

# 磁気ベナール問題のカオス

石村 直之（東京大学大学院数理科学研究科）

今井 仁司（徳島大学工学部）

中村 正彰（日本大学理工学部）

Lorenz の発見した蝶はカオスという鱗粉をまき散らし、数学者の心を魅了してやまない。この蝶はいまや応用分野でダイヤモンド以上の価値をもっている。この不思議な蝶を理論的に見極める方法とその魅力について考えてみよう。

カオスについては、いろいろな角度から研究が進められている。ここでは最近の非線型偏微分方程式論からのアプローチについて述べる。最近の非線型解析学の発展は実に目覚ましいものがあり、新しい知見が日々得られている。従って、本論説は不完全であるというそしりは免れえないが、このような研究分野もあるのかと気楽に目を通して頂ければ幸いである。

## 1. はじめに

この論説では、最近発展してきた、カオスの応用数理的な研究の一端を紹介する。

カオスはこの数十年多くの注目を集め精力的に研究されてきた対象である。いまでは一般の人でも口にするくらいポピュラーなキーワードになった。このカオスといえば、Lorenz が研究の創始者であり、主に海外で発展してきた学問と思われがちである。しかし、カオスの研究は日本人が大きな役割を果たしてきた。実際、まず歴史的に見ると、Lorenz の数年前に既に力武が地球磁場反転問題に関連してカオスを発見していた [1, p.96]。また、カオスの研究に欠かせないアトラクターの次元の有効な計算法は島田・長島によって開発された。応用に目を向ければ、様々な工学の分野においてもカオスの制御技術の開発及び応用が日本において進んでいる。最近では身の回りの電気製品にすらそれが見られるようになってきている。このように我々日本人に縁深いカオスである。和書においても良い成書が多く存在する。[2][3] などはよくまとめられている著作である。

さて、カオスは様々な現象に認められる。では何をもってカオスの存在を判断するのであろうか。カオスの直感的なとらえ方は周期的であるが周期がないということであろう。この擬周期的な現象が安定に現れてはじめてカオティックであると感じる。では擬周期と安定性は数学的にどう表現されるのであろうか。安定とは様々な初期状態から出発しても似たような状態に落ち着くと言い換えられよう。これは方程式で考えると様々な初期値から出発する解曲線があるもの（数学のことばで多様体という）に近づいていくことである。逆にいえば、付近の解曲線を吸収するあるものが存在すれば安定な状態が実現する。このようなものをアトラクターと呼ぶ。擬周期とは何であろうか。あらくいえばアトラクターの次元がフラクタル（非整数）であることが擬周期性の十分条件である。整数次元のときは、次元だけからは、運動の複雑性は判定できない。この次元については3節で詳しく述べる。以上から、アトラクターが存在してそれが非整数なフラクタル次元を持てばカオスが存在するとみなしてよいであろう。

カオスの定義についてもう少し厳密に考えよう。何をもってカオスと称するか、全ての人々が認める概念が確定しているわけではないようである。実際、よく知られている定義のひとつに Devaney[4] によるものがある。X を距離空間とする。連続写像  $f: X \rightarrow X$  がカオスであるとは、

1.  $f$  は推移的,
2.  $f$  の周期点は X で稠密,
3.  $f$  は繊細な初期値依存性をもつ。

この定義そのものは受け入れ易い。1, 2 は技術的なことで、あらくいえば  $f$  の軌道  $f(X), f^2(X), f^3(X), \dots$  が十分複雑であることを保証する。3 は Lorenz の発見以来カオスの特徴として認められている性質である。ところが最近になり、3 の性質は 1, 2 より従うことが示された。すなわち [5] によれば、 $f$  が 1, 2 を満足すれば 3 は自動的にみたされる。証明はむしろ初等的である。

とはいえ、カオスに対する研究の立場はあまりにも種々さまざまである。例えば保存系を問題にするのと、散逸系を問題にするのとでは状況が大きく異なってくる。また、数学者が扱うのと、物理学者や工学者が扱うのでも大いに違ってくる。一般にいえることは大体次のようなものではなからうか。すなわち、数学の世界では、あまりに厳密な体系をつくらうとして、しばしば現実離れした仮定を設定しがちであった。一方、物理・工学の世界では、面白い現象そのものを追うあまり、論理に飛躍の

