連立方程式系の認定可能条件

磯　野　修

連立方程式系の認定可能性については，すでに多くの研究があるが，[1] 問題を簡単化し，実際の推定に際して使い易い形にするために，なお改善すべき点が残されている．

本論文では，認定可能性の定義として，連立方程式系の場合について特殊なものを用いることなく，一般的に使用できる形のものを紹介し（§ 1），誘導形の認定可能性を前提することによって，連立方程式系の認定問題を一般的な認定問題から切り離して考え，これにもとづいて，すでに得られている諸結果をきわめて簡明に導出する（§ 2）．最後に，構造方程式係数のほか，撹乱項の分散・共分散について制約条件がある場合の認定可能性について述べる（§ 3）．

§ 1　認定可能性の定義

定義 1　N 次元確率変数 X は，離散型または連続型の確率変数とし，その確率（密度）関数を $f(x;\ \theta)$ で示す．ただし，θ は r 次元母数ベクトルで，母数空間を Ω と書く．X の分布の型は，すべての $\theta\in\Omega$ に対して同一であって，ある $\theta_1\in\Omega$ に対して離散型，他の $\theta_2\in\Omega$ に対して連続型となることはないものとする．

ある $\Omega_0\subset\Omega$ が与えられたとき，

$$D=\bigcup_{\theta\in\Omega_0}\{x:\ f(x;\ \theta)>0\} \qquad (1)$$

とおく．

任意の $\theta_1 \in \Omega_0$, $\theta_2 \in \Omega_0$ に対して,

$$f(x;\ \theta_1)=f(x;\ \theta_2), \quad \forall x \in D$$
$$\Longrightarrow \quad \theta_1=\theta_2$$

が成立するとき，未知母数ベクトル θ は，$\theta \in \Omega_0$ のときに認定可能であるという．とくに $\Omega_0=\Omega$ の場合には，単に任意の θ は認定可能であるという．

ある特定ベクトル θ_0 の認定可能性は，つぎのように定義する．

定義 2 ある特定の $\theta_0 \in \Omega$ と，θ_0 を含むある集合 $\Omega_0 \subset \Omega$ が与えられたとき，この Ω_0 によって (1) の集合 D を定義する．

任意の $\theta_1 \in \Omega_0$ に対して,

$$f(x;\ \theta_0)=f(x;\ \theta_1), \quad \forall x \in D$$
$$\Longrightarrow \quad \theta_0=\theta_1$$

が成立するとき，与えられた母数ベクトル θ_0 は，Ω_0 において認定可能であるという．とくに $\Omega_0=\Omega$ の場合には，単に特定の θ_0 は認定可能であるという．

上の定義 1 と定義 2 において，$\Omega_0=\Omega$ のときに大域的に認定可能，Ω_0 がある点の近傍のときに局所的に認定可能とよぶことがある．

定義 3 定義 1 の記号のもとで，母数ベクトル θ のベクトル関数 $\zeta(\theta)$ を考え，$\zeta(\theta)$ の次元を s とする．

(1) の集合 D を考え，任意の $\theta_1 \in \Omega_0$, $\theta_2 \in \Omega_0$ に対して,

$$f(x;\ \theta_1)=f(x;\ \theta_2), \quad \forall x \in D$$
$$\Longrightarrow \quad \zeta(\theta_1)=\zeta(\theta_2)$$

が成立するとき，ベクトル関数 $\zeta(\theta)$ は，$\theta \in \Omega_0$ のときに認定可能であるという．とくに $\Omega_0=\Omega$ の場合には，単に $\zeta(\theta)$ は認定可能であるという．

同じように定義 2 に対応して,

定義 4 定義 2 の記号のもとで，定義 2 の Ω_0 によって (1) の集合 D を定める．

任意の $\theta_1 \in \Omega_0$ に対して,

$$f(x;\ \theta_0)=f(x;\ \theta_1), \quad \forall x \in D$$
$$\Longrightarrow \quad \zeta(\theta_0)=\zeta(\theta_1)$$

が成立するとき，与えられた s 次元ベクトル $\zeta(\theta_0)$ は，θ の集合 Ω_0 について認定可能であるという．とくに $\Omega_0=\Omega$ の場合には，単に $\zeta(\theta_0)$ は認定可能であるという．

定義 3，定義 4 のベクトル関数 $\zeta(\theta)$ の認定問題の例としては，θ の成分のうち一部分だけの認定可能性を考

える場合や，統計でいう推定可能関数の認定可能性を扱う場合をあげることができる．

例 1 k 次元確率変数 X が，期待値 μ，分散行列 Σ の k 次元正規分布にしたがうとき，母数 (μ, Σ) の母数空間を Ω とし，定義 1 の $\Omega_0=\Omega$ とおく．

(i) $\operatorname{rank}\Sigma=k$ ならば，母数ベクトル $\theta\in\Omega$ は，$r=\dfrac{k+k(k+1)}{2}$ 次元である．また，X の確率密度関数は，

$$f(x;\ \mu, \Sigma)$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^k\frac{1}{\sqrt{\det\Sigma}}\exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\right]$$

であるから，二組の母数ベクトルを (μ_i, Σ_i) $(i=1, 2)$ とするとき，

$$\log f(x;\ \mu_1, \Sigma_1)=\log f(x;\ \mu_2, \Sigma_2)$$

から，

$$(x-\mu_1)'\Sigma_1^{-1}(x-\mu_1)-(x-\mu_2)'\Sigma_2^{-1}(x-\mu_2)$$
$$=-[\log(\det\ \Sigma_1)-\log(\det\ \Sigma_2)] \qquad (2)$$

が導かれる．

k 次元ユークリッド空間を $\mathcal{R}_k$ と書くとき，(1) の集合 $D=\mathcal{R}_k$ であり，(2) の等式がすべての $x\in\mathcal{R}_k$ に対して成立するならば，これを x で偏微分することにより，

$$\Sigma_1^{-1}(x-\mu_1)=\Sigma_2^{-1}(x-\mu_2)$$

が，任意の $x\in\mathcal{R}_k$ について成立する．これから $\mu_1=\mu_2$, $\Sigma_1=\Sigma_2$ が導かれて，未知母数 (μ, Σ) は，Ω の全域において認定可能である．

