

デリバティブ再入門

(第3回)

Black-Scholes方程式とその周辺

石村 直之

目 次

1. はじめに
2. オプション再訪
3. Black-Scholes方程式をめぐって
4. 非線形の問題
5. 終わりに

Black-Scholes方程式は、金融工学あるいは数理ファイナンス全体を通して最もよく知られた方程式である。今回はこの著名なBlack-Scholes方程式に関連する話題を再訪する。まずデリバティブ理論のうちでも、一つの主要な対象を成す金融オプションに関して復習する。無裁定価格理論を用いて得られる評価を列挙する。次にBlack-Scholes方程式の導出と、ヨーロッパ・コールオプションに対する厳密な価格評価公式を導く。数理として煩雑にならないような範囲で述べた。最後に、アメリカン・プットオプションの評価、取引費用を考慮した場合、volatility変動モデルなど、非線形なBlack-Scholes方程式となる話題について簡単に触れる。

1. はじめに

Black-Scholes方程式は、金融工学あるいは数理ファイナンスにおいて最も著名な方程式である、と述べて大きな誤りではない。特にその厳密解の一つ、ヨーロッパ・コールオプションの評価公式とともに、他の分野の人々にとっても名高い方程式となっている。自然科学系の研究者にとって、何々理論の創始者と評価されるのは、恐らく大きな夢あるいは願望であろうが、自分の名前で

呼ばれる方程式が、重要な研究対象として認知されるのも、それに劣らず高く称賛される。Black-Scholes方程式は、金融工学・数理ファイナンスの扉を開けたという意味でも、確かに歴史に残るだろう方程式である。

もちろん現在においては、この方程式が基礎とする変動モデル、対数正規過程は実情に合わないとも認識されている。しかし厳密な価格評価公式が導出されたことは、後の理論の比較対象となるだけでも、やはり強いのである。さらに加えて、今



石村 直之 (いしむら なおゆき)

一橋大学 大学院経済学研究科教授。1989年東京大学大学院理学系研究科修士課程修了。同年4月、東京大学理学部数学教室助手。東京大学大学院数理学研究科助手、一橋大学経済学部助教授を経て、2005年4月より現職。主な著書に『経済数学』（新世社、2003年、武隈慎一教授と共著）がある。

回の最後で、実際の世界に合わせるような努力を幾つか紹介するが、それらは概して方程式が複雑になり過ぎ、厳密解は期待できそうにない。他の研究分野でもしばしば観察されることだが、最初のBlack-Scholes評価公式だけがあまりに見事に求められたのである。そのような気分的一端でも感じていただけたら幸いである。

2. オプション再訪

(1) オプション

証券アナリストの皆様にとっては恐らくいまさらながら、の話題であるが、まずは標準的な金融オプションについて復習しよう。実は前回の二項モデルについて述べたときも、実例としてオプションはあえて用いなかった。その理由は、オプションの考え方や仕組みそのものは、数理モデルに何を採用するかどうかといったモデリングの問題とは全く関係がなく、それ自身で存在する独立した対象であることをはっきりさせるためである。金融工学や数理ファイナンスが地歩を固めたのは、数理モデルを用いて、これらいわば普遍的な存在であるオプションの指標となり得る価格評価を論理付けて与えたことにある。

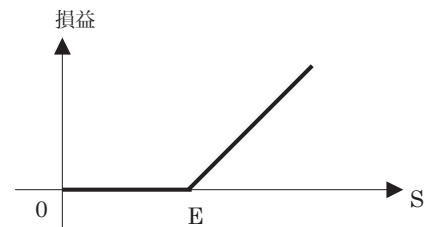
さて記号を定める作業とともに、オプションについて言葉で述べれば次のようになる。すなわち、その価格 S が変動する金融商品を、将来のある時点 T において、現時点 t ($t < T$) で取り決めた価格 E で取引する権利のことを、 S を原資産 (underlying asset) とするオプション (option) という。 T を満期日 (maturity date)、 E を行使価格 (exercise price) という。取引する権利が買う権利であるものをコールオプション (call option) といい、売る権利であるものをプットオプション (put option) という。また権利行使可能なのが満

