随伴族をもつ曲面

藤　岡　　　敦

1　序

Wente による $\mathbf{R}^3$ 内の平均曲率一定トーラスの発見（[36]）は，単に $\mathbf{R}^3$ 内のコンパクトな平均曲率一定曲面は標準的球面に限るという Hopf の予想に対する反例を与えたのみならず，それに続く Pinkall–Sterling による平均曲率一定トーラスの構成（[27]）に見られるように，古典的な曲面論に現代的な可積分系理論の手法を取り入れることの有効性を微分幾何学者達に知らしめるきっかけともなった．その大きな理由には，平均曲率一定曲面が sinh–Gordon 方程式

$$\omega_{z\bar{z}} = -\sinh\ \omega$$

により記述されるように，微分幾何学者達の関心を引く幾何的対象を記述する微分方程式がしばしば可積分系理論に表れるものとなっていることが挙げられるが，特に曲面論において多くの例が知られ，また研究対象とされている．

このような曲面は適当な幾何的性質を保つ変形をもち，古くから随伴族として知られている．例えば，D を $\mathbf{R}^2$ 内の領域とし，$t \in [0, 2\pi)$，$(x, y) \in D$ に対し

$$x_1^t(x, y) = \sinh x \sin y \cos t + \cosh x \cos y \sin t,$$

$$x_2^t(x, y) = \sinh x \cos y \cos t - \cosh x \sin y \sin t,$$

$$x_3^t(x, y) = y \cos t + x \sin t$$

とおき，D から $\mathbf{R}^3$ への写像 F^t を

$$F^t(x, y) = (x_1^t(x, y), x_2^t(x, y), x_3^t(x, y))$$

により定めると，F^t は極小曲面の等長的変形をあたえる．特に，$t=0$ のときは常螺旋面，$t=\pi/2$ のときは懸垂面である．随伴族の存在は可積分系理論に現れ

るスペクトル径数の存在に対応している．本稿では随伴族をもつ曲面の中でも主に平均曲率一定曲面，共形曲率線座標をもつ曲面，Bonnet 曲面，調和逆平均曲率曲面，Bianchi 曲面，中心アファイン極小曲面について筆者による結果も含めて解説していく．

2 平均曲率一定曲面

2 次元 Riemann 多様体は等温座標系をもつことから，$\mathbf{R}^3$ 内の曲面は局所的には Riemann 面 M から $\mathbf{R}^3$ への共形的はめ込み

$$F: M \to \mathbf{R}^3$$

とみなせる．z を正則座標，$e^{\omega}dzd\bar{z}$ を第一基本形式，Qdz^2 を Hopf 微分，N を単位法ベクトル，H を平均曲率とすると，Gauss–Weingarten 方程式は

$$\begin{cases} F_{zz} = \omega_z F_z + QN, \\ F_{z\bar{z}} = \frac{1}{2} He^{\omega} N, \\ N_z = -HF_z - 2Qe^{-\omega} F_{\bar{z}} \end{cases}$$

と表される．この両立条件が Gauss–Codazzi 方程式

$$\begin{cases} \omega_{z\bar{z}} + \frac{1}{2} H^2 e^{\omega} - 2|Q|^2 e^{-\omega} = 0, \\ Q_{\bar{z}} = \frac{1}{2} H_z e^{\omega} \end{cases} \tag{2.1}$$

である．

H が一定のとき，(2.1) は

$$\begin{cases} \omega_{z\bar{z}} + \frac{1}{2} H^2 e^{\omega} - 2|Q|^2 e^{-\omega} = 0, \\ Q_{\bar{z}} = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

となり変換

$$Q \to \lambda Q \ (\lambda \in S^1)$$

で不変であるから，臍点がなければ平均曲率を保つ等長的変形が存在する．この事実は「第一基本形式と平均曲率のみでは決まらない曲面を分類せよ」という Bonnet による問題に関し，彼自身が発見したものである（[8]）．また，Q は正則となるから，極小でない場合は臍点がなければ座標変換を行うことにより (2.2) は sinh–Gordon 方程式と同値となる．ここで現れた λ がスペクトル径数

とよばれるもので曲面の随伴族としての変形に対応している．例えば，平均曲率一定回転面はDelaunay曲面ともよばれ，球面，円柱，アンデュロイド，ノドイドの何れかであるが，平均曲率一定螺旋面はDelaunay曲面の随伴族として得られることがdo Carmo–Dajczerにより示されている（[10]）．なお，ここではHが一定で０でないときを平均曲率一定曲面とよんでいる．

$\mathbf{R}^3$を対応

$$(x_1, x_2, x_3) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} -\sqrt{-1}x_3 & -\sqrt{-1}x_1 - x_2 \\ -\sqrt{-1}x_1 + x_2 & \sqrt{-1}x_3 \end{pmatrix}$$

により$\mathfrak{su}(2)$と同一視し，動標構をSU(2)へ持ち上げると，MからSU(2)への写像Φが存在し

$$F_z = -\sqrt{-1}e^{\frac{\omega}{2}}\Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Phi, \quad F_{\bar{z}} = -\sqrt{-1}e^{\frac{\omega}{2}}\Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Phi$$