ある場合も多かったように思われる．我々の立場はむしろこの中間あたりをねらうものである．

さらに，実用的なカオスの判定はアトラクターの次元の評価であり，これは数値計算に頼らざるをえないのが現実である．しかしながら，きちっと理論的に議論できないものであろうか．というわけで，ここではカオスの推定を理論的に行う方法を具体的に紹介する．例題としてここでとりあげる方程式系はカオスの制御問題と関連して応用上非常に重要なものである．この方程式系におけるアトラクターの存在とそのフラクタル次元を理論的に調べることでカオスの存在を理論的に推定する．また，理論計算と数値計算によって得られるアトラクターの収束という面白い現象の解析も紹介する．

## 2. 簡約磁気 Bénard 系

カオスが現れる代表的な現象のひとつに流体の Rayleigh - Bénard 熱対流がある [1,2]．これは温度差によって駆動される流体の対流パターンが複雑に分岐して起こる非線型ダイナミクスである．

ここでは，導電性の流体（プラズマなど）について同様な対流現象を考える．磁場中でこのような流体が運動すると電磁力を受ける．従って変動する磁場に相当する自由度が加わりさらに複雑な現象が起こることが予想される．この問題は半導体製造等の応用工学にも関連する．つまり導電性物質のプロセッシングにおいて，物質運動のカオスを磁場により制御しようという試みである．この磁場の安定化作用をモデル化するものとして次の簡約磁気 Bénard 系と呼ばれる方程式がある．

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = -P_r x + P_r y - P_r Q w \\ \dot{y} = R x - y - x z \\ \dot{z} = -b z + x y \\ \dot{w} = P_r P_m^{-1} Q x - P_r P_m^{-1} w \end{cases}$$

ただし  $\dot{\phantom{x}} = \frac{d}{dt}$ . (1) において非負定数  $P_r, P_m, R, Q$  はそれぞれ，Prandtl 数，磁気 Prandtl 数，Rayleigh 数，Chandrasekhar 数を表す． $b$  は，考えている領域のスケールに依存して定まる物理定数である． $Q = 0$  のとき，第 4 成分  $w$ （磁場変位を意味する）は独立し，残り 3 成分  $(x, y, z)$  は，次の著名な Lorenz 系 [6] で支配される（ $x$  は速度変位， $y, z$  は温度

変位を意味する.)

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x} = -P_r x + P_r y \\ \dot{y} = R x - y - x z \\ \dot{z} = -b z + x y \end{cases}$$

Lorenz 系 (2) は, Rayleigh - Bénard 熱対流モデルにおいて, モード成分近似を行うことで導かれる. 同様の考察を磁気熱対流モデルに適用すれば (1) が従う. (1) に対する停留点の安定性, 分岐現象の解明, 他の既存の簡約化モデルとの比較などについては [7][8] を参照されたい. Lorenz 系については, 図 1 に示すような「奇妙な」アトラクターの存在が良く知られている. これは Lorenz の蝶と呼ばれることもある. その名前の由来は図 1 を見ればおわかりになると思う. (2) の何をもって「奇妙な」と称すべきか数学的にはまだ問題が残っており後で触れる. ここではむしろアトラクターの説明を続けよう.

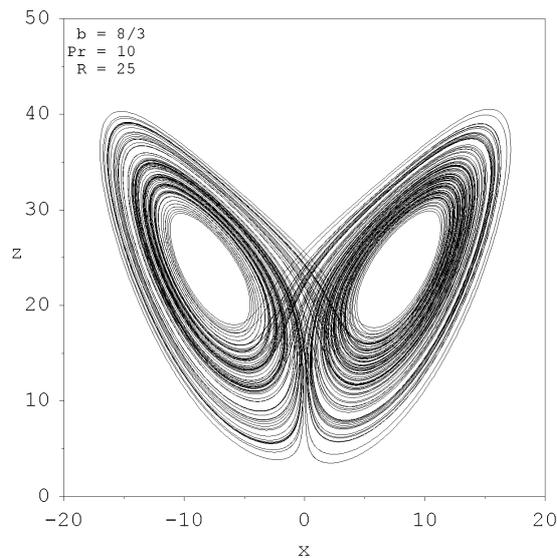


図 1. Lorenz の蝶 (「奇妙な」アトラクター).