(ii) $0<\operatorname{rank}\ \Sigma=k_1<k$ ならば，X の成分のうち 1 次独立なものが k_1 個存在する．[2] これらが X のはじめの k_1 個であるとしても一般性を失わない．X をはじめの k_1 個の成分と残りの $k-k_1$ 個の成分とに分割して $X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$ とし，この分割に対応して $\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix}$, $\Sigma=\begin{pmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\\Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{pmatrix}$ とすれば，X_1 は期待値 μ_1，分散行列 Σ_{11} の k_1 次元正規分布にしたがう．

このとき上段 (i) に述べたところから，(μ_1, Σ_{11}) は，そのとり得る値の集合全体にわたって認定可能である．

また，既知定数から成る k 次元行ベクトル l によって，1 次元確率変数 lX を作れば，これは期待値 $l\mu$，分散 $l\Sigma l'$ の 1 次元正規分布にしたがい，これら 2 個の母数は認定可能となる．lX は統計で推定可能関数とよ

ばれるものにほかならない.

例 2　T 次元確率変数 Y が，期待値 $X\beta$，分散行列 Σ の T 次元正規分布にしたがうものとする.[3] ただし，X は $T\times p$ 型（$T\geqq p$）の既知定数行列，β は p 次元の未知母数ベクトルで，

$$\operatorname{rank}\Sigma=T \tag{3}$$

とする．このとき，母数 (β,Σ) についての母数空間 Ω の次元は，$r=p+\dfrac{T(T+1)}{2}$ である.

条件 (3) があるため，例 1 (i) の場合と同じようにして，$(\beta_i,\Sigma_i)(i=1,2)$ に対して，対数尤度関数の相等性から

$$X\beta_1=X\beta_2,\qquad \Sigma_1=\Sigma_2 \tag{4}$$

が導かれる．したがって，Σ はつねに認定可能である.

(i)　$\operatorname{rank}X=p$ ならば，(8) の第 1 式の左から $(X'X)^{-1}X'$ をかけることにより，$\beta_1=\beta_2$ を得るから，β も認定可能である.

(ii)　$0<\operatorname{rank}X=q<p$ ならば，X の列ベクトルのなかに 1 次独立なものが q 個存在し，それに対応する β の成分 q 個が認定可能になる.

§2　係数についての条件による連立方程式系の認定可能性

慣例にならい，連立方程式系の記号を，つぎのように定める.

定義 5　つぎの確率模型を，経済の連立方程式系の構造形表示とよぶ.

$$BY+\Gamma X=U \tag{5}$$

$$By_t+\Gamma x_t=u_t,\quad (t=1,2,\cdots\cdots,T) \tag{6}$$

これら 2 式にあらわれる記号について，つぎの前提条件をおく.

(a)　内生変数の個数は G，先決変数の個数は K，観測個数は T であって，$T>G$.

B は，階数 G の $G\times G$ 型の未知定数行列.

Γ は，$G\times K$ 型の未知定数行列.

(b)　時点 $t=1,2,\cdots\cdots,T$ における内生変数列ベクトルを $y_t=\begin{pmatrix}y_{1t}\\y_{2t}\\\vdots\\y_{Gt}\end{pmatrix}$，先決変数列ベクトルを $x_t=\begin{pmatrix}x_{1t}\\x_{2t}\\\vdots\\x_{Kt}\end{pmatrix}$，撹

乱項列ベクトルを $u_t=\begin{pmatrix}u_{1t}\\u_{2t}\\\vdots\\u_{Gt}\end{pmatrix}$ とし，

$Y=(y_1, y_2, \cdots\cdots, y_T)$ は，$G\times T$ 型の内生変数行列，

$X=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_T)$ は，$K\times T$ 型の先決変数行列，

$U=(u_1, u_2, \cdots\cdots, u_T)$ は，$G\times T$ 型の攪乱項行列．

(c) $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_T$ は無相関な確率変数列で，$t=1, 2, \cdots\cdots, T$ に対して

$$E(u_t)=0, \qquad Var(u_t)=\Sigma \tag{7}$$

であって，rank $\Sigma\leqq G$.

定義 6 (5) ないし (6) から導かれる，つぎの形を連立方程式系の誘導形表示とよぶ．

$$Y=\Pi X+W$$

$$y_t=\Pi x_t+w_t, \quad (t=1, 2, \cdots\cdots, T)$$

ただし，
$$\Pi=-B^{-1}\Gamma, \qquad -B\Pi=\Gamma \tag{8}$$
$$W=B^{-1}U, \qquad BW=U$$

ここで，
$$w_t=B^{-1}u_t, \quad (t=1, 2, \cdots\cdots, T) \tag{9}$$

$W=(w_1, w_2, \cdots\cdots, w_T)$ とおく．

なお，$Var(w_t)=\Psi$ とおけば，(7) (9) から

$$E(w_t)=0, \quad Var(w_t)=\Psi=B^{-1}\Sigma(B^{-1})'$$

あるいは，
$$B\Psi B'=\Sigma \tag{10}$$

が導かれる．

経済の連立方程式系の認定問題を考えるとき，誘導形についての認定可能性は，回帰理論における統計学一般の問題として扱うこととし，経済の連立方程式系固有の問題としては，構造形表示の母数の認定可能性だけを取りあげて，これをつぎのように定式化すれば，議論がきわめて簡明になる．[4]

定義 7 連立方程式系の誘導形表示における母数 (Π, Ψ) の認定可能性を前提したうえで，構造形表示の母数 (B, Γ, Σ) の一部または全部についての認定可能性を論ずる問題を，経済の連立方程式系についての認定問題とよぶ．

定義 8 (B, Γ, Σ) の第1行を

$$(\beta, \gamma, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \cdots\cdots, \sigma_{1G}) \tag{11}$$

と記すとき，(Π, Ψ) の認定可能性を前提したうえで，(11) の一部または全部についての認定可能性を論ずる問題を，第1方程式についての認定問題とよぶ．

命題 1 (i) B が認定可能ならば，Γ および Σ は

認定可能である．

(ii) β が認定可能ならば，γ および σ_{11} は認定可能である．

証明 (i) は，(8) (10) の $\Gamma=-B\Pi$, $\Sigma=B\Psi B'$ から明らか．

(ii) は，$\gamma=-\beta\Pi$, $\sigma_{11}=\beta\Psi\beta'$ から明らか． (終)