となる．このとき，Gauss–Weingarten方程式は

$$\begin{cases} \Phi_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\omega_z & -Qe^{-\frac{\omega}{2}} \\ \frac{1}{2}He^{\frac{\omega}{2}} & -\frac{1}{4}\omega_z \end{pmatrix}\Phi, \\ \Phi_{\bar{z}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\omega_{\bar{z}} & -\frac{1}{2}He^{\frac{\omega}{2}} \\ \bar{Q}e^{-\frac{\omega}{2}} & \frac{1}{4}\omega_{\bar{z}} \end{pmatrix}\Phi \end{cases}$$

と書き換えられる．

再びHが一定であるとすると，Lax表示とよばれるスペクトル径数付きの連立線形方程式

$$\begin{cases} \Phi_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\omega_z & -\lambda Qe^{-\frac{\omega}{2}} \\ \frac{1}{2}He^{\frac{\omega}{2}} & -\frac{1}{4}\omega_z \end{pmatrix}\Phi, \\ \Phi_{\bar{z}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\omega_{\bar{z}} & -\frac{1}{2}He^{\frac{\omega}{2}} \\ \lambda^{-1}\bar{Q}e^{-\frac{\omega}{2}} & \frac{1}{4}\omega_{\bar{z}} \end{pmatrix}\Phi \end{cases} \tag{2.3}$$

を得る．但し，Φはλにも依存する．逆に，SU(2)に値をとる（2.3）の解Φが存在したと仮定し，簡単のため$H=1$のときを考え，

$$F^t = -\Phi^{-1}\Phi_t + \sqrt{-1}\Phi^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Phi \quad \left(\lambda = e^{2\sqrt{-1}t}\right) \tag{2.4}$$

とおく．このとき，F^tは$H=1$の曲面で対応する幾何的量をF^tと同様に^{t}を付けて書くと，

$$\omega^t = \omega^0,\ Q^t = e^{2\sqrt{-1}t}Q^0$$

となる．従って，F^tは$H=1$の曲面の随伴族を表す．(2.4) はSym-Bobenko公式とよばれる（[4]）．ゲージ変換

$$\Psi = \begin{pmatrix}\lambda^{-\frac{1}{4}} & 0\\ 0 & \lambda^{\frac{1}{4}}\end{pmatrix}\Phi$$

を行い，改めて$\lambda^{\frac{1}{2}}$をλ^{-1}と置き換えると，

$$\begin{cases}\Psi_z = \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\omega_z & -\lambda^{-1}Qe^{-\frac{\omega}{2}}\\ \frac{1}{2}\lambda^{-1}e^{\frac{\omega}{2}} & -\frac{1}{4}\omega_z\end{pmatrix}\Psi,\\ \Psi_{\bar z} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\omega_{\bar z} & -\frac{1}{2}\lambda e^{\frac{\omega}{2}}\\ \lambda\bar{Q}e^{-\frac{\omega}{2}} & \frac{1}{4}\omega_{\bar z}\end{pmatrix}\Psi\end{cases} \tag{2.5}$$

を得る．(2.5) に表れるLax対

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\omega_z & -\lambda^{-1}Qe^{-\frac{\omega}{2}}\\ \frac{1}{2}\lambda^{-1}e^{\frac{\omega}{2}} & -\frac{1}{4}\omega_z\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\omega_{\bar z} & -\frac{1}{2}\lambda e^{\frac{\omega}{2}}\\ \lambda\bar{Q}e^{-\frac{\omega}{2}} & \frac{1}{4}\omega_{\bar z}\end{pmatrix}$$

は捩れループ代数

$$\left\{A : S^1 \to \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}) \;\middle|\; A(-\lambda) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} A(\lambda)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}$$

への写像とみなせるから，Ψは捩れループ群

$$\left\{\Psi : S^1 \to \mathrm{SU}(2) \;\middle|\; \Psi(-\lambda) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Psi(\lambda)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}$$

への写像とみなせる．このとき，捩れループ群に対する岩澤分解を用いて (2.5) の解を具体的に構成することができる．この事実はDorfmeister-Pedit-Wuの方法として知られている（[15]）．

$\mathfrak{M}^3(c)$を曲率cの単連結完備3次元空間形とすると，$\mathfrak{M}^3(c)$内の曲面に対するGauss-Codazzi方程式は

$$\begin{cases}\omega_{z\bar{z}}+\frac{1}{2}(H^2+c)e^{\omega}-2|Q|^2e^{-\omega}=0,\\ Q_{\bar{z}}=\frac{1}{2}H_ze^{\omega}\end{cases}$$

と表される．従って，一般には異なる空間形内の平均曲率一定曲面全体の間に局所的に等長的な対応が存在する．これはLawson対応とよばれる（[23]）．また，Sym–Bobenko公式は空間形内の平均曲率一定曲面に対しても与えられる．

3　共形曲率線座標をもつ曲面

Qが実数値となる正則座標は曲率線座標ともなるから共形曲率線座標とよばれる．共形曲率線座標をもつ曲面も随伴族をもち，Calapso，Bianchiの仕事（[9, 3]）にまで遡ることができる．例えば，回転面，2次曲面，極小曲面，平均曲率一定曲面は共形曲率線座標をもつ．共形曲率線座標をもつ曲面に対しては，Gauss–Codazzi方程式より対応する幾何的量がそれぞれ

$$\omega^*=-\omega, H^*=2Q, Q^*=\frac{1}{2}H$$

となる別の曲面が存在する．これを双対曲面とよぶ．平均曲率一定曲面の場合，双対曲面は平行曲面から得られる．即ち，簡単のため$H=1$，$Q=1/2$のときを考え，

$$F^*=F+N$$

とおき，F^*の向きをFとは逆に選んでおけばF^*はFの双対曲面となる．共形曲率線座標をもつ曲面については最近ではWillmore曲面の研究と並び，共形幾何的観点からの研究が盛んであるが，ここではこれ以上立ち入らないことにする．