まず, (1),(2) とともに吸収集合が存在することに注意しよう. 吸収集合とは, すべての解曲線が最終的にはそこに含まれる集合のことである. 数学的な表現を与えれば次のようになる. (1) については  $v^2 = x^2 + y^2 + (z - P_r - R)^2 + P_m w^2$ , (2) については  $\bar{v}^2 = x^2 + y^2 + (z - P_r - R)^2$  と

おこう．計算により

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}v(t)^2 &\leq -2 \min\{1, P_r, P_r P_m^{-1}, \frac{b}{2}\} v(t)^2 + b(P_r + R)^2 \\ \frac{d}{dt}\bar{v}(t)^2 &\leq -2 \min\{1, P_r, \frac{b}{2}\} \bar{v}(t)^2 + b(P_r + R)^2\end{aligned}$$

そこで

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \{(x, y, z, w) \mid v^2 < \frac{b}{\min\{1, P_r, P_r P_m^{-1}, \frac{b}{2}\}} (P_r + R)^2\} \\ \bar{\mathcal{U}} &= \{(x, y, z) \mid \bar{v}^2 < \frac{b}{\min\{1, P_r, \frac{b}{2}\}} (P_r + R)^2\}\end{aligned}$$

と定めれば， $\mathcal{U}$ ， $\bar{\mathcal{U}}$  がそれぞれ (1),(2) の吸収集合となる．すなわち， $\mathcal{U}$ ， $\bar{\mathcal{U}}$  の外側ではそれぞれ (1),(2) の解曲線は指数的に減少し，最終的にはそれぞれ  $\mathcal{U}$ ， $\bar{\mathcal{U}}$  に含まれるようになる．

アトラクターとは，すべての解曲線が最終的にはそこに近づく集合のことである．考えている系の長時間後のふるまいを特徴付けるものである．吸収集合が存在する場合には，アトラクターは，吸収集合の  $\omega$ (オメガ) 極限集合として定められる．(1),(2) のアトラクターをそれぞれ  $\mathcal{A}_Q$ ， $\bar{\mathcal{A}}$  と書けば，

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_Q &= \bigcap_{t \geq 0} \text{Cl.} \bigcup_{s \geq t} \{u(s) = (x(s), y(s), z(s), w(s)) \\ &\quad \mid u(s) \text{ は (1) の解, } u(0) \in \mathcal{U}\} \\ \bar{\mathcal{A}} &= \bigcap_{t \geq 0} \text{Cl.} \bigcup_{s \geq t} \{\bar{u}(s) = (x(s), y(s), z(s)) \\ &\quad \mid \bar{u}(s) \text{ は (2) の解, } \bar{u}(0) \in \bar{\mathcal{U}}\}.\end{aligned}$$

Cl. は閉包を表す．意味するものは例えば， $u = (x, y, z, w) \in \mathcal{A}_Q$  とは，時間列  $t_1 < t_2 < \dots \rightarrow \infty$  および  $\mathcal{U}$  の点を初期値とする解  $u_i(t)$  が存在

して,  $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i(t_i) = u$  となることである.

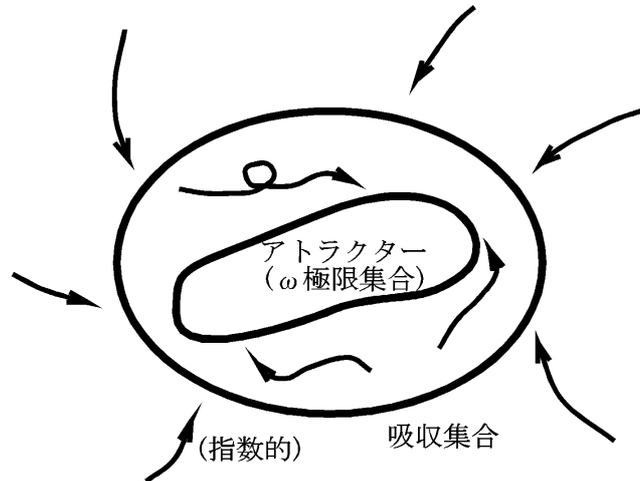


図 2. アトラクター .

我々の問題意識は, これらアトラクターの諸性質を明らかにしたい, ということである. この論説では具体的に以下の 2 点について考察したい.

1. アトラクターの次元評価. 先にもふれたように, Lorenz 系 (2) には「奇妙な」アトラクターの存在が知られている. 数値計算によれば, 我々の簡約磁気 Bénard 系 (1) にもそれは存在する! 「奇妙さ」のひとつの特徴付けとして, Hausdorff 次元, フラクタル次元等, いろいろな次元が有効かつ大切である. 逆に, 次元の値によりアトラクターが「奇妙」であるかないかの判定がなされる場合もある. それら次元の数値計算法は各種開発されているが, 数学的理論はまだ少ない. 3 節では, 次元の上限値に関する評価のみではあるが厳密な方法を紹介したい.