この命題により，本論文で定義した形で連立方程式系の認定問題をとり扱う場合には，構造方程式係数の認定可能性について考えれば足りることになる．以下では，第1方程式の係数の認定問題について，すでに知られている結果が，きわめて簡単に導かれることを示す．

命題 2 (階数条件) 第1方程式の認定問題において，その係数ベクトル (β,γ) の間に，既知定数を係数とする R 個の独立な線型制約条件が存在し，これはつぎの式によって示されるものとする．

$$(\beta,\gamma)\Phi=\lambda \tag{12}$$

ここで Φ は既知定数から成る階数 R の $(G+K)\times R$ 型の行列，λ は R 次元の既知定数列ベクトルとする．

なお，いわゆる基準化の規則——β の成分のうち特定番号のもの一つを，つねに1に等しいとおく——も，上の制約条件に含めて考えるものとする．

以上の前提条件のもとで，(β,γ) が認定可能となるための必要十分条件は，

$$\mathrm{rank}[(B,\Gamma)\Phi]=G \tag{13}$$

である．

証明 (8) から $-\beta\Pi=\gamma$．これを (12) に代入して，

$$\beta(I_G,-\Pi)\Phi=\lambda \tag{14}$$

ただし，I_G は G 次元の単位行列とする．

基準化の規則も条件式 (12) に含めて考えているから，λ はゼロ・ベクトルではない．Π,Φ,λ が既知のとき，(14) から β が一意的に定まるための必要十分条件は，

$$\mathrm{rank}[(I_G,-\Pi)\Phi]=G \tag{15}$$

である．B が正則行列であるから，

(15) の左辺 $=\mathrm{rank}[B(I_G,-\Pi)\Phi]$

$=$(13) の左辺

が出る．

さらに，β が一意的に定まれば，γ も一意的に定まることは，命題1 (ii) で述べた．

以上から，求める結果が出る． (終)

上の命題2の記号 Φ は，第1方程式についての制約

条件を示すものであって，対象とする方程式が異なるとともに異なる行列となることを注意しておく．

この命題と定義1〜4との関係を示せば，つぎの通りである．

第1方程式の係数ベクトル β の認定可能性について考えるとき，これは G 次元ベクトルであるから，何ら制約条件がなければ，G 次元ユークリッド空間 $\mathcal{R}_G$ 内の任意の値をとり得る．しかし，基準化の規則によって，そのうちの特定成分が1に等しいとされ，そのほかに $R-1(\geqq 0)$ 個の独立な線型制約条件があるために，β のとり得る値は，$G-R$ 次元の部分線型空間に限定される．もとの $\mathcal{R}_G$ が定義1〜4の Ω に，$G-R$ 次元の部分空間が Ω_0 に相当する．

命題 2の系 （次数条件） 命題2の条件（12）のもとで (β, γ) が認定可能ならば，

$$R \geqq G \tag{16}$$

が成立する．

証明 $R=\mathrm{rank}\,\Phi \geqq \mathrm{rank}[(B, \Gamma)\Phi]=G$ （終）

計量経済学の教科書では，いわゆる基準化の規則を制約条件（12）に含めない扱いをすることが多いので，よく知られている結果と，本稿の結果との関係を示しておく．

定義 9 第1方程式の認定問題を扱う．内生変数の番号をつけかえることにより，β の第1成分を1に等しいとおく基準化の規則を設ける．このとき（12）左辺の Φ の第1列を $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ とすれば，右辺の λ の第1成分は1となる．Φ の第2列以下から成る $(G+K)\times(R-1)$ 型の定数行列を記号 φ で示す．

(1) λ の第2成分以下がすべて0の場合を，同次型のゼロ制約，

(2) λ の第2成分以下に，少くとも一つ0でないものが含まれる場合を，非同次型のゼロ制約とよぶ．

この定義9では β の第1成分を1としているが，これはある特定番号の成分を1とするという条件でもよい．しかし，1とすべき成分の番号が予め指定されていることは大切であって，どの番号でもよいから，少くとも一つの成分を1にするという条件とは違う．

定義9の同次型・非同次型の区別は，つぎの事情に由来する．

定義9（1）の場合には，（14）はつぎの形をとる．

$$\beta(I_G, -\Pi)\left(\begin{array}{c:c} 1 & \\ 0 & \\ \vdots & \varphi \\ 0 & \end{array}\right)=(1, \overbrace{0, \cdots\cdots, 0}^{R-1\text{個}}) \qquad (17)$$

β の第1成分が1という条件を既知とすれば，この条件は，

$$\beta(I_G, -\Pi)\varphi=(\overbrace{0, \cdots\cdots, 0}^{R-1\text{個}})$$

と同等になって，β を未知ベクトルとする同次型の連立方程式を得る．

同じようにして，定義9（2）の場合には，

$$\beta(I_G, -\Pi)\varphi=(\overbrace{*, \cdots\cdots, *}^{R-1\text{個}})$$

という非同次型の連立方程式を得る．ただし，ここで右辺の（$*, \cdots\cdots, *$）のなかには，少くとも一つ0でない成分が含まれるものとする．

定義9の記号を使って（13）を書きかえることにより，つぎの（18）を得る．次数条件の方は（16）そのままであって，便宜上階数条件と並べて記したにすぎない．

命題 3　定義9（1）（2）のいずれの場合についても，つぎの結果が成立する．

階数条件　　$\operatorname{rank}\left[(B, \Gamma)\left(\begin{array}{c:c} 1 & \\ 0 & \\ \vdots & \varphi \\ 0 & \end{array}\right)\right]$

$$=\operatorname{rank}[b \,\vdots\, (B, \Gamma)\varphi]=G \qquad (18)$$

ただし，b は行列 B の第1列を示すものとする．

次数条件　　$R \geqq G$

計量経済学の教科書で親しまれている結果を導くための準備として，

定義 10　第1方程式の認定問題において，つぎの前提条件がみたされているとき，これを最も簡単な同次型のゼロ制約とよぶ．

（a）　β の第1成分は1に等しい．

（b）　第1方程式に含まれる内生変数の個数は G_1（$\geqq$1）個，同じく第1方程式に含まれる先決変数の個数は K_1（$\geqq$0）個である．

（c）　内生変数および先決変数の番号を適当につけ変えることにより，

$$\beta=(1,\beta_2,\beta_3,\cdots\cdots,\beta_{G1},\overbrace{0,\cdots\cdots,0}^{G_2\text{個}})$$

$$\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots\cdots,\gamma_{K1},\overbrace{0,\cdots\cdots,0}^{K_2\text{個}})$$

となる．ただし，$G=G_1+G_2$，$K=K_1+K_2$ であって，$G>G_2\geqq 0$, $K\geqq K_2\geqq 0$.