4　Bonnet曲面

Bonnetの問題に対する解答をあたえる空間形内の曲面で，臍点がなく局所的に変形できるものをここではBonnet曲面とよぶことにする．Grausteinの定理（[21]）により，Bonnet曲面は共形曲率線座標をもち，Qは正則関数fを用いて

$$Q=\frac{1}{f+\bar{f}}$$

と表される．H が一定でないときを考え，

$$w=\int\frac{dz}{f_z},\ s=w+\bar{w}$$

とおくと，Codazzi 方程式より H は s のみの関数となる．更に計算を進めると，Gauss–Codazzi 方程式は Hazzidakis 方程式とよばれる3階常微分方程式

$$\left\{\left(\frac{H_{ss}}{H_s}\right)_s-H_s\right\}R^2=2-\frac{H^2+c}{H_s} \tag{4.1}$$

に還元される（[22]）．但し，(4.1) の右辺が0でないとき

$$R=s,\ \frac{\sin 2s}{2},\ \frac{\sinh 2s}{2}$$

で，$c<0$ のときに限り (4.1) は右辺が0となる解

$$H=-\sqrt{-c}\tanh\frac{\sqrt{-c}s}{2}$$

をもつ．また，幾何的条件より $H_s<0$ である．(4.1) は右辺が0でないときも更に1回積分できることまでは知られていたが，Painlevé 第3，第5，第6方程式

$$P_{\mathrm{III}}: y''=\frac{1}{y}(y')^2-\frac{1}{t}y'+\frac{1}{t}(\alpha y^2+\beta)+\gamma y^3+\frac{\delta}{y},$$

$$P_{\mathrm{V}}: y''=\left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{y-1}\right)(y')^2-\frac{1}{t}y'+\frac{(y-1)^2}{t^2}\left(\alpha y+\frac{\beta}{y}\right)+\frac{\gamma}{t}y+\delta\frac{y(y+1)}{y-1},$$

$$P_{\mathrm{VI}}: y''=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y-t}\right)(y')^2-\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{y-t}\right)y'$$
$$+\frac{y(y-1)(y-t)}{t^2(t-1)^2}\left(\alpha+\beta\frac{t}{y^2}+\gamma\frac{t-1}{(y-1)^2}+\delta\frac{t(t-1)}{(y-t)^2}\right)$$

との関係が明らかとなったのは最近のことである（[6]）．

Bonnet 曲面は一般には Painlevé 超越関数を用いることが必要だが，定曲率のものはより具体的に記述される．まず，$\mathbf{R}^3$ 内の平坦 Bonnet 曲面は円柱，対数螺旋上の柱面，円錐，或いはより一般に Cartan 錐とよばれる錐の何れかの変形によって得られることが Roussos により示された（[28]）．また，Colares–Kenmotsu は $\mathbf{R}^3$ 内の定曲率 Bonnet 曲面は平坦であることを示した（[13]）．

特に，Hが一定でないとき，Gauss 曲率Kは

$$K=H^2-R^2H_s^2$$

と表されるから，これは$c=0$としたときのKが一定となる（4.1）の解は$R=s$で

$$H=\frac{\alpha}{s}\ (\alpha>0)$$

のみであることに対応している．更に，Takeuchi，Chen-Li は空間形内の定曲率 Bonnet 曲面は平坦か外在的に平坦であることを示し（[33，12]），Fujioka-Inoguchi はこれらが2次元空間形内の特定の測地的曲率をもつ曲線を用いて記述されることを示した（[20]）．

Bonnet の問題は4次元空間形内でも考えられる．但し，ここでは曲面は臍点のないものを考え，平均曲率ベクトルの長さを保ちながら局所的に等長的に変形できるものを Bonnet 曲面とよぶことにする．曲率cの単連結完備4次元空間形$\mathfrak{M}^4(c)$は

$$\mathfrak{M}^4(c)=\begin{cases}(\mathbf{R}^4,\langle\ ,\ \rangle_0) & (c=0),\\ \{x\in\mathbf{R}^5\,|\,\langle x,x\rangle_c=\frac{1}{c}\} & (c>0),\\ \{x\in\mathbf{R}^5\,|\,\langle x,x\rangle_c=\frac{1}{c}\}\text{ の連結成分} & (c<0)\end{cases}$$

と表される．但し，$\langle\ ,\ \rangle_c$は$c=0$，$c>0$のときそれぞれ$\mathbf{R}^4$，$\mathbf{R}^5$の標準内積，$c<0$のとき符号数（1，4）の$\mathbf{R}^5$の Lorentz 内積である．$\mathfrak{M}^4(c)$内の曲面は局所的に Riemann 面Mから$\mathfrak{M}^4(c)$への共形的はめ込み

$$F:M\to\mathfrak{M}^4(c)$$

とみなせるから，zを正則座標，$e^\omega dzd\bar{z}$を誘導計量，N_1，N_2を直交する単位法ベクトルとすると，Gauss-Weingarten 方程式は

$$\begin{cases}F_{zz}=\omega_zF_z+Q_1N_1+Q_2N_2,\\ F_{z\bar{z}}=-\frac{1}{2}ce^\omega F+\frac{1}{2}H_1e^\omega N_1+\frac{1}{2}H_2e^\omega N_2,\\ (N_1)_z=-H_1F_z-2Q_1e^{-\omega}F_{\bar{z}}+AN_2,\\ (N_2)_z=-H_2F_z-2Q_2e^{-\omega}F_{\bar{z}}-AN_1\end{cases}\tag{4.2}$$