2. アトラクターの収束. パラメータを変えたときのアトラクターの変化は興味ある研究課題である. 例えば, ここで取り挙げた磁気 Bénard 問題においては磁場の影響を調べることが物理・工学上非常に重要で興味深い問題となる. つまり, (1) において, 磁場  $Q$  を 0 に近付けたとき, 物理的にはアトラクター  $A_Q$  は  $\bar{A}$  に近付くことが期待される. しかしながら, 極限集合として定義されるアトラクターの収束というのは数学的にどう定義されるのであろうか. 4 節において, 数学的・数値的なアプロー

チを紹介したい。

### 3. アトラクターの次元評価

#### 3.1. Hausdorff 次元，フラクタル次元，Lyapunov 次元

まず様々な次元の復習より始めよう。  $K$  を  $n$  次元 Euclidean 空間  $\mathbf{R}^n$  における有界な閉集合とする。  $\delta > 0$  を任意にとり，  $K$  を，半径が  $\delta$  以下の開球達でおおうことを考える。すなわち，

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^k B_{r_i}, \quad r_i \leq \delta, k \in \mathbf{N}.$$

$B_{r_i}$  は，半径が  $r_i$  の球をあらわす。  $K$  のおおい方は一通りではない。  $d > 0$  が与えられたとき，  $K$  のおおい方のなかで  $d$  次元体積の小さいものに興味がある。そこで

$$\mu_{d,\delta}(K) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^k r_i^d \mid K \subseteq \bigcup_{i=1}^k B_{r_i}, r_i \leq \delta, k \in \mathbf{N} \right\}$$

と定める。  $\mu_{d,\delta}(K)$  は，  $\delta$  の単調非増大関数である。つまり，  $\delta$  を大きくとればそれだけおおい方の可能性が増し，  $d$  次元体積は小さくなる。これより

$$\mu_{d,\mathcal{H}}(K) = \sup_{\delta > 0} \mu_{d,\delta}(K) = \lim_{\delta \downarrow 0} \mu_{d,\delta}(K)$$

が定まる。  $K$  の Hausdorff 次元  $\dim_{\mathcal{H}}(K)$  は，これから

$$\dim_{\mathcal{H}}(K) = \inf \{ d > 0 \mid \mu_{d,\mathcal{H}}(K) = 0 \}$$

により一意に定まる。

フラクタル次元の定め方は， Hausdorff 次元の定め方と少し似ている。まず

$$n_K(\delta) = \min \{ k \in \mathbf{N} \mid K \subseteq \bigcup_{i=1}^k B_{\delta} \}$$

とおく。  $n_K(\delta)$  は，半径  $\delta$  の球で  $K$  をおおうときに要する最小の個数をあらわす。  $d > 0$  に対して

$$\mu_{d,\mathcal{F}}(K) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} n_K(\delta) \cdot \delta^d$$

が決まり,  $K$  のフラクタル次元  $\dim_{\mathcal{F}}(K)$  は,

$$\dim_{\mathcal{F}}(K) = \inf\{d > 0 \mid \mu_{d,\mathcal{F}}(K) = 0\}$$

により一意に定められる. 別の表現では,

$$\dim_{\mathcal{F}}(K) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log n_K(\delta)}{\log \frac{1}{\delta}}.$$

定め方よりただちに

$$\dim_{\mathcal{H}}(K) \leq \dim_{\mathcal{F}}(K)$$

がわかる. 等号が成立しない例は知られているが, 病的なものである. 方程式系 (1),(2) に存在するようなアトラクターについては, 2つの次元はほとんどの場合一致することが予想されている.

さて, 上記の2つの次元は幾分数学的な概念である. 数値的にも計算し易いとはいえない. そこで次に, 解析的にも数値的にもアプローチ可能な次元を紹介しよう. 意味を考えれば, (1),(2) のような微分方程式系のアトラクターに対しては, むしろふさわしいものであることがわかるだろう.

まず, Lyapunov 数の概念を導入する. (1) を例にとる. 初期値が  $u_0 = (x_0, y_0, z_0, w_0) \in \mathcal{U}$  である (1) の解を  $u(t, u_0)$  と書く.  $u_0$  に関する微分を  $u'(t, u_0)$  であらわせば, これは  $4 \times 4$  行列である.  $u'(t, u_0) \cdot u'(t, u_0)^t$  の固有値を  $m_1(t, u_0) \geq \dots \geq m_4(t, u_0) \geq 0$  としよう.  $1 \leq n \leq 4$  に対し

$$P_n(t) = \sup_{u_0 \in \mathcal{U}} \sqrt{\prod_{i=1}^n m_i(t, u_0)},$$

および順番に

$$\mu_1 + \dots + \mu_n = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log P_n(t)$$

と定める. 順番に, というのは, まず  $\mu_1$  が定まり, 次に  $\mu_1 + \mu_2$  から  $\mu_2$  が定まり,  $\dots$ , ということである.  $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_4$  を Lyapunov 数という.