(d) 上記以外には，(β,γ) の成分の間に，何ら制約条件が存在しない．

この定義の制約条件を (12) の形であらわすには，λ の第1成分を1，それ以外の成分をすべて0とおき，行列 Φ の階数 R とその形を，つぎのように定めればよい．

$$R-1=G_2+K_2 \tag{19}$$

$$\underset{(G+K)\times R}{\Phi}=\left(\begin{array}{c:c} 1 & \\ 0 & \\ \vdots & \varphi \\ 0 & \end{array}\right) \tag{20}$$

$$=\left(\begin{array}{c:cc} 1 & O_{G_1\times G_2} & O_{G_1\times K_2} \\ 0 & I_{G_2} & O_{G_2\times K_2} \\ \vdots & O_{K_1\times G_2} & O_{K_1\times K_2} \\ 0 & O_{K_2\times G_2} & I_{K_2} \end{array}\right) \tag{21}$$

ここで，O はゼロ行列，I は単位行列であり，添字は行列のサイズを示す．

命題 4 定義10の前提条件が成立するとき，

$$(B,\Gamma)=\left(\begin{array}{c:c:c:c:c} 1 & \beta_2\cdots\cdots\beta_{G1} & 0\cdots\cdots0 & \gamma_1\cdots\cdots\gamma_{K1} & 0\cdots\cdots0 \\ \hdashline b_2 & & & & \\ \vdots & B_1 & B_0 & \Gamma_1 & \Gamma_0 \\ b_G & & & & \end{array}\right) \tag{22}$$

と書けば，第1方程式について認定可能の

階数条件は，

$$\begin{aligned} &\mathrm{rank}[(B,\Gamma)\varphi] \\ &=\mathrm{rank}(B_0,\Gamma_0)=G-1 \end{aligned} \tag{23}$$

次数条件は，

$$K_2\geqq G_1-1 \tag{24}$$

となる．

ただし，$G_2=K_2=0$ の場合には，(23) 左辺の階数の値を0とおくものとする．また，(22) 右辺の行列の第1列は，行列 B の第1列 b の成分を示す．

証明 いまの場合，(18) にあらわれる行列は，(21) (22) によって

$$\left(\begin{array}{c:c} 1 & \\ b_2 & \\ \vdots & (B,\Gamma)\varphi \\ b_G & \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c:c:c} 1 & 0\cdots\cdots0 & 0\cdots\cdots0 \\ \hdashline b_2 & & \\ \vdots & B_0 & \Gamma_0 \\ b_G & & \end{array}\right)$$

と計算されるから，条件 (18) は (23) と同値になる．

(24) は，(16) (19)から明らか． (終)

つぎの結果も，計量経済学の教科書に必らず記されていることがらである．

命題 5 定義 10 の前提条件が成立するとき，誘導形表示の係数行列 Π を，はじめの G_1 行と残りの G_2 行，はじめの K_1 列と残りの K_2 列とによって分割したものを，

$$\Pi=\begin{pmatrix}\Pi_{11} & \Pi_{12}\\ \Pi_{21} & \Pi_{22}\end{pmatrix} \tag{25}$$

と記せば，階数条件 (23) は，つぎの条件と同値である．

$$\mathrm{rank}(\Pi_{12})=G_1-1 \tag{26}$$

ただし，$K_2=0$ の場合には，この式の左辺の値は 0 とする．

証明　行列 B の正則性と，(20) (21) の φ の形から

$$\mathrm{rank}[(B,\Gamma)\varphi]=\mathrm{rank}[(I_G, B^{-1}\Gamma)\varphi]$$
$$=\mathrm{rank}[(I_G, -\Pi)\varphi]$$
$$=\mathrm{rank}\left[\begin{pmatrix}I_{G_1} & O & -\Pi_{11} & -\Pi_{12}\\ O & I_{G_2} & -\Pi_{21} & -\Pi_{22}\end{pmatrix}\varphi\right]$$
$$=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}O & -\Pi_{12}\\ I_{G_2} & -\Pi_{22}\end{pmatrix}=G_2+\mathrm{rank}(\Pi_{12})$$

と計算され，他方，$G-1=G_1+G_2-1$ であるから，(23) と (26) が同等になる． (終)

以上は計量経済学の教科書でよく出あう結果であるが，以下では，定義 9 (2) の非同次型のゼロ制約の場合の命題 3 の応用例として，外部情報を援用する場合の認定可能性について述べる．これは定義 9 のゼロ制約条件のもとで計測を行うとき，(β,γ) の成分のうちのいくつかを他の情報から推定し，この推定値は与えられたものとみなして，残りの係数の推定を行う場合である．これをつぎのように定式化する．

定義 11 第 1 方程式の認定問題において，つぎの前提条件がみたされているとき，これを最も簡単な非同次型のゼロ制約とよぶ．

(a) β の第 1 成分は 1 に等しい．

(b) 第 1 方程式に含まれる内生変数の係数のうち，

$\beta_2, \beta_3, \cdots\cdots, \beta_{G1}$ の $G_1-1(\geqq 0)$ 個と，先決変数の係数のうち，$\gamma_1, \gamma_2, \cdots\cdots, \gamma_{K1}$ の $K_1(\geqq 0)$ 個については，推定にあたって何ら事前の情報は存在しない.

(c) $G_2=G-G_1\geqq 0$, $K_2=K-K_1\geqq 0$ とおくとき，つぎの4条件が成立する.

(イ) $G_2+K_2\geqq 1$.

(ロ) (a) と (b) に述べた G_1 個以外の G_2 個の内生変数の係数のうち，G_0 ($\geqq 0$) 個の係数は他の情報から既知であって，その値は0ではない.[5] 残りの G_2-G_0 ($\geqq 0$) 個の内生変数は，第1方程式にあらわれない.