と表される．但し，

$$\langle F_{zz}, N_i\rangle_c = Q_i,\ \langle F_{z\bar{z}}, N_i\rangle_c = \frac{1}{2}H_i e^{\omega}\ \ (i=1,2),\ \langle (N_1)_z, N_2\rangle_c = A$$

である．特に，4次微分$(Q_1^2+Q_2^2)dz^4$および平均曲率ベクトルの長さ$H_1^2+H_2^2$はN_1，N_2の選び方に依らない．(4.2) の両立条件から Gauss–Codazzi–Ricci 方程式

$$\begin{cases} \omega_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}(H_1^2+H_2^2+c)e^{\omega} - 2(|Q_1|^2+|Q_2|^2)e^{-\omega} = 0, \\ (Q_1)_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(H_1)_z e^{\omega} + \bar{A}Q_2 - \frac{1}{2}AH_2 e^{\omega}, \\ (Q_2)_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(H_2)_z e^{\omega} - \bar{A}Q_1 + \frac{1}{2}AH_1 e^{\omega}, \\ A_{\bar{z}} - \bar{A}_z = 2(Q_1\bar{Q}_2 - \bar{Q}_1 Q_2)e^{-\omega} \end{cases} \tag{4.3}$$

を得る．

(4.3) より極小曲面や更に一般に平行な平均曲率ベクトルをもつ曲面は Bonnet 曲面であることが分かる．実際，極小曲面の場合，(4.3) は

$$\begin{cases} \omega_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}ce^{\omega} - 2(|Q_1|^2+|Q_2|^2)e^{-\omega} = 0, \\ (Q_1)_{\bar{z}} = \bar{A}Q_2, \\ (Q_2)_{\bar{z}} = -\bar{A}Q_1, \\ A_{\bar{z}} - \bar{A}_z = 2(Q_1\bar{Q}_2 - \bar{Q}_1 Q_2)e^{-\omega} \end{cases} \tag{4.4}$$

となるから，λ，$\mu \in \mathbf{C}$を

$$|\lambda|^2 + |\mu|^2 = 1,\ \lambda\bar{\mu} = \bar{\lambda}\mu$$

となるように選んでおくと，(4.4) は変換

$$Q_1 \to \lambda Q_1 + \mu Q_2,\ Q_2 \to -\mu Q_1 + \lambda Q_2$$

で不変である．また，極小でない平行な平均曲率ベクトルをもつ曲面の場合，法束が平坦となることから$A=0$でH_1，H_2は一定としてよい．このとき，(4.3) は

$$\begin{cases} \omega_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}(H_1^2+H_2^2+c)e^{\omega} - 2(|Q_1|^2+|Q_2|^2)e^{-\omega} = 0, \\ (Q_1)_{\bar{z}} = (Q_2)_{\bar{z}} = 0, \\ Q_1\bar{Q}_2 = \bar{Q}_1 Q_2 \end{cases}$$

となり極小曲面の場合と同じ変換で不変である．更に，Chen–Yau の簡約定理 ([11, 37]) により，極小でない平行な平均曲率ベクトルをもつ曲面は全測地的

または全臍的3次元空間形内の平均曲率一定曲面となる．上の2つの例のようにスペクトル径数が本質的に S^1 に値をとる場合を単純であるということにすると，法束が平坦な単純 Bonnet 曲面に対しては Graustein 型の定理が成り立つ．特に，単純 Bonnet 曲面については法束が平坦であることと共形曲率線座標が存在することとは同値である．更に，法ベクトル束が平坦な単純 Bonnet 曲面は全測地的または全臍的3次元空間形内の Bonnet 曲面となる．これは Chen–Yau の簡約定理の一般化とみなせる（[18]).

5　調和逆平均曲率曲面

Bonnet 曲面は平均曲率一定曲面の自然な一般化であるが，Bobenko は調和逆平均曲率曲面とよばれる新しい一般化を次のように発見した（[5]）．まず，(2.3) に対しゲージ変換

$$\Psi=\begin{pmatrix}\lambda^{-\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & \lambda^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}\Phi$$

を行うと，

$$\begin{cases}\Psi_z=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\omega_z & -Qe^{-\frac{\omega}{2}}\\ \frac{1}{2}\lambda He^{\frac{\omega}{2}} & -\frac{1}{4}\omega_z\end{pmatrix}\Psi,\\[2ex] \Psi_{\bar{z}}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\omega_{\bar{z}} & -\frac{1}{2}\lambda^{-1}He^{\frac{\omega}{2}}\\ \bar{Q}e^{-\frac{\omega}{2}} & \frac{1}{4}\omega_{\bar{z}}\end{pmatrix}\Psi\end{cases}\tag{5.1}$$