(1) のアトラクター  $\mathcal{A}_Q$  に対する Lyapunov 次元  $\dim_{\mathcal{L}}(\mathcal{A}_Q)$  とは, Lyapunov 数により次のように定義される.  $n$  を  $\mu_1 + \dots + \mu_n + \mu_{n+1} < 0$  となる最小の数とする. このとき,  $\mu_1 + \dots + \mu_n \geq 0, \mu_{n+1} < 0$  に注意して,

$$\dim_{\mathcal{L}}(\mathcal{A}_Q) = n + \frac{\mu_1 + \dots + \mu_n}{|\mu_{n+1}|}$$

と定め  $\mathcal{A}_Q$  の Lyapunov 次元と呼ぶ。

アトラクターの複雑さを示す量である次元と、Lyapunov 数とがなぜ関係するかの説明を手短かに試みよう。アトラクターが複雑になるためには、解軌道が一方向には伸ばされ、別方向には縮められ、それらが折りたたみ込まれるような構造があればよい。Lyapunov 数は、軌道の伸縮を示す統計的な量である。そこで次元との関係が出てくる。 $(\mu_1 + \dots + \mu_n) / |\mu_{n+1}|$  の部分は、整数次元からの差をあらわす。Lyapunov 次元の表式は [9] により与えられた。

Lyapunov 次元と Hausdorff 次元との関係は次の不等式で与えられる。これは [10] により証明された。

$$\dim_{\mathcal{H}}(K) \leq \dim_{\mathcal{L}}(K).$$

Lyapunov 次元を少し変更すればフラクタル次元より大きくなることが厳密に示されている。数値的には一般にすべて一致することが予想されていることを注意しておこう。理論的にも微分方程式から導かれるアトラクターについては全ての次元が一致することが予想されている。

次の 3.2 では Lyapunov 次元の解析的な評価を行う。Lyapunov 数の有効な数値計算法は、島田・長島 [11], Wolf 等 [12] により与えられている。最近では、数値的に次元を求めるには、相関次元 [13] がよく用いられる。相関次元とは、名の通り、例えば時系列データ間のある種の相関より次元を求める公式である。計算し易く、極言すれば時系列データさえあれば次元値は出る。ただ、まだ数学的な基礎付けがないようで、それはそれでひとつの興味深い研究課題といえる。

### 3.2. 次元評価の方法

ここでは Lyapunov 次元の解析的な評価を実際に行おう。再び (1) を例にとる。 $u(t, u_0)$  を初期値が  $u_0 \in \mathcal{U}$  である (1) の解とする。 $u_0$  に関する微分を  $u'(t, u_0)$  であらわすと

$$\frac{d}{dt} u'(t, u_0) = L(t) \cdot u'(t, u_0)$$

となる。ここで  $L$  は、(1) の右辺の線型化行列をあらわす。

$$L = \begin{pmatrix} -P_r & P_r & 0 & -P_r Q \\ R - z & -1 & -x & 0 \\ y & x & -b & 0 \\ P_r P_m^{-1} Q & 0 & 0 & -P_r P_m^{-1} \end{pmatrix}$$

よって

$$u'(t, u_0) = \exp \int_0^t L(s) ds \cdot u'(0, u_0).$$

これから定義に従い計算すると

$$\begin{aligned} \Pi_{i=1}^4 m(t, u_0) &= \sup_{|\det u'(0, u_0)| \leq 1} \det u'(t, u_0) \cdot u'(t, u_0)^t \\ &= \det \exp \int_0^t (L(s) + L(s)^t) ds \\ &= \exp 2 \int_0^t \text{Tr} L(s) ds \\ &= \exp(-2(1 + b + P_r + P_r P_m^{-1})t). \end{aligned}$$

すなわち Lyapunov 数の和は,

$$\begin{aligned} \mu_1 + \cdots + \mu_4 &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \sqrt{\Pi_{i=1}^4 m(t, u_0)} \\ &= -(1 + b + P_r + P_r P_m^{-1}) \\ &< 0 \end{aligned}$$

である.