期日においてのみ許されるオプションをヨーロッパ型といい、満期日までのいつでも権利行使が可能なオプションをアメリカ型という。この中間型のオプションもある。よって例えばアメリカン・プットオプションとは、満期日までのいつでも行使が可能な売る権利のことである。実際には、売買されるのは通常は取引時間中に制限されるので、アメリカ型はもちろん理想化していることになる。

オプションはその名の通り権利 (right) すなわち選択権 (option) であって義務 (obligation) ではない。よってオプションの保有者 (holder) は、満期日 T においては損をすることは全くない。というのは損につながるような場合は、その権利を破棄し行使しなければよいからである。リスクはオプションの提供者 (writer) が負う。実際、コールオプションの保有者は、満期日 T においてもし $S > E$ となるならば、市場価格が S であるものを行使価格 E で購入できるため、オプションの権利を行使し、市場価格で購入する場合に比べて $S - E$ の利益を得る。一方 $S \leq E$ となるならば、市場価格の方が安価なのでオプションの権利を行使せずオプションからの利益は 0 である。よって、コールオプション保有者の満期日における損益は

$$\max\{S - E, 0\} = \begin{cases} S - E & (S > E) \\ 0 & (S \leq E) \end{cases}$$

であり、これを図に描くと



となる。これをコールオプションのペイオフ (pay off) 関数という。

ところで、満期日で正の価値となる金融商品

は、現時点で何も費用なしに購入することはできない。なぜならそれは、現時点で0の価値のものが満期日に確率1で正の価値という裁定機会となるからである。よって現時点では何らかの契約料 (premium) を支払ってこの金融商品、今の場合はコールオプションを購入することとなる。この契約料がどのように評価されるかを、論理的に求めるのがオプション価格評価の問題である。オプションの現時点の価格から、満期日の価格を引いたものがオプションの契約料となるのである。

オプション価格評価の問題には、 S の価格変動モデルを設定する必要がある。二項モデルはその一つの例である。Black-Scholes-Merton理論では、標準ブラウン運動を含む対数正規過程を用いる。その結果が著名なヨーロッパ・コールオプションに対するBlack-Scholes評価公式である。しかしそれを述べる前に、 S の価格変動モデルとは無関係に成立するオプションの価格範囲、いわゆるオプションの固有価値の評価を考えよう。

(2) オプションの固有な価値

まず記号を決めておく。原資産が S である満期日 T 、行使価格 E のヨーロッパ・コールオプションの、現時点 $t(t < T)$ における価格を $C(S, t; E)$ あるいは $C(S, t)$ と書く。対応するアメリカン・コールオプションの価格は小文字を用いて $c(S, t; E)$ あるいは $c(S, t)$ と書く。同様にプットオプションの価格を、ヨーロッパ型、アメリカ型それぞれ $P(S, t; E)$ 、 $p(S, t; E)$ あるいは $P(S, t)$ 、 $p(S, t)$ と表す。また原資産には配当 (dividend) はないものとする。

さらに以下では安全な利子率を r で表し、連続

複利で考えるものとする。連続複利とは次のように極限操作で与えられる。安全な年率 r で1年運用すれば、1単位の債券は $1+r$ となる。これを半期複利で運用すれば、半期の利子率は $r/2$ なので、やはり1単位の債券を1年運用した場合、半期が2度繰り返され $\left(1+\frac{r}{2}\right)^2$ となる(注1)。同様に四半期複利の1年運用ならば $\left(1+\frac{r}{4}\right)^4$ となり、 n 半期複利の1年運用ならば $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$ である。こ

こで $n \rightarrow \infty$ とすれば、微分積分学での重要な極限値 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ より、1単位の債券は1年後に

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n/r}\right)^{\frac{n}{r}} = e^r$$