を得る．そこで，λ が M から S^1 への写像，H が M 上の関数のときに (5.1) が成り立つと仮定すると，H は正則関数 f を用いて

$$H=\frac{1}{f+\bar{f}}$$

と表される．このような平均曲率をもつ曲面を調和逆平均曲率曲面とよぶ．調和逆平均曲率曲面は主曲率の比を保ちながら第一基本形式を共形的に変形できる．また，平均曲率一定曲面の場合と同様にはめ込みを与える公式が存在するが，一般の場合に Lax 表示を解くことは困難である．しかし，曲面に幾何的対称性を付加することにより具体的な構成が可能となる．例えば，共形曲率線座標をもつ

調和逆平均曲率曲面に対するGauss-Codazzi方程式はHazzidakis方程式に還元される．特に，回転面の場合はP_{III}の解を用いて記述される（[7]）．なお，Grausteinの定理により，Bonnet曲面は共形曲率線座標をもつ調和逆平均曲率曲面と互いに双対である．主曲率の比が一定の共形曲率線座標をもつ調和逆平均曲率曲面は平坦Bonnet曲面となるが，これは定曲率Bonnet曲面の分類の双対版ともいえる．

調和逆平均曲率曲面は空間形内でも定義できる（[16]）．fをM上で0とならず，定数でない正則関数とすると，Gauss方程式は変換

$$e^{\omega}\to|f|^2e^{\omega},\ H^2+c\to\frac{1}{|f|^2}(H^2+c),\ Q\to fQ$$

で不変である．この変換が$\mathfrak{M}^3(c)$内の曲面を定めると仮定し，Codazzi方程式と両立させると，Hの逆数は

$$\varphi_{z\bar{z}}-\frac{2c\varphi}{1+c\varphi^2}|\varphi_z|^2=0 \tag{5.2}$$

をみたす．(5.2) は1次元Riemann多様体 (I_c, g_c) を

$$I_c=\begin{cases}(\mathbf{R}, g_c) & (c\geq 0),\\ \left(\mathbf{R}\setminus\left\{\pm\frac{1}{\sqrt{-c}}\right\}, g_c\right) & (c<0),\end{cases}\qquad g_c=\frac{1}{(1+ct^2)^2}dt^2$$

により定めたときのMからI_cへの調和写像の方程式である．このことより，平均曲率の逆数が (5.2) をみたす$\mathfrak{M}^3(c)$内の曲面を調和逆平均曲率曲面とよぶ．$\mathfrak{M}^3(c)$内の調和逆平均曲率曲面は$K/(H^2+c)$という量を保ちながら第一基本形式を共形的に変形できる．特に，$c=0$のときはBobenkoによる定義と一致する．また，$c\neq 0$のときについてもはめ込みを与える公式が存在する．更に，Lawson対応の一般化が成り立ち，一般には異なる空間形内の調和逆平均曲率曲面全体の間に局所的に共形的な対応が存在する．例えば，空間形内の平坦Bonnet曲面は調和逆平均曲率曲面となるから，これらはLawson対応により移り合う（[20]）．

6　Bianchi 曲面

$\mathbf{R}^3$ 内の定曲率曲面についても調和逆平均曲率曲面と同様な一般化が考えられる．簡単のため $K<0$ のときを考え，正値関数 ρ を

$$K=-\frac{1}{\rho^2}$$

により定める．(u,v) を漸近線座標とすると，第一，第二基本形式はそれぞれ

$$\mathrm{I}=A^2du^2+2AB\cos\phi dudv+B^2dv^2,\ \mathrm{II}=\frac{2AB\sin\phi}{\rho}dudv$$

となる．但し，

$$A=|F_u|,B=|F_v|$$

で ϕ は Chebyshev 角，即ち漸近線のなす角である．更に，

$$a=\frac{A}{\rho},b=\frac{B}{\rho}$$

とおくと，Gauss–Codazzi 方程式

$$\begin{cases}\phi_{uv}+\left(\dfrac{\rho_u b}{2\rho a}\sin\phi\right)_u+\left(\dfrac{\rho_v a}{2\rho b}\sin\phi\right)_v-ab\sin\phi=0,\\ a_v+\dfrac{\rho_v}{2\rho}a-\dfrac{\rho_u}{2\rho}b\cos\phi=0,\\ b_u+\dfrac{\rho_u}{2\rho}b-\dfrac{\rho_v}{2\rho}a\cos\phi=0\end{cases}\tag{6.1}$$

を得る．

ρ が一定のとき，(6.1) は

$$\begin{cases}\phi_{uv}-ab\sin\phi=0,\\ a_v=b_u=0\end{cases}\tag{6.2}$$

となり変換

$$a\to\lambda a,\ b\to\lambda^{-1}b\ (\lambda\in\mathbf{R}^\times)$$

で不変であるから，Chebyshev 角と第二基本形式を保つ変形が存在する．また，a, b はそれぞれ u, v のみの関数となるから，座標変換を行うことにより (6.2) は sine–Gordon 方程式

$$\phi_{uv}=\sin\ \phi$$

と同値となる．負定曲率曲面に対するはめ込みを与える公式は Sym により見つけられた（[32]）．更に，漸近線の一方が直線であると仮定する．このような曲面を Amsler 曲面とよぶ．このとき，ϕ は u と v との積のみの関数となるから，