さて, 上限値を評価しようと思えば, Lyapunov 次元の定義において「最小の」という部分は不必要である. そこで次に  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$  の上限を与えよう. 実際  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = M (> 0)$  とすれば,  $-\mu_4 = 1 + b + P_r + P_r P_m^{-1} + M$  であるから,

$$\dim_{\mathcal{L}}(\mathcal{A}_Q) \leq 3 + \frac{M}{1 + b + P_r + P_r P_m^{-1} + M}$$

となり,  $\mathcal{A}_Q$  の Lyapunov 次元の評価ができる.

$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$  の評価には外積代数の言葉が便利である.  $\mu_1 + \cdots + \mu_4$  を求めた所からもわかるように,  $L$  は初めから  $S(t) = 1/2 \cdot (L + L^t)(t)$  と対称化しておいてよい.  $v_i \in \mathbf{R}^4, i = 1, 2, 3$  が

$$\begin{cases} \frac{dv_i}{dt} = S v_i & S = \frac{1}{2}(L + L^t) \\ v_i(0) = v_{i_0} \in \mathbf{R}^4 \end{cases}$$

をみたとしよう.  $|(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3)(t)| \leq \exp(Mt) |v_{10} \wedge v_{20} \wedge v_{30}|$  が導かれたとすれば, 定義より  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \leq M$  がわかる.  $\wedge$  は, 今の場合  $\mathbf{R}^4$  での外積をあらわす. そこで

$$\begin{aligned} (v_1 \wedge v_2 \wedge v_3)(t) &= c_1(t)(e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) - c_2(t)(e_1 \wedge e_3 \wedge e_4) \\ &\quad + c_3(t)(e_1 \wedge e_2 \wedge e_4) - c_4(t)(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) \end{aligned}$$

と展開する．ここで  $e_i (i = 1, \dots, 4)$  は  $\mathbb{R}^4$  の単位ベクトルである．計算によれば，

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{S}_{11} & -S_{21} & -S_{31} & -S_{41} \\ -S_{12} & \hat{S}_{22} & -S_{32} & -S_{42} \\ -S_{13} & -S_{23} & \hat{S}_{33} & -S_{43} \\ -S_{14} & -S_{24} & -S_{34} & \hat{S}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

がわかる (石村・中村 [14])．ただし  $S = (S_{ij})$  と成分表示し， $\hat{S}_{ii} = T_r S - S_{ii}$  とおいた．これから次の形の評価

$$\begin{aligned} |(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3)(t)|^2 &= c_1(t)^2 + c_2(t)^2 + c_3(t)^2 + c_4(t)^2 \\ &\leq \exp(2Mt) \cdot (c_1(0)^2 + c_2(0)^2 + c_3(0)^2 \\ &\quad + c_4(0)^2) \\ &= \exp(2Mt) \cdot |v_{10} \wedge v_{20} \wedge v_{30}|^2 \end{aligned}$$

を得ることは易しい．

実際に値を出せば， $(P_r, P_m, R, b, Q) = (10, 5, 200, 8/3, \sqrt{10})$  のとき  $\dim_{\mathcal{L}}(\mathcal{A}_Q) \leq 3.57$  である．数値計算によれば  $\dim_{\mathcal{L}}(\mathcal{A}_Q) = 2.58$  となる． $\dim_{\mathcal{L}}(\mathcal{A}_Q) < 3$  の場合，解析的な評価は有効でなくなるようだ．Lorenz 系 (2) の場合， $(P_r, R, b) = (10, 28, 8/3)$  のとき，解析的には  $\dim_{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{A}}) \leq 2.41$  数値的には  $\dim_{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{A}}) = 2.01$  となる．方程式の次元が大きくなれば不等号の評価を重ねるため，解析的な評価は有効でなくなるようだ． $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$  の評価において， $M < 0$  となれば，次の段階として  $\mu_1 + \mu_2$  の上限を考えることになる．しかし，数値計算との比較によれば，解析的な評価は悪くなるようである (服部等 [15] 参照)．