となる。すなわち、満期日 T において1となる債券の現時点 $t(t < T)$ における割引価格は $e^{-r(T-t)}$ である。この利子率を連続複利という。

(非負性)

先にオプションの契約料を意味付ける際に述べた理由と同様に、裁定機会を与えないため、オプションの価格は非負である。すなわち

$$C \geq 0, \quad c \geq 0, \quad P \geq 0, \quad p \geq 0 \quad (2-1)$$

(ヨーロッパ型とアメリカ型)

満期日および行使価格が同じならば、アメリカ型の方がヨーロッパ型より価値が高い。なぜなら権利行使の可能性がアメリカ型の方が柔軟だからである。よって

$$c(S, t; E) \geq C(S, t; E) \quad p(S, t; E) \geq P(S, t; E) \quad (2-2)$$

(上からの評価)

アメリカン・コールオプションは原資産を購入する権利に過ぎないため、原資産の価値を上回ることはない。よって(2-2)と合わせて

(注1) これはもちろん近似計算である。年率 r と等しくなる半期の利率を q とすれば、 $(1+q)^2 = 1+r$ すなわち、 $q = \sqrt{1+r} - 1$ である。 r が小さいときの近似 $\sqrt{1+r} \approx 1 + \frac{r}{2}$ を用いれば $q = \frac{r}{2}$ を得る。

$$S \geq c(S, t; E) \geq C(S, t; E)$$

これより特に、オプションの非負性（2-1）を用いると、原資産が0のときコールオプションの価値も0であることが分かる。

$$c(0, t; E) = C(0, t; E) = 0$$

アメリカン・プットオプションの価値は、原資産が0のとき行使価格に等しい。さらに原資産が正のときも行使価格を上回ることはない。よって（2-2）と合わせると

$$E \geq p(S, t; E) \geq P(S, t; E)$$

実はヨーロッパ・プットオプションに関してはさらに強く評価できる。というのはヨーロッパ型は満期日においてのみ権利行使可能で、そこではプットオプションの価値は行使価格を超えない。よって現時点では、安全な利子率で割り引いて

$$Ee^{-r(T-t)} \geq P(S, t; E)$$

となることが分かる。

（下からの評価）

ヨーロッパ・コールオプション1単位と、その行使価格に等しい債券を保有するポートフォリオ（portfolio）、すなわち投資戦略を考える。その満期日における価値は

$$C(S, T; E) + E = \max\{S - E, 0\} + E \geq S$$

よって現時点では、無裁定価格理論より

$$C(S, t; E) + Ee^{-r(T-t)} \geq S$$

となる。最右辺では同じ S を用いているが、現時点と満期日とは変動し得る量であることに注意しよう。この評価を、オプションの非負性（2-1）と合わせて考えると

$$c(S, t; E) \geq C(S, t; E) \geq \max\{S - Ee^{-r(T-t)}, 0\}$$

特に、 $S - Ee^{-r(T-t)} \geq S - E$ であるためアメリカン・コールオプションは満期前に権利行使する理由がない。なぜならアメリカン・コールオプションを現時点で権利行使してもそのペイオフ関数は $\max\{S - E, 0\}$ であるから利益にならないのである。

次に、1単位のヨーロッパ・プットオプションと1単位の原資産を保有する投資戦略を考える。満期日における価値は

$$P(S, T; E) + S = \max\{E - S, 0\} + S \geq E$$

となるので、現時点では

$$P(S, t; E) + S \geq Ee^{-r(T-t)}$$

すなわち（2-1）と合わせて

$$P(S, t; E) \geq \max\{Ee^{-r(T-t)} - S, 0\}$$

アメリカン・プットオプションの場合は、権利行使がいつでも可能なため、現時点においても満期日のペイオフ関数を上回るはずである。よって

$$p(S, t; E) \geq \max\{E - S, 0\}$$

（プット・コール・パリティ）

最後にコールオプションとプットオプションの間に成り立つ関係式、プット・コール・パリティ（put-call parity）について触れる。これはヨーロッパ型アメリカ型その他の型にかかわらず成立する関係式である。