(ハ) (b) に述べた K_1 個以外の K_2 個の先決変数の係数のうち，K_0 ($\geqq 0$) 個の係数は他の情報から既知であって，その値は0ではない．残りの K_2-K_0 ($\geqq 0$) 個の先決変数は，第1方程式にあらわれない.

(ニ) $G_0+K_0\geqq 1$.

(d) 上記以外には，(β, γ) の成分の間に，何ら制約条件が存在しない.

命題 6 定義11の前提条件が成立するとき，定義11 (b)(c) で定めた G_1, G_2, K_1, K_2 を使って，(20) (21) の Φ, φ と，(25) の Π_{12} とを定め，

$$(B, \Gamma)=\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & \beta_2\cdots\cdots\beta_{G1} & *\cdots\cdots* & \gamma_1\cdots\cdots\gamma_{K1} & *\cdots\cdots* \\ \hline b_2 & & & & \\ \vdots & B_1 & B_* & \Gamma_1 & \Gamma_* \\ b_G & & & & \end{array}\right) \tag{27}$$

とおく．ただし，上式右辺第1行にあらわれる G_2+K_2 個の＊印は，(c)の(ロ)(ハ)に述べた G_0 個の β_i と K_0 個の γ_j については，他の情報から得られる0でない値を示し，その他の β_i と γ_j とについては0を示すものとする.

この記号のもとで，

階数条件は，

$$\mathrm{rank}\left[(B, \Gamma)\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ 0 & \\ \vdots & \varphi \\ 0 & \end{array}\right)\right]$$

$$=\mathrm{rank}\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & *\cdots\cdots* & *\cdots\cdots* \\ \hline b_1 & & \\ \vdots & B_* & \Gamma_* \\ b_2 & & \end{array}\right)=G \tag{28}$$

または，

$$\mathrm{rank}\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ 0 & \\ \vdots & \Pi_{12} \\ 0 & \end{array}\right)=G_1 \tag{29}$$

次数条件は，

$$K_2 \geqq G_1 - 1 \tag{30}$$

となる．

証明　いま考えているケースは，定義9（2）の非同次型のゼロ制約の場合に相当し，（12）は

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_G, \gamma_1, \cdots\cdots, \gamma_K)\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ 0 & \\ \vdots & \varphi \\ 0 & \end{array}\right) = \lambda,$$

$$\lambda = (1, \overbrace{* \cdots\cdots *}^{G_2 + K_2 \text{個}})$$

となるから，(B, Γ) は（27）右辺のようにあらわされる．したがって（18）は（28）の形をとる．

また，行列 B の正則性と，（20）（21）の φ の形から

$$\mathrm{rank}\left[(B, \Gamma)\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ 0 & \\ \vdots & \varphi \\ 0 & \end{array}\right)\right]$$

$$= \mathrm{rank}\left[(I_G, -\Pi)\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ 0 & \\ \vdots & \varphi \\ 0 & \end{array}\right)\right]$$

$$= \mathrm{rank}\left(\begin{array}{c|cc} 1 & O & -\Pi_{12} \\ 0 & & \\ \vdots & I_{G_2} & -\Pi_{22} \\ 0 & & \end{array}\right)$$

$$= G_2 + \mathrm{rank}\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ 0 & \\ \vdots & \Pi_{12} \\ 0 & \end{array}\right)$$

と，$G = G_1 + G_2$ を使って，（28）から（29）が出る．

（30）は（24）と同じ．　　　　　　　　　　（終）

例 3　（蜘蛛の巣定理の場合）　$t = 1, 2, \cdots\cdots, T$ 期の需要量を Q_t，価格を P_t，$a_i, b_i (i = 0, 1)$ を未知母数として，

需要方程式　$Q_t = a_0 + a_1 P_{t-1} + u_{1t}$

供給方程式　$P_t = b_0 + b_1 Q_t + u_{2t}$

から成る連立方程式系を考える．

内生変数は Q_t, P_t の $G = 2$ 個，先決変数は定数項と P_{t-1} の $K = 2$ 個である．

$y_t = \begin{pmatrix} Q_t \\ P_t \end{pmatrix}$，$x_t = \begin{pmatrix} 1 \\ P_{t-1} \end{pmatrix}$，$u_t = \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$ とおくとき，与えられた連立方程式系は，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b_1 & 1 \end{pmatrix} y_t + \begin{pmatrix} -a_0 & -a_1 \\ -b_0 & 0 \end{pmatrix} x_t = u_t$$

となるから，

$$(B,\Gamma)=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -a_0 & -a_1 \\ -b_1 & 1 & -b_0 & 0 \end{array}\right),$$

$$\Pi=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_0b_1+b_0 & a_1b_1 \end{pmatrix}.$$

(i) 需要方程式については，

（イ） 追加情報が存在しない通常の場合は，$G=2$, $G_1=G_2=1$, $K=K_1=2$, $K_2=0$ であって，$B_0=(1)$. Γ_0 と Π_{12} は存在しない.

(23) は，$1=G-1$,　(26) は，$0=G_1-1$ となって成立し，需要方程式は認定可能.

（ハ） 他の情報から a_0 の推定値 $\hat{a}_0\neq 0$ が与えられた場合には，$G=2, G_1=G_2=1, G_0=0, K=2, K_1=K_2=K_0=1$.

(28) は，$\quad \mathrm{rank}\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & -\hat{a}_0 \\ \hline -b_1 & 1 & -b_0 \end{array}\right)=2=G$

(29) は，$\quad \mathrm{rank}(1 \mid a_1)=1=G_1$

となって成立し，需要方程式は認定可能.

（ハ） 他の情報から a_1 の推定値 $\hat{a}_1\neq 0$ が与えられた場合にも，同じようにして需要方程式は認定可能.

(ii) 供給方程式については，

（イ） 追加情報が存在しない通常の場合は，$G=G_1=2, G_2=0, K=2, K_1=K_2=1$.

(23) の左辺$=\mathrm{rank}(0,\ -a_1)=1=G-1$

(26) の左辺$=\mathrm{rank}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_1b_1 \end{pmatrix}=1=G_1-1$

が成立するのは $a_1\neq 0$ の場合に限るから，$a_1\neq 0$ のときに供給方程式は認定可能.