#### 4. アトラクターの収束

アトラクターは系の長時間後の挙動を特徴付けるものである．磁場の強度を表すパラメータ  $Q = 0$  のとき  $\mathcal{A}_Q = \bar{\mathcal{A}}$  である．それでは  $Q \downarrow 0$  のとき，いかなる意味で  $\mathcal{A}_Q \rightarrow \bar{\mathcal{A}}$  は成り立つのか．言葉を換えれば，長時間後のふるまいに，磁場はどのような影響をもつのか．アトラクターの構造も含めて， $\mathcal{A}_Q$  は  $\bar{\mathcal{A}}$  にどのように収束，ないしは近づくのであろうか．これは数学の問題として，また物理工学の観点からも興味深い問題である．方程式の係数の収束と，その解の収束は一般には同値ではない．さらに  $Q \downarrow 0$  の極限操作は，方程式の構造を変える極限操作であることに注意しよう．

まず、数値計算結果を述べよう。数値計算は4次の陽的 Runge - Kutta 法を用いて倍精度で時間刻み幅を 0.001 として行った。図3に  $Q = 1.0, 0.5, 0.1, 0$  としたときの「奇妙な」アトラクターの磁場依存性を示す。他のパラメータは  $(P_r, P_m, R, b) = (10, 5, 25, 8/3)$  とした。 $Q > 0$  の場合には (1) を用いて計算し、 $Q = 0$  の場合には (2) を用いて計算した。一見したところ、アトラクター  $A_Q$  は  $\bar{A}$  に連続に近付いているようである。ところが、 $Q = 1.0, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001, 0$  に対して次元を数値計算したところそれぞれ 2.21, 2.38, 2.41, 2.41, 2.41, 2.06 となった。次元は連続的でなさそうだという興味深い結果が得られた。別のパラメータ値  $(P_r, P_m, R, b) = (16, 5, 40, 4)$  において  $Q = 0.1, 0.01, 0.001, 0$  としたときも次元はそれぞれ 2.43, 2.43, 2.43, 2.06 となりやはり連続的ではなかった。同じアトラクターの数値計算でありながら、可視化データを見るとアトラクターが収束している様であっても、次元を計算すると収束していない。カオスの研究にはいろいろな面からのアプローチが必要である。いずれにしても磁気 Bénard 問題において磁場の影響はとても "強い" といえるだろう。

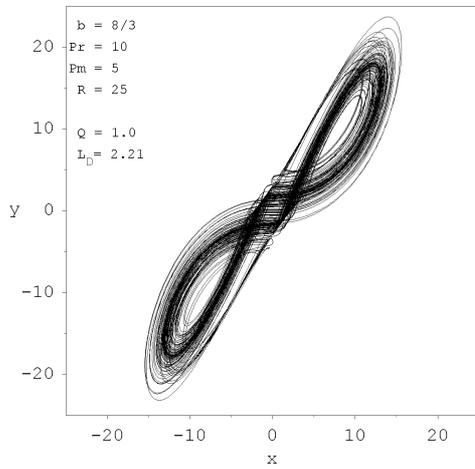


図 3(a).  $Q = 1.0$  の時のアトラクターの射影図 .

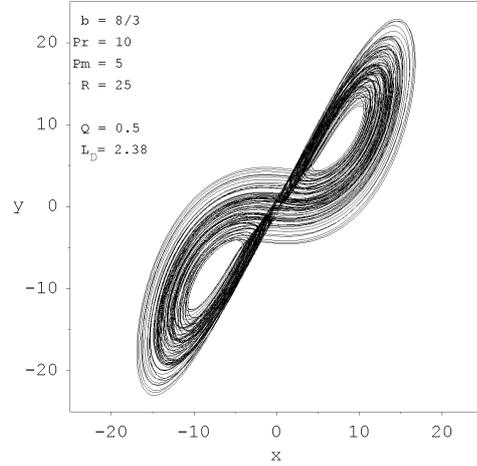


図 3(b).  $Q = 0.5$  の時のアトラクターの射影図 .

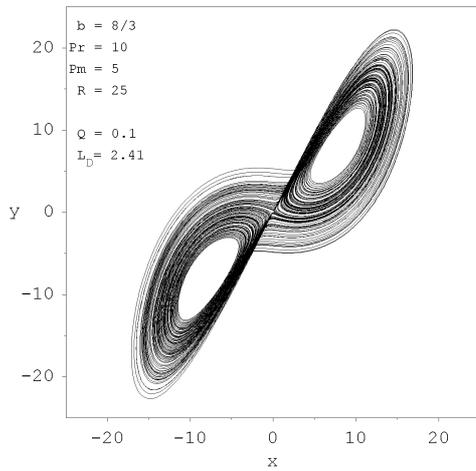


図 3(c).  $Q = 0.1$  の時のアトラクターの射影図 .