それぞれ1単位の原資産 S とプットオプション P を購入し、やはり1単位のコールオプション C を売却する投資戦略 Π を考える。つまり

$$\Pi = S + P - C$$

満期日 T における Π の価値は

$$\Pi(T) = S + \max\{E - S, 0\} - \max\{S - E, 0\} = E$$

となる。最後の等式は、 $S > E$ となる場合、 $S \leq E$ となる場合のそれぞれを調べれば、確かに E となることが分かる。やはり無裁定価格理論より、現時点においては $\Pi = Ee^{-r(T-t)}$ 、すなわち

$$S + P(S, t) - C(S, t) = Ee^{-r(T-t)} \quad (2-3)$$

これをプット・コール・パリティという。この関係式から、例えばプットオプションの評価は対応する満期日と行使価格が同じコールオプションの評価から導かれることが理解される。

(3) オプションを利用する

ここでオプション取引の理想的な利用例を考えてみよう。これは仮想的なもので、実際に行われているわけではない。

登場するのは稲作農家である。現在は田植えの時期6月である。昨今頻発する異常気象に鑑み、今年は冷夏になるのではないかと疑念を抱いている。あるいは昨年幸いにも台風の被害がなかったため、今年あたりは台風に襲われるのではないかと案じている。しかし一方で、これらの悪い予想はことごとく外れ、今年も例年にまして豊作となるのではないかと、という期待もある。気象庁の長期予報は、経験上あまり当てにならないことは分かっているが、今年の夏は例年並みの気温、台風も少ないとのことである。

この農家は、細かな世話をいわずに行い栽培技術には自信を持っている。よって夏の天候不順で全国的に不作となり、米価が上がる状況はそれほど気にならない。むしろ、歓迎すべき夏の好天続きとその結果としての豊作により、米価が値崩れを起こす方がより心配である。そこでこの農家は、収穫予定米の一部を担保と考え、ある米の仲介業者からプットオプションを購入した。あるいは別の仲介業者にコールオプションを提供することにした。原資産は米およびその価格であり、満期日は収穫時の10月、ヨーロッパ型のオプションである。もちろん、このような取引を実行してくれる業者が存在すると仮定しての話である。

プットオプションは価格が下落したとき利益を生む(in-the-moneyという)ため、この農家は、米価が高騰した場合の利益を放棄する代わりに、米価が値崩れした場合のリスクを軽減したことに

なる。オプションの利用法としては一種の理想ではないであろうか。

実は例として米を取り上げたのには理由がある。それは、江戸時代の大阪、堂島米会所では、18世紀前半から今日の先物取引の原型が現れ、1730年には幕府から公に許されたという(注2)。江戸時代は、現在より天候に対して無防備であり、天候を原因として米価が乱高下するリスクも大きかったと想像されるが、当時の日本人はそのようなリスクに感性豊かに対処していたのである。それなのに現在の日本で、商品先物取引に米が上場されていないのは不思議といえば不思議である。

3. Black-Scholes方程式をめぐって

(1) 方程式の導出

Black-Scholes方程式は、オプション価格理論のみならず、金融工学あるいは数理ファイナンス全体を通じて著名な方程式である。しかしその導出には、正確に行おうとすればItoの公式をはじめとして多くの予備知識が必要である。ここでは、前回までに述べたブラウン運動と二項モデルの考え方を基にして、厳密性にはこだわることなく、発想法を中心に導出を試みたい。

基本となる変動モデルは、次の対数正規過程である(注3)。すなわち原資産 S の確率過程が

$$dS = S(\mu dt + \sigma dW) \quad (3-1)$$

と与えられるとする。ここで μdt はdrift項で、考えている期間での上昇傾向($\mu > 0$)とか下降傾向($\mu < 0$)を表す。 σ はvolatility、 dW はもちろん標準ブラウン運動である。前回の二項モデルで触れたように、このモデルでは S が負の値になることは