$$\phi=f(uv)=f(t)$$

とおくと，sine–Gordon 方程式は

$$tf''+f'=\sin f$$

となる．これは P_{III} において

$$y=e^{\sqrt{-1}f},\alpha=\frac{1}{2},\beta=-\frac{1}{2},\gamma=\delta=0$$

とおいたものと同値である．

同じ領域からの写像により表される $\mathbf{R}^3$ 内の曲面を 2 つ考え，対応する 2 点を結ぶベクトルが互いの曲面に接し，長さが一定で，更に対応する 2 点での法ベクトルのなす角が一定であると仮定する．最初の条件を接線叢が与えられているという．このとき，2 つの曲面は同じ Gauss 曲率をもつ負定曲率曲面となることを Bäcklund は示した（[1]）．これは次で与えられる sine–Gordon 方程式の解の変換を導く．

$$\begin{cases}(\bar{\phi}-\phi)_u=2\alpha\sin\dfrac{\bar{\phi}+\phi}{2},\\(\bar{\phi}+\phi)_v=\dfrac{2}{\alpha}\sin\dfrac{\bar{\phi}-\phi}{2}.\end{cases}$$

但し，$\alpha\in\mathbf{R}^\times$ である．例えば，幾何的には意味のない真空解 $\phi=0$ から Dini 曲面に対応する 1 ソリトン解

$$\bar{\phi}=4\mathrm{Tan}^{-1}\exp\left(\alpha u+\frac{v}{\alpha}+\beta\right)\quad(\beta\in\mathbf{R})$$

が得られる．sine–Gordon 方程式に限らずこのような解の変換は Bäcklund 変換とよばれる．例えば，Liouville 方程式

$$\varphi_{uv}=e^{\varphi}$$

と波動方程式

$$\phi_{uv}=0$$

との間にはBäcklund変換

$$\begin{cases} (\phi-\varphi)_u=\alpha e^{\frac{\phi+\varphi}{2}}, \\ (\phi+\varphi)_v=-\dfrac{2}{\alpha}e^{-\frac{\phi-\varphi}{2}} \end{cases}$$

が存在する．ϕ は u または v のみの関数の和となるから，φ はそれぞれ u または v のみの関数 $f(u)$，$g(v)$ を用いて

$$\varphi=\log\frac{2f'g'}{(f+g)^2}$$

と表される．また，Cauchy-Riemann方程式

$$\begin{cases} u_x=v_y, \\ u_y=-v_x \end{cases}$$

はLaplace方程式

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

に対するBäcklund変換とみなせる．

Bäcklundの定理における仮定を少し変更し，接線叢が与えられ，対応する2点でのGauss曲率がともに負で等しく，更に漸近線を漸近線にうつすとする．このとき，

$$\rho_{uv}=0$$

となることをBianchiは示した（[2]）．このようなGauss曲率をもつ曲面をBianchi曲面とよぶ．Bianchi曲面はChebyshev角を保ちながら第二基本形式を共形的に変形できる．また，負定曲率曲面の場合と同様にはめ込みを与える公式が存在する（[24]）．Gauss曲率が漸近線座標の一方にのみ依存するBianchi曲面は P_{V} の解を用いて記述される（[29]）．

定曲率Bonnet曲面，或いは主曲率の比が一定の共形曲率線座標をもつ調和逆平均曲率曲面の分類と同様の考察をするために，負定曲率曲面がChebyshev座標，即ち

$$a=b=一定$$

となる座標をもつことに注目し，$a=b$ となる座標を一般化Chebyshev座標と

よぶことにする．例えば，平坦点をもたない極小曲面は Chebyshev 角 $\pi/2$ の負曲率曲面であるから，Codazzi 方程式よりそれぞれ u または v のみの関数 $\alpha(u)$，$\beta(v)$を用いて

$$a=\alpha(u)\rho^{-\frac{1}{2}},\ b=\beta(v)\rho^{-\frac{1}{2}}$$

と表される． 従って， 一般化 Chebyshev 座標をもつ． Chebyshev 角が一定の一般化 Chebyshev 座標をもつ Bianchi 曲面は常螺旋面となる．特に，極小 Bianchi 曲面は常螺旋面に限る（[17]）．

7 中心アファイン極小曲面

Tzitzéica は $\mathbf{R}^3$ 内の曲面に対し Gauss 曲率と支持関数，即ち原点と接平面との距離の 4 乗との比が中心アファイン変換，即ち原点を固定するアファイン変換で不変であることを発見し， この比が一定の曲面を S 曲面とよんだ（[34]）． これは現在，固有アファイン球面とよばれる Tzitzéica 方程式

$$\phi_{uv}=e^{\phi}-e^{-2\phi}$$

の解を用いて記述される曲面である．Dodd–Bullough は sine–Gordon 方程式，sinh–Gordon 方程式を含む非線形波動方程式

$$\phi_{uv}=F(\phi)$$

で可積分なものを分類し，Tzitzéica 方程式を再発見した（[14]）．アファイン球面についても調和逆平均曲率曲面， Bianchi 曲面と同様な一般化が考えられる．

簡単のため $K<0$ のときを考え，支持関数を d とし

$$\rho=-\frac{1}{4}\log\left(-\frac{K}{d^4}\right)$$

とおく．(u,v) を漸近線座標， $hdudv$ を中心アファイン計量， adu^3， bdv^3 を 3 次微分とすると，Gauss 方程式は

$$\begin{cases} F_{uu}=\left(\dfrac{h_u}{h}+\rho_u\right)F_u+\dfrac{a}{h}F_v, \\ F_{uv}=-hF+\rho_vF_u+\rho_uF_v, \\ F_{vv}=\left(\dfrac{h_v}{h}+\rho_v\right)F_v+\dfrac{b}{h}F_u \end{cases} \tag{7.1}$$

と表される．この両立条件は

$$\begin{cases} (\log\ h)_{uv} = -h - \dfrac{ab}{h^2} + \rho_u\rho_v, \\ a_v + \rho_u h_u = \rho_{uu} h, \\ b_u + \rho_v h_v = \rho_{vv} h \end{cases} \tag{7.2}$$

である.