（ロ） 他の情報から b_0 の推定値 $\hat{b}_0\neq 0$ が与えられた場合には，$G=G_1=2, G_2=G_0=0, K_1=0, K=K_2=2, K_0=1$.

(28) の左辺$=\mathrm{rank}\left(\begin{array}{c|cc} 0 & -a_0 & -a_1 \\ \hline 1 & -\hat{b}_0 & 0 \end{array}\right)$

(29) 左辺$=\mathrm{rank}\left(\begin{array}{c|cc} 0 & a_0 & a_1 \\ 1 & a_0b_1+\hat{b}_0 & a_1b_1 \end{array}\right)$

となるから，$a_0\neq 0$ または $a_1\neq 0$ のいずれか一つが成立するとき，供給方程式は認定可能.

（ハ） 他の情報から b_1 の推定値 $\hat{b}_1\neq 0$ が与えられた場合には，同じように (28) または (29) を使って，供給方程式はつねに認定可能.

例 4 （コブ・ダグラス生産関数） $t=1, 2, \cdots\cdots, T$ 期の産出量を O_t, 労働投入量を L_t, 資本使用量を K_t とし，これらの間に c, α, β を正の定数として

$$O_t = cL_t^{\alpha}K_t^{\beta}$$

という関係が存在するものとする．

別に，γ を正の定数として

$$O_t/L_t = \gamma$$

という関係を想定しよう．

これら 2 式から成る連立方程式系において，当面 O_t, L_t を内生変数，K_t を外生変数とみなす．

各式の対数をとり，

$$y_t = \begin{pmatrix} \log O_t \\ \log L_t \end{pmatrix}, \qquad x_t = \begin{pmatrix} 1 \\ \log K_t \end{pmatrix}$$

$$\log c = a_0, \quad \log \gamma = b_0, \quad u_t = \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

とおけば，$G=K=2$ であって，

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ -1 & 1 \end{pmatrix} y_t + \begin{pmatrix} -a_0 & -\beta \\ -b_0 & 0 \end{pmatrix} x_t = u_t,$$

$$(B, \Gamma) = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & -\alpha & -a_0 & -\beta \\ -1 & 1 & -b_0 & 0 \end{array}\right).$$

ここで B の正則性から，$\alpha \neq 1$ を前提すると，

$$\Pi = \frac{1}{1-\alpha}\begin{pmatrix} a_0 + \alpha b_0 & \beta \\ a_0 + b_0 & \beta \end{pmatrix}$$

を得る．

以下では，α, β に対して何ら制約条件がない場合と，$\alpha+\beta=1$ という条件がある場合とについて，第 1 方程式（生産関数）の係数 α, β の認定可能性を考える．

(i)　α, β に対して条件がないとき．

（イ）　追加情報が存在しない通常の場合．　$G=G_1=2$, $G_2=0$, $K=K_1=2$, $K_2=0$.

(23) または (26) により認定可能．

（ロ）　他の情報から a_0 の推定値 $\hat{a}_0 \neq 0$ が与えられた場合．　$G=G_1=2$, $G_2=G_0=0$, $K=2$, $K_1=K_2=K_0=1$.

$$(28)\text{ の左辺} = \operatorname{rank}\left(\begin{array}{c:c} 1 & -\hat{a}_0 \\ \hdashline -1 & -b_0 \end{array}\right)$$

$$(29)\text{ の左辺} = \operatorname{rank}\left(\begin{array}{c:c} 1 & \dfrac{\hat{a}_0 + \alpha b_0}{1-\alpha} \\ 0 & \dfrac{\hat{a}_0 + b_0}{1-\alpha} \end{array}\right)$$

となるから，$\hat{a}_0 + b_0 \neq 0$ のとき認定可能．

(ii)　$\alpha+\beta=1$ という条件が存在するとき．

（イ）　$\alpha+\beta=1$ 以外に追加情報のない通常の場合．今回は命題 3 (18) を使わなければならない．

$$\left(\begin{array}{c:c} 1 & \\ 0 & \varphi \\ 0 & \\ 0 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(18)\ \text{の左辺} = \operatorname{rank}\left(\begin{array}{c:c} 1 & -\alpha-\beta \\ -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \operatorname{rank}\left(\begin{array}{c:c} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right) = 1 \neq G$$

となって認定不能.

（ロ） $\alpha+\beta=1$ のほかに，他の情報から a_0 の推定値 $\hat{a}_0 \neq 0$ が与えられた場合. 同じく（18）で

$$\left(\begin{array}{c:c} 1 & \\ 0 & \\ 0 & \varphi \\ 0 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$(18)\ \text{の左辺} = \operatorname{rank}\left(\begin{array}{c:cc} 1 & -1 & -\hat{a}_0 \\ -1 & 1 & -b_0 \end{array}\right)$$

となるから，$\hat{a}_0 + b_0 \neq 0$ のとき認定可能.

結局，この例の連立方程式系の生産関数における α, β の値は，制約条件 $\alpha+\beta=1$ の有無を問わず，何らかの追加情報のない場合は認定不能，他の情報から a_0 の推定値 $\hat{a}_0 \neq 0$ が与えられた場合は，$\hat{a}_0 + b_0 \neq 0$ ならば認定可能となる.

§3 分散行列についての条件も考えに入れる場合の認定可能性

第1方程式の認定問題において，定義8（11）の記号を使うとき，ある σ_{1i} が0であるという条件が附加されることによって第1方程式が認定可能となる場合がある.

また通常の計量経済学の教科書では本稿と異なり，撹乱項の分散行列 $Var(u_t) = \Sigma$ をフル・ランク（階数 G）と想定している. 構造形表示の式のなかに定義式または恒等式が含まれる場合には，これらの式の方程式誤差はつねに0であるから，この定義式を使って適当に内生変数を減らしてからでないと，上の条件はみたされない. 通常，この点を無視して認定可能性を判定しているが，そのようにしても良いかどうかの点は何ら吟味されていない.