(注2) 大阪証券取引所ホームページ (<http://www.ose.or.jp>) での取引所前史の記載を参照。

(注3) なぜこの過程を対数正規過程と呼ぶかというと、(3-1)を書き直せば $d(\log S) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW$ となり、対数値が標準ブラウン運動の線形関数となるからである。

ない。Itoの補題 $(dW)^2 = dt$ を用い、さらに $(dt)^2, dt dW$ などの微少項を無視すれば、(3-1)式の両辺を二乗して

$$(dS)^2 = \sigma^2 S^2 (dW)^2 = \sigma^2 S^2 dt \quad (3-2)$$

が得られる。

二項モデルのときと同じように、ヨーロピアン・コールオプション $C(S, t; E)$ を、原資産 S と債券 B で複製しようとする。つまり

$$C = \Delta S + B \quad (3-3)$$

ここで Δ は原資産を保有する単位であり、債券 B は、安全な利子率を r に対して $dB = rBdt$ を満たす。(3-3)式の変動を考える。詳しくは注に回すが(注4)、結果は

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} (dS)^2 \right) dt + \frac{\partial C}{\partial S} dS = \Delta dS + rBdt$$

両辺において変動リスクを含む項、すなわちブラウン運動を含む項は

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} \quad (3-4)$$

とすれば相殺されなくなる。このとき dt の係数を取り出し、(3-3)式を用いれば

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rB = r(C - \Delta S) = rC - rS \frac{\partial C}{\partial S}$$

整理するとBlack-Scholes方程式を得る。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \quad (3-5)$$

これを、ヨーロピアン・コールオプションの満期条件 $C(S, T) = \max\{S - E, 0\}$ の下で解くのである。解くとは、方程式を満たす関数、すなわち方程式の解を求めることを意味する。

この導出において、(3-4)式 $\Delta = \partial C / \partial S$ の計算には、一瞬前の S の値を用いるとする。二項モデルでは1期間前の値を用いたことを思い出して

いただきたい。ポートフォリオを連続的に組み換えるという動的ヘッジ (dynamic hedge) を行うことに対応する。今の場合は特にデルタヘッジ (delta hedge) と呼ばれている。このようにして自己充足的ポートフォリオの考え方を、連続変数の場合に拡張したのである。

(2) Black-Scholes評価公式

1973年に公表されたヨーロピアン・コールオプションに対するBlack-Scholesの評価公式については、既に、数理ファイナンス関連のありとあらゆる書物で取り上げられている。しかし結果のみ提示されることがほとんどであり、導出が述べられている書物はそう多くない。理由の一つは、もちろんそこで用いられる数学が、どのような手法で導くにせよ、ある程度の準備が必要なためである。導出まで丁寧に解説した蓑谷教授の好著(2000年)や三浦教授の良書(2000年)は珍しい部類である。ここでも詳しい計算は注に回し(注5)、結果のみを述べておく。ヨーロピアン・コールオプションの価格に対するBlack-Scholes方程式(3-5)の解は

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$$

で与えられる。ただし

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy$$

は標準正規分布の累積密度関数を表す。また

$$d_1 = \frac{\log(S/E) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\log(S/E) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

と定めた。

(注4) Taylor展開と(3-2)式より $dC = \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} (dS)^2 = \left(\frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial C}{\partial S} dS$

ヨーロピアン・コールオプションに対するBlack-Scholes方程式の厳密解が求められたことは、問題が本質的に線形であったことが大きい。方程式が線形であるとは、方程式を満たす解の和やその定数倍もまた方程式を満たす解となるときにいう。微分方程式のうちでも最も基本的なものである。今の場合、Black-Scholes方程式に対してうまく変数変換を行えば、第1回でも触れた標準的な一次元熱方程式に変換される。この熱方程式に対しては厳密解の公式が知られている。得られた厳密解を、逆に変換すれば評価公式となるのである。熱方程式への変換を最初に見いだした業績は、やはり卓越した結果である。しかし一度分かっしまえば、変形そのものは日本の自然科学系での学部演習の水準である。