ρ が一定のとき, (7.2) は

$$\begin{cases} (\log\ h)_{uv} = -h - \dfrac{ab}{h^2}, \\ a_v = b_u = 0 \end{cases} \tag{7.3}$$

となり変換

$$a \to \lambda a,\ b \to \lambda^{-1} b \quad (\lambda \in \mathbf{R}^{\times})$$

で不変であるから, $a \neq 0$ または $b \neq 0$ ならば中心アファイン計量を保つ変形が存在する. また, 固有な場合は a, b はそれぞれ 0 とならない u, v のみの関数となるから, 座標変換を行うことにより a, b は一定で 0 でないとしてよい. 特に, $ab=1$ とし改めて $\lambda = a$ とおくと, (7.1) は

$$\begin{cases} F_{uu} = \dfrac{h_u}{h} F_u + \dfrac{\lambda}{h} F_v, \\ F_{uv} = -hF, \\ F_{vv} = \dfrac{h_v}{h} F_u + \dfrac{\lambda^{-1}}{h} F_u \end{cases} \tag{7.4}$$

となる. また,

$$h = -e^{\phi}$$

とおくと, (7.3) は Tzitzéica 方程式と同値となる. アファイン球面の例として中心アファイン計量の曲率が平坦なものを考えると, 双曲放物面および

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid (x_1^2 + x_2^2) x_3 = 1\}$$

により与えられる曲面が得られる ([26]). 更に, 中心アファイン計量の曲率が一定のアファイン球面の例として上のもの以外に一葉双曲面が得られる ([31]).

同じ領域からの写像 F, $\bar{F}$ により表されるアファイン球面を 2 つ考え, 接線叢が与えられ, F, $\bar{F}$ はともに (7.4) の解であると仮定する. このとき, λ と異なる $\mu \in \mathbf{R}$,

$$\begin{cases} \phi_{uu}=\dfrac{h_u}{h}\phi_u+\dfrac{\mu}{h}\phi_v, \\ \phi_{uv}=-h\phi, \\ \phi_{vv}=\dfrac{h_v}{h}\phi_v+\dfrac{\mu^{-1}}{h}\phi_u \end{cases}$$

をみたす関数 ϕ が存在し

$$\bar{F}=F+\frac{2}{(\lambda-\mu)h}\left(\lambda\frac{\phi_u}{\phi}F_v-\mu\frac{\phi_v}{\phi}F_u\right), \bar{h}=h+2(\log\ \phi)_{uv}$$

となる．この変換は特に Tzitzéica 変換とよばれる．

中心アファイン曲面は

$$\rho_{uv}=0$$

をみたすとき，中心アファイン極小曲面とよぶ（[25, 35]）．このとき，座標変換を行うことにより

$$\rho=c_1u+c_2v+c_3\ \ (c_1, c_2, c_3\in\mathbf{R})$$

としておくと，(7.2) は

$$\begin{cases} (\log\ h)_{uv}=-h-\dfrac{ab}{h^2}+c_1c_2, \\ a_v+c_1h_u=0, \\ b_u+c_2h_v=0 \end{cases}$$

となり変換

$$a\to\lambda a, b\to\lambda^{-1}b, c_1\to\lambda c_1, c_2\to\lambda^{-1}c_2\ \ (\lambda\in\mathbf{R}^{\times})$$

で不変であるから，中心アファイン計量を保つ変形が存在する．Tzitzéica 変換は中心アファイン極小曲面の場合にまで一般化できる（[30]）．中心アファイン極小球面についても上と同様に特徴的性質をもつものを考えると，中心アファイン計量の曲率が一定で既に［25, 26, 31］に見られるものとは異なる例として

$$\left(\frac{e^{-(u+v)}}{u+v}\cos(u-v), \frac{e^{-(u+v)}}{u+v}\sin(u-v), 1-\frac{1}{u+v}\right)$$

と表される曲面が得られる（[19]）．

参考文献

[1] A. V. Bäcklund, *Über Flächentransformationen*, Math. Ann. **9** (1875), 298–320.

[2] L. Bianchi, *Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali*, Ann. Mat. (2) **18** (1890), 301–358.

[3] L. Bianchi, *Complementi alle ricerche sulle superficie isoterme*, Ann. Mat. Pura Appl. **12** (1905), 19–54.

[4] A. I. Bobenko, *Surfaces of constant mean curvature and integrable equations*, (Russian) Uspekhi Mat. Nauk **46** (1991), no.4 (280), 3–42, 192; translation in Russian Math. Surveys **46** (1991), no.4, 1–45.

[5] A. I. Bobenko, *Surfaces in terms of 2 by 2 matrices. Old and new integrable cases*, Harmonic maps and integrable systems, Aspects Math., E23, Vieweg, Braunschweig, 1994, pp.83–127.