以上二つの点に留意して，本節では分散行列についての条件をも考慮に入れる場合の認定可能を論ずる. ひきつづき第1方程式についての認定可能条件について考えるが，はじめにすべての $i=1, 2, \cdots\cdots, G$ に対して $\sigma_{1i}=0$ となる場合を扱い，つぎに $\sigma_{1i} (i=1, 2, \cdots\cdots, G)$ のなか

に0でないものが含まれる場合を扱う．

ここで，$\sigma_{11}=0$ ならば，$P(u_{1t}=0)=1$ であるから，すべての $i=1, 2, \cdots\cdots, G$ に対して $\sigma_{1i}=0$ となることを注意しておこう．

命題 7　定義7および定義8の記号を使い，制約条件

$$(\beta, \gamma)\Phi=\lambda \qquad (12)$$

のもとで第1方程式の認定問題を考える．

(11) の記号で，条件 $\sigma_{11}=0$ が存在するならば，第1方程式が認定可能となるための必要十分条件は，

$$\mathrm{rank}[(B, \Gamma)\Phi, \Sigma]=G \qquad (31)$$

である．

証明　(10) の第1行第1列の成分を考えることにより，

$$\sigma_{11}=\beta\Psi\beta'=0 \qquad (32)$$

ここで Ψ は非負値半定符号の対称行列であるから，$\Psi=CC'$ をみたすような非負値半定符号の対称行列 C が存在する．

したがって (32) から

$$\beta CC'\beta'=\|\beta C\|^2=0$$

すなわち $\beta C=0$ が導かれて，

$$\beta\Psi=\beta CC'=O \qquad (33)$$

を得る．

逆に (33) から (32) が出ることは明らかであるから，両者は同等である．さらに B の正則性を使えば，条件

$$\beta\Psi B'=O \qquad (34)$$

とも同等になる．

命題2の証明と同じようにして，(12) と (34) とを同時に成立させる β は，

$$\beta[(I_G, -\Pi)\Phi, \Psi B']=(\lambda, O)$$

をみたすことに注目し，β が一意的に定まるための必要十分条件として，

$$\mathrm{rank}[(I_G, -\Pi)\Phi, \Psi B']=G \qquad (35)$$

を得る．

あとは，

$$(35)\text{ の左辺}=\mathrm{rank}[(B, -B\Pi)\Phi, B\Psi B']$$
$$=\mathrm{rank}[(B, \Gamma)\Phi, \Sigma]$$

に注目すれば，(31) が出る．　(終)

この命題の簡単な応用例として，第1方程式が定義式ないし恒等式の場合を考える．命題7に先立って注意したように，この場合には撹乱項の分散行列が

$$\Sigma=\left(\begin{array}{c:c} 0 & 0\cdots\cdots0 \\ \hdashline 0 & \\ \vdots & \Sigma_{00} \\ 0 & \end{array}\right) \tag{36}$$

という形になる．$(B,\Gamma)\Phi$ の第1行には必らず0でない成分が含まれているから，rank $\Sigma_{00}=G-1$ ならば，方程式係数についての制約条件を顧慮することなく，第1方程式は認定可能となる．

命題 8 制約条件

$$(\beta,\ \gamma)\Phi=\lambda \tag{12}$$

のもとで，第1方程式の認定問題を考える．$1<H\leqq G$ をみたす整数 H について，(11) の記号で，条件 $\sigma_{1i}=0$ $(i=H, H+1, \cdots\cdots, G)$ が成立するものとし，これに応じて，Σ を，はじめの $H-1$ 列と残りの $G-H+1$ 列とに分割したものを，$\Sigma=(\Sigma_1, \Sigma_2)$ と記す．

(i) （必要条件） 第1方程式が認定可能ならば，

$$\operatorname{rank}[(B,\Gamma)\Phi,\ \Sigma_2]=G \tag{37}$$

である．

(ii) （必要十分条件） B を，はじめの $H-1$ 行と残りの $G-H+1$ 行とに分割して，$B=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}$とする．$B_2$ が認定可能であると仮定すれば，(37) は，第1方程式が認定可能となるための必要十分条件である．

証明 (i) (10) の第1行から

$$(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \cdots\cdots, \sigma_{1H}, \cdots\cdots, \sigma_{1G})$$
$$=\beta\Psi B'=\beta\Psi(B_1', B_2')$$

を得るから，今回の前提条件は

$$(\sigma_{1H}, \cdots\cdots, \sigma_{1G})=\beta\Psi B_2'=O$$

である．

これと (12) を連立させて

$$\beta[(I_G, -\Pi)\Phi,\ \Psi B_2']=(\lambda, \overbrace{0, \cdots\cdots, 0}^{G-H+1\text{個}}) \tag{38}$$

を考え，$B\Psi B_2'=\Sigma_2$ を使えば，(i) の結果を得る．

(ii) 上の (38) には，既知と前提された Π, Ψ, Φ, λ のほかに B_2 が含まれているから，(37) は第1方程式が認定可能となるための必要条件にすぎない．しかし，B_2 が認定可能であることがわかっていれば，(37) は必要十分条件となる． （終）

この命題の前提条件では，$j=1, 2, \cdots\cdots, H$ に対して $\sigma_{1j}=0$ であるかどうかは問わない．実際の認定問題について (ii) の必要十分条件を使うときに，どの範囲の

$\sigma_{1j}=0, i\geqq H$ を考慮に入れるかは，そこでの記号 B_2 の認定可能性に依存することになる．

命題 8の系　命題8の前提条件と記号を使う．構造形表示の式のうち，第 H 番目以下に定義式ないし恒等式が含まれているとき，それらが方程式誤差を伴わないという事情を考慮することによって，はじめて，第1方程式が認定可能となることはあり得ない．

証明　第 H 番目以下がすべて定義式ないし恒等式の場合を考えると，そこでの記号で $\Sigma_2=O$ となるため，(37) は (13) の形に帰着し，係数についての制約条件だけを考慮する場合と同じになる．　(終)

この系は，本節のはじめに指摘した第二の点に答えて，通常行われている判定法でさしつかえないことを示している．

定義 10 の最も簡単な同次型のゼロ制約の場合には，命題4に対応して，つぎの結果を得る．

命題 9　定義 10 の前提条件に加えて命題8の条件が成立するとき，(37) は，つぎの条件と同等である．

$$\mathrm{rank}(B_0, \Gamma_0, \Sigma_0)=G-1$$

ただし，B_0, Γ_0 は (22) で定義されたもの，Σ_0 は

$$\Sigma=\left(\begin{array}{c|c} \sigma_{11}\cdots\cdots\sigma_{1H-1} & 0\cdots\cdots0 \\ \hline \Sigma_1 & \Sigma_0 \end{array}\right) \tag{39}$$