ともあれ厳密解は強い。基本となるモデルの対数正規分布が、実務と合わないことは認識されている。しかし他のモデルを用いれば、その場合は非線形問題となることが多いが、このような厳密解を導出することは一般にはあまり期待できない。Black-Scholes評価公式が、基本的な結果として常に参照されるのは当然だろう。次章ではBlack-Scholes方程式にまつわる非線形の問題を幾つか取り上げる。

4. 非線形の問題

(1) アメリカンオプションと自由境界問題

Black-Scholes-Mertonによるオプション評価理論が建設される当初から、アメリカンオプションの評価問題は難しいことが認識されていた。特にアメリカン・プットオプションには早期権利行使の可能性があり、これが自然科学系においては非線形現象における難問として知られる自由境界問題 (free boundary problem) に相当するからである。

まずアメリカン・プットオプションには満期前に権利行使する可能性があることを見よう。オプションを現時点で権利行使したときのペイオフ関数は $\max\{S - E, 0\}$ なので、オプションの市場価値はこれを上回るはずである。しかるにプット・コール・パリティ (2-3) より

$$p(S, t) = Ee^{-r(T-t)} - S + c(S, t)$$

$c(0, t) = 0$ なので、 S の価格が小さいときは、 $t < T$ ならば $p(S, t) < E - S$ となるのである。すなわち、アメリカン・プットオプションは満期前に権利を行使しなければ不利益なのである。

さて、満期前に権利行使されることは、Black-Scholes方程式を解くに際して新たにどのような問題を引き起こすのだろうか。それは方程式が設定される領域までもが未知量となる、という問題である。満期前権利行使される点を $S = S_f(t)$ とすれば、これが新たに求めるべき未知関数となるの

(注5) Black-Scholes方程式 (3-5) に対して、まず変数変換 $C(S, t) = Ee^{ax+bt}u(x, \tau)$ を行う。ただし、 $k = 2r/\sigma^2$

とし、さらに $x = \log(S/E)$, $\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$, $a = -\frac{1}{2}(k-1)$, $b = -\frac{1}{4}(k+1)^2$ と定めた。このとき計算により (3-5) は $\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ in $-\infty < x < \infty$, $\tau > 0$, $u(x, 0) = \max\{e^{(k+1)x/2} - e^{(k-1)x/2}, 0\}$ となる。最後の式は、元の満期条件 $C(S, T) = \max\{S - E, 0\}$ に上の変数変換を行った結果得られた初期条件である。よって、空間一次元の熱方程式に対する初期値問題に変換されたので、よく知られた基本解の方法を用いて解くことができる。すなわち

$$u(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-(x-y)^2/4\tau} u(y, 0) dy = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-(x-y)^2/4\tau} (e^{(k+1)y/2} - e^{(k-1)y/2}) dy$$

計算を実行し、元の変数へと逆の変換を行えばBlack-Scholes評価公式を得る。

である。この $S_f(t)$ を自由境界という。下付きの添え字 f はfreeに由来し、固定されていないという意味である。アメリカン・プットオプションに対するBlack-Scholes方程式の解を求めるときは、プットオプションの価格と共にこの自由境界の二つを同時に見いだすことになる。このような問題を自由境界問題という。典型的な非線形の問題である。

自由境界問題は、そもそも氷が解けて水となるような状況のモデル化として提出された。これをシュテファン(J.Stefan 1835-1893)問題という。簡単のため一次元で考えると以下ようになる。これを一相シュテファン問題という。

長い筒状の容器に氷が詰められており、その一端が熱源に接している（下掲図参照）。氷が解けて水の領域と混在しているとする。その境界において、氷から水へと変化している。水の領域では温度が未知関数となり、それは第1回で触れた線形の熱方程式で記述される。水と氷との境界も未知量の自由境界であり、ここにおいて熱のやり取りがなされる。