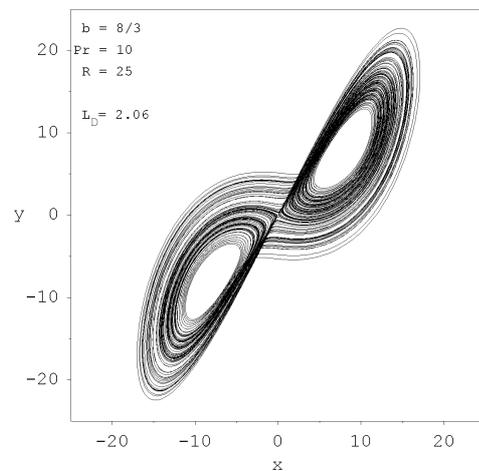


図 3(d).  $Q = 0$  の時のアトラクターの射影図 .

図 3. アトラクターの磁場依存性 . (a)-(c) は (1) において  $(P_r, P_m, R, b) = (10, 5, 25, 8/3)$  として計算した . (d) は (2) において  $(P_r, R, b) = (10, 25, 8/3)$  として計算した .

次に解析的な理論を紹介しよう [16] . 残念ながら , まだ発展途上であることをお断りしておく . まず記号を導入しよう . 射影  $P : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  およびはめ込み  $P_0^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  をそれぞれ次のように定める .

$$\begin{aligned} P(x, y, z, w) &= (x, y, z), \\ P_0^{-1}(x, y, z) &= (x, y, z, 0) \end{aligned}$$

さらに , 天下りの的であるが ,  $\mathcal{A}_Q$  と  $\bar{\mathcal{A}}$  との間に次の距離  $d$  を定める .

$$d(\mathcal{A}_Q, \bar{\mathcal{A}}) = \sup_{u \in \mathcal{A}_Q} \inf_{v \in P_0^{-1}\bar{\mathcal{A}}} |u - v|.$$

右辺が  $\max\{\sup_{u \in \mathcal{A}_Q} \inf_{v \in P_0^{-1}\bar{\mathcal{A}}} |u - v|, \sup_{v \in P_0^{-1}\bar{\mathcal{A}}} \inf_{u \in \mathcal{A}_Q} |u - v|\}$  であれば  $\mathcal{A}_Q$  と  $\bar{\mathcal{A}}$  との間の Hausdorff 距離と呼ばれる . いまは , 上の片側のみの定義を採用する . 示したいことは ,  $Q \downarrow 0$  のとき

$$d(\mathcal{A}_Q, \bar{\mathcal{A}}) \rightarrow 0$$

となることである . これは , 任意の  $\varepsilon > 0$  に対し , ある  $Q_\varepsilon$  が存在して ,  $0 < Q < Q_\varepsilon$  のとき ,

$$\mathcal{N}_{\mathbb{R}^4}(P_0^{-1}\bar{\mathcal{A}}, \varepsilon) \supset \mathcal{A}_Q$$

となることと同等である . ここで  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}^4}(\cdot, \varepsilon)$  は ,  $\mathbb{R}^4$  における  $\varepsilon$ - 近傍を意味する . この性質が成り立っているとき ,  $\mathcal{A}_Q$  は  $\bar{\mathcal{A}}$  に Hausdorff 上半収束するという .

証明はいくつかの段階にわかれて行われる . 最初に (1) の第 4 成分  $w$  を  $Q$  により評価しよう .  $u = (x, y, z, w) \in \mathcal{A}_Q$  に対して ,

$$|w| \leq C_1 Q$$

が成り立つ . 特に ,  $u(t, u_0), u_0 \in \mathcal{U}$  に対して ,  $t \geq t_Q = P_r^{-1} P_m \log(1/Q)$  のとき

$$|w(t)| \leq C_1 Q$$

が成り立つ . ここで  $C_1 = (1 + 1/\sqrt{P_m}) \sqrt{b/\min\{1, P_r, P_r P_m^{-1}, b/2\}}(P_r + R)$  とおいた . この導出は  $w$  の方程式を積分の形で書けば良い .

$$w(t) = w(0)e^{-P_r P_m^{-1} t} + \int_0^t P_r P_m^{-1} Q x(s) e^{-P_r P_m^{-1}(t-s)} ds$$

あとは  $U$  の要素が有界であることを用いる .

この  $w$  の評価は ,  $Q \downarrow 0$  のとき  $|w| \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$  を意味している .  $P_0^{-1}$  の定義を正当化していることに注意しよう . すなわち ,  $\mathbb{R}^3$  から  $\mathbb{R}^4$  へのはめ込みを