によって定義されるものとする．

証明は，

$$[(B,\Gamma)\Phi, \Sigma_2]$$

$$=\left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0\cdots\cdots0 & 0\cdots\cdots0 & 0\cdots\cdots0 \\ \hline b_2 & & & \\ \vdots & B_0 & \Gamma_0 & \Sigma_0 \\ b_G & & & \end{array}\right)$$

となることに注目すればよい．　(終)

例 5　(需要供給模型)　$t=1, 2, \cdots\cdots, T$ 期における，ある財の需要量 D_t，供給量 S_t，価格 P_t の $G=3$ 個を内生変数とし，定数1と所得 Y_t の $K=2$ 個を先決変数とする．a_0，a_1，a_2，b_0，b_1 を未知定数として，

需要方程式　$D_t=a_0+a_1P_t+a_2Y_t+u_{1t}$

供給方程式　$S_t=b_0+b_1P_t+u_{2t}$

需給均等式　$D_t=S_t$

の3式から成る連立方程式系を考える．

$$y_t=\begin{pmatrix}D_t\\S_t\\P_t\end{pmatrix},\qquad x_t=\begin{pmatrix}1\\Y_t\end{pmatrix},\qquad u_t=\begin{pmatrix}u_{1t}\\u_{2t}\\0\end{pmatrix}$$

とおけば，上の方程式系は

$$\begin{pmatrix}1&0&-a_1\\0&1&-b_1\\1&-1&0\end{pmatrix}y_t+\begin{pmatrix}-a_0&-a_2\\-b_0&0\\0&0\end{pmatrix}x_t=u_t$$

となる．この場合，

$$Var(u_t)=\begin{pmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}&0\\\sigma_{21}&\sigma_{22}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

であることに注目する．

(i) 需要方程式については，

$(B,\Gamma)\Phi=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&-1\end{pmatrix}$ であるから，係数についての条件だけでは認定不能．命題8の系で述べたように，$\sigma_{13}=0$ という条件を考慮しても認定不能．

ここで $\sigma_{12}=0, \sigma_{22}>0$ という追加条件があれば，(37) の $\Sigma_2=\begin{pmatrix}1&0\\\sigma_{22}&0\\0&0\end{pmatrix}$ となるため，認定可能の必要条件が成立する．

そして，この場合の $B_2=\begin{pmatrix}0&1&-b_1\\1&-1&0\end{pmatrix}$ が認定可能であれば，命題8 (ii) から，需要方程式は認定可能となる．

(ii) 供給方程式については，

$(B,\Gamma)\Phi=\begin{pmatrix}1&0&-a_2\\0&1&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$ であるから，$a_2\neq0$ ならば，係数についての制約条件だけで認定可能となる．

(iii) 需給均等の恒等式は，命題7の応用例で述べたように，$\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}\\\sigma_{21}&\sigma_{22}\end{pmatrix}=2$ ならば，認定可能である．

結局，$a_2\neq0, \sigma_{12}=0, \sigma_{11}>0, \sigma_{22}>0$ のとき，すべての方程式が認定可能となる．

例 6 (recursive model) $k, m, n, a_i, b_i(i=0, 1)$ を定数として，

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\k&1&0\\m&n&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_{1t}\\y_{2t}\\y_{3t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_0&a_1\\b_0&b_1\\c_0&c_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{1t}\\x_{1t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{1t}\\u_{2t}\\u_{3t}\end{pmatrix}$$

$$Var\begin{pmatrix}u_{1t}\\u_{2t}\\u_{3t}\end{pmatrix}=\Sigma,\qquad \mathrm{rank}\ \Sigma=3$$

という recursive model を考える．

第1方程式は，係数についての条件だけで認定可能．

第2方程式は，係数についての条件だけでは認定不能．

$\sigma_{12}=0$ という追加条件があれば，(37) が

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{11} \\ 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & \sigma_{31} \end{pmatrix}=3$$

の形で成立する．そして，この場合の $B_2=(1\ 0\ 0)$ が認定可能であるから，命題8 (ii) により，第2方程式は認定可能となる．

第3方程式は，同様に，係数条件だけでは認定不能．$\sigma_{12}=0$ という条件を追加しても認定可能とはならないが，$\sigma_{12}=\sigma_{13}=0$ という条件を追加すれば，(37) が

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_{11} & 1 \\ 0 & 0 & \sigma_{22} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=3$$

の形で成立する．そして，この場合の $B_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \end{pmatrix}$ が上記の通り認定可能となっているから，命題8 (ii) により，第3方程式は認定可能となる．

結局，$\sigma_{12}=0$ のとき第2方程式が，$\sigma_{12}=\sigma_{13}=0$ のとき第3方程式が認定可能である．

[1] 主要な文献として，つぎの三つをあげることにとどめる．最後のものの末尾に最新の文献が記されている．

Koopmans, T. C, H. Rubin and R. B. Leipnik (1950) "Measuring the Equation Systems of Dynamic Economics," *Statistical Inference in Dynamic Economic Models*. Cowles Commission for Research in Economics, Monograph No. 10. New York, John Wiley & Sons, pp. 53–237 所収.

Fisher, F. M. (1966) *The Identification Problem in Econometrics*. New York, McGraw-Hill.

Hsiao, Cheng (1983) "Identification", *Handbook of Econometrics, Vol. I*, edited by Zvi Griliches and Michael D. Intriligator. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, New York, Oxford. pp. 223–283, Ch. 4 として所収.

[2] 磯野修 (1984) 確率・統計 1，春秋社．pp. 127–133.

[3] 本例は，つぎの論文 p. 1074 に示されている例である．

Bowden, R. (1973) "The Theory of Parametric Identification", *Econometrica*, Vol. 41, pp. 1069–74.

一般的に，指数型分布族に属する分布関数についての認定可能性は，つぎの論文の p 583 に述べられている．

Rothenberg, Th J. (1971) "Identification in Parametric Models," *Econometrica*, Vol. 39, pp. 577–591.

[4] 上記の Rothenberg, pp. 584–5 参照.

[5] 他の情報から与えられた値が0ならば，同次型のゼロ制約として扱えばよい．(ハ) の場合についても同じ.

(一橋大学教授)