全体として、熱方程式、自由境界の位置、および自由境界における熱のやり取りを意味する関係式、これらで構成される非線形問題となるのである。ちなみにアメリカン・プットオプションの問題でも、自由境界において価格がなめらかに接続される（smooth pasting）という条件が課される。



自然界には、自由境界問題として設定される現象が実に多い。例えば半導体の製造過程における半導体の結晶成長では、成長する結晶界面の解析は重要な問題であるが、それは自由境界問題として定式化されることが多い。結晶界面が自由境界であり、そこで反応が起こるのである。また、河川のダムにおいて、貯水された水はダムの堤防に染み込んでいくが、その現象も自由境界問題である。染み込んだ水の表面が自由境界である。自然現象の自由境界問題に関して、その数値解法と共に解説された専門書として河原田教授の著書（1989年）を挙げておく。ともあれ自由境界問題は、このように自然現象では重要な問題であったため、自然科学から金融工学に取り組み始めた研究者には、まずはこのアメリカン・プットオプションの評価問題に興味を覚える者も多いようである。そのためか現在でも、満期前行使境界近くの価格の挙動を詳しく解析した研究論文などが公表されている。

(2) 取引費用を考慮した場合

取引費用は、実務の上では極めて重要な問題である。また実際に投資を行う場合も、取引費用は意外に無視できない必要経費である。しかし金融工学の理論においては、取引費用の取り扱いは大変な困難を引き起こす。その大きな理由は、ポートフォリオの組み替えを連続的に行うという動的ヘッジの考え方にある。ポートフォリオの組み替えごとに取引費用が発生するとすれば、連続的に、すなわち無限に小さい時間ごとに幾らか正の費用が加算されるので、合計では無限の費用が必要になってしまう。これは明らかに不合理である。

このような困難を回避しつつ取引費用を考慮するモデルとして幾つか提出されているが、その一つにLeland [1985] によるものがある。その基

本的な考えは、0への極限を考えない微小な時間間隔ごとにポートフォリオの組み替えを行う、と動的ヘッジを変更するものである。これで無限の費用になる矛盾を避けた。しかし結果として、Black-Scholes方程式は非線形になる。その詳しい導出は行わないが、非線形になる理由は、取引費用が売買に伴って、すなわちポートフォリオ組み替えのために資産を売却する場合でも購入する場合でも、どちらでも加算されることにある。取引費用は加算されるのみ、と一方向の影響なのである。

取引費用を考慮した非線形Black-Scholes方程式の解析に対しては数値解法と共に解説した拙論 (Ishimura and Imai [2008]) を挙げておく。われわれのそれまでの研究をまとめたものである。

(3) Volatility変動モデル

Black-Scholes評価公式において用いられている変数や定数は、原資産 S 、現時点から満期日までの残存期間 $T-t$ 、行使価格 E 、安全利子率 r 、そしてvolatility σ である。このうちvolatilityが最も厄介な定数である。実際、volatilityのみが前もって設定することができず、何らかの手法により後で求めることになる。主に次の二つの値がよく用いられる。一つは、volatilityが、ブラウン運動モデルでは変動の激しさを表す量であることに注意して、過去の時系列データの変動から推定したものである。このように求めた値をhistorical volatilityと言う。しかしこれは、推定期間により異なる値となり得るし、また現在の評価に用いるには単なる予測値を与えるに過ぎないものである。

ほかにはimplied volatilityがある。これは、市場で実際に取引されているオプションの価格に対して、逆にBlack-Scholes評価公式がそのような値となるようにvolatilityを求めたものである。このとき、原資産 S 、残存期間 $T-t$ 、行使価格 E 、安全

利子率 r の関数としてvolatility σ が与えられる。別の述べ方をすれば、オプションの市場価格にimplyされたvolatilityということである。市場データからimplied volatilityを計算する手法は幾つか開発されている。

