_0^t h_x^\mu(s) P_x \left(\int_0^{t-s} 1_{(B(u) + \mu u < x)}(u) du > ty - s \right) ds \\
&= \int_0^t h_x^\mu(s) P_0 \left(\int_0^{t-s} 1_{(B(u) + \mu u < 0)}(u) du > ty - s \right) ds \\
&= \int_0^t h_x^\mu(s) P_0 \left(A(t-s, 0) > \frac{ty-s}{t-s} \right) ds \\
&= \int_0^t h_x^\mu(s) (1 - \phi(t-s, \mu, ty-s)) ds
\end{aligned}$$

ここで, $h_x^\mu(s)$ は, $B(s) + \mu s, (B(0) = 0)$ が, はじめて x に到達する時間 τ の確率分布密度関数で,

$$h_x^\mu(s) = \frac{|x|}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{1}{2s}(|x| - \mu s)^2} \text{ は, 良く知られている. ([4], [6])}$$

以下は、リスク中立測度のもとで、株価の満たす確率微分方程式を2節と同じように $dS(t)=rS(t)dt+\sigma S(t)dB(t)$ として、 $m(t, \alpha)$ の確率分布密度関数を以下のようにして求める。

$$\begin{aligned}
 P(m^S(T, \alpha) > x | S(0) = c) \\
 &= P_{(0, c)}(m^S(T, \alpha) > x) \\
 &= P_{(0, c)}(A^S(T, x) > \alpha) \\
 &= P_0\left(\frac{1}{T} \int_0^T 1_{\left(\alpha e^{B(t)} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t < \frac{1}{\sigma} \log\left(\frac{x}{c}\right)\right)}(t) dt > \alpha\right) \\
 &= P_0\left(\frac{1}{T} \int_0^T 1_{\left(B(t) + \left(\frac{r}{|\sigma|} - \frac{1}{2}|\sigma|\right)t < \frac{1}{|\sigma|} \log\left(\frac{x}{c}\right)\right)}(t) dt > \alpha\right) \\
 &= P_0\left(A\left(T, \frac{1}{|\sigma|} \log\left(\frac{x}{c}\right)\right) > \alpha\right), \\
 &= \int_0^T h^{\frac{r}{|\sigma|} - \frac{1}{2}|\sigma|}\left(s\right) \left(1 - \phi\left(T - s, \frac{\mu}{|\sigma|} - \frac{1}{2}|\sigma|, Ty - s\right)\right) ds.
 \end{aligned}$$

後は、両辺を微分して確率分布密度関数 $g_{m(T, \alpha)}(x)$ を求めて、オプション価格式は、

$$\begin{aligned}
 &e^{-rT} E_{(0, c)}[\max(m(T, \alpha) - K, 0)] \\
 &= e^{-rT} \int_K^{+\infty} \max(x - K, 0) g_{m(T, \alpha)}(x) dx
 \end{aligned}$$

注意

途中式で、 $B(t), \int_0^t 1_{0-}(B(s))ds$ の2次元同時分布がラプラス変換の形ではあるが、求まっていることに注意する。これの逆変換は非常に複雑そうである。またドリフト付の場合にもこのような同時分布がわかると他のペイオフを持つオプションの価格式がもとめられるのだが、さらに込み入った形になりそうである。

参考文献

- [1] Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1972) Handbook of Mathematical functions, Dover, U. S. A.
- [2] Akahori, J. (1995) Some formulae for a new type of path-dependent option. Ann. Appl. Probab. 5, 383-388.

- [3] Dassios, A. (1995) The distribution of the quantile of a Brownian motion with drift and the pricing of related path-dependent options. *Ann. Appl. Probab.* **5**, 389-398.
- [4] 藤田岳彦 (1995) 拡散過程講義, Quick 総研での報告ノート.
- [5] Ito, K. and McKean, H. P., Jr. (1974) *Diffusion Processes and Their Sample Pathes*. Springer-Verlag, Berlin.
- [6] Karatzas, I., and Schreve, S. E. (1988) *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- [7] Miura, R. (1992) A note on look-back option based on order statistics. *Hitotsubashi Journal of Commerce and Management* **27**, 15-28.
- [8] 三浦良造 (1992) 順序統計量にもとづくルックバック・オプション: 試論 一橋論叢 第107巻 第5号 650-664.

(一橋大学助教授)