[6] A. Bobenko and U. Eitner, *Bonnet surfaces and Painlevé equations*, J. reine Angew. Math. **499** (1998), 47–79.

[7] A. Bobenko, U. Eitner and A. Kitaev, *Surfaces with harmonic inverse mean curvature and Painlevé equations*, Geom. Dedicata **68** (1997), no.2, 187–227.

[8] O. Bonnet, *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables*, J. Éc. Polyt. **42** (1867), 72–92.

[9] P. Calapso, *Sulle superficie a linee di curvatura isoterme*, Rend. Circ. Mat. Palermo **17** (1903), 275–286.

[10] M. P. do Carmo and M. Dajczer, *Helicoidal surfaces with constant mean curvature*, Tôhoku Math. J. (2) **34** (1982), no.3, 425–435.

[11] B. Chen, Geometry of submanifolds, Pure and Applied Mathematics, No.22. Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.

[12] W. Chen and H. Li, *Bonnet surfaces and isothermic surfaces*, Results Math. **31** (1997), no.1-2, 40–52.

[13] A. G. Colares and K. Kenmotsu, *Isometric deformation of surfaces in* $\mathbf{R}^3$ *preserving the mean curvature function*, Pacific J. Math. **136** (1989), no.1, 71–80.

[14] R. K. Dodd and R. K. Bullough, *Polynomial conserved densities for the sine-Gordon equations*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **352** (1977), no.1671, 481–503.

[15] J. Dorfmeister, F. Pedit and H. Wu, *Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces*, Comm. Anal. Geom. **6** (1998), no.4, 633–668.

[16] A. Fujioka, *Surfaces with harmonic inverse mean curvature in space forms*,

Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), no.10, 3021–3025.

[17] A. Fujioka, *Bianchi surfaces with constant Chebyshev angle*, Tokyo J. Math. **27** (2004), no.1, 149–153.

[18] A. Fujioka, *Bonnet surfaces in four-dimensional space forms*, Internat. J. Math. **15** (2004), no.10, 981–985.

[19] A. Fujioka, *Centroaffine minimal surfaces with constant curvature metric*, to appear in Kyungpook Math. J.

[20] A. Fujioka and J. Inoguchi, *Bonnet surfaces with constant curvature*, Results Math. **33** (1998), no.3–4, 288–293.

[21] W. C. Graustein, *Applicability with preservation of both curvatures*, Bull. Amer. Math. Soc. **30** (1924), 19–23.

[22] J. N. Hazzidakis, *Biegung mit Erhaltung der Hauptkrümmungsradien*, J. reine Angew. Math. **117** (1897), 42–56.

[23] H. B. Lawson Jr., *Complete minimal surfaces in S^3*, Ann. of Math. (2) **92** (1970), 335–374.

[24] D. Levi and A. Sym, *Integrable systems describing surfaces of nonconstant curvature*, Phys. Lett. A **149** (1990), no.7–8, 381–387.

[25] H. Liu and C. Wang, *The centroaffine Tchebychev operator*, Festschrift dedicated to Katsumi Nomizu on his 70th birthday (Leuven, 1994; Brussels, 1994). Results Math. **27** (1995), no.1–2, 77–92.

[26] M. A. Magid and P. J. Ryan, *Flat affine spheres in $\mathbf{R}^3$*, Geom. Dedicata **33** (1990), 277–288.

[27] U. Pinkall and I. Sterling, *On the classification of constant mean curvature tori*, Ann. of Math. (2) **130** (1989), no.2, 407–451.

[28] I. M. Roussos, *Principal-curvature-preserving isometries of surfaces in ordinary space*, Bol. Soc. Brasil. Mat. **18** (1987), no.2, 95–105.

[29] W. K. Schief, *Bäcklund transformations for the (un)pumped Maxwell-Bloch system and the fifth Painlevé equation*, J. Phys. A **27** (1994), no.2, 547–557.

[30] W. K. Schief, *Hyperbolic surfaces in centro-affine geometry. Integrability and discretization*, Integrability and chaos in discrete systems (Brussels, 1997), Chaos Solitons Fractals **11** (2000), no.1–3, 97–106.

[31] U. Simon, *Local classification of two-dimensional affine spheres with constant curvature metric*, Differential Geom. Appl. **1** (1991), 123–132.

[32] A. Sym, *Soliton surfaces and their applications (soliton geometry from spectral problems)*, Geometric aspects of the Einstein equations and integrable sys-

tems (Scheveningen, 1984), 154–231, Lecture Notes in Phys., **239**, Springer, Berlin, 1985.

[33] H. Takeuchi, *Isometric deformation of surfaces in the hyperbolic 3-manifold preserving the mean curvature,* Tokyo J. Math. **18** (1995), no.1, 247–258.

[34] G. Tzitzéica, *Sur une nouvelle classe de surfaces*, C. R. Acad. Sci. Paris **144** (1907), 1257–1259 ; **146** (1908), 165–166.

[35] C. Wang, *Centroaffine minimal hypersurfaces in R^{n+1}*, Geom. Dedicata **51** (1994), no.1, 63–74.

[36] H. C. Wente, *Counterexample to a conjecture of H. Hopf*, Pacific J. Math. **121** (1986), no.1, 193–243.

[37] S. Yau, *Submanifolds with constant mean curvature.* I, Amer. J. Math. **96** (1974), 346–366.

（一橋大学大学院経済学研究科助教授）