さて、行使価格を横軸に、implied volatilityを縦軸にしてグラフを描くと、通常は原資産 S の値 (at-the-money) を大体の底にした凸関数、つまり原資産価格から離れるにつれimplied volatilityが大きくなる現象が観察される。これをニヤリとした口の形になぞらえてvolatility smileと呼ぶ。もちろんBlack-Scholes方程式では、グラフは水平直線となることを仮定している。Volatilityが大きくなれば評価価格も大きくなるので、市場ではat-the-moneyから離れるほどオプションをより高く評価していることになる。

そこで、最初からvolatilityを原資産変動とは別に与えられる確率過程とするモデルが考えられている。幾つかの差異はあるが、これらのモデルを総称してvolatility変動 (stochastic volatility) モデルという。やはり一般に方程式は非線形となり、もはや厳密解は期待できない。このvolatility変動モデルについては、例えばFouque *et al.* [2000] を参照されたい。

5. 終わりに

(1) まとめ

今回は著名なBlack-Scholes方程式に関連する話題を再訪した。まず、金融オプションに関して、無裁定価格理論から導かれる各種評価を述べた。正確な価格評価式には至らないが、オプションの価値がとり得る値の範囲をある程度に絞ることができる。この部分は多くの教科書にも述べられている。齋藤教授の名高い著書 (2000年) のうち

にも解説されている。

次にBlack-Scholes方程式を導出した。ヨーロッパ・コールオプションに対しては、変数変換により空間一次元の熱方程式に変形でき、それは基本解の方法を用いて解くこと、すなわち厳密解を求めることが可能である。基本解の方法は、確率過程論でのFeynmann-Kacの定理と同等の、偏微分方程式論ではよく知られた手法である。ともあれ、偏微分方程式論の色合いが濃いBlack-Scholes [1973] の、および確率過程の手法を最初に導入したMerton [1973] の両原論文は、今でも重要性を失っていない。

最後にBlack-Scholes方程式の拡張、そのうちでも非線形問題となるものを幾つか取り上げた。具体的にはアメリカン・プットオプションの評価問題、取引費用を考慮する問題、volatilityにかかわる問題である。これらの問題では困難さが急に増し、厳密解が一般には求められない。ヨーロッパ・コールオプションに対する評価公式は、まさに幸運な厳密解であると言える。

(2) 展望に代えて

金融オプションに関するBlack-Scholes価格公式は、既に歴史的な部類に属し、実用としては現在ではもはや参考程度に過ぎないのかもしれない。とはいえ、新しい領域に金融工学の考え方を応用

しようとする場合は、やはり基本的な内容であろう。これに対して、Black-Scholes方程式の学術上の、特に非線形モデルの研究は今後もしばらくは続くことになろう。とはいえその内容は、残念ながら実務とは離れることも確実である。

〔参考文献〕

- 河原田秀夫 [1989] 『自由境界問題』、東京大学出版会。
 齊藤誠 [2000] 『金融技術の考え方・使い方』、有斐閣。
 三浦良造 [2000] 『デリバティブの数理』、サイエンス社。
 蓑谷千鳳彦 [2000] 『よく分かるブラック・ショールズモデル』、東洋経済新報社。
 Kwok, Y.K. [2008] *Mathematical Models of Financial Derivatives, 2nd Edition*, Springer.
 Leland, H.E. [1985] “Option pricing and replication with transaction costs,” *Journal of Finance* 40(1985), pp. 1,283-1301.
 Black, F. and M. Scholes [1973] “The pricing of options and corporate liabilities,” *Journal of Political Economy* 81, pp. 637-654.
 Ishimura, N. and H. Imai [2008] “Global in space numerical computation for the nonlinear Black-Scholes equation,” in *Nonlinear Models in Mathematical Finance*, Edited by M. Ehrhardt, Nova Science Publishers, Inc., pp. 219-242.
 Fouque, J.P., G. Papanicolaou, and K.R. Sircar [2000] *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*, Cambridge University Press.
 Merton, R.C. [1973] “Theory of rational option pricing,” *Bell Journal of Economics and Management* 4, pp. 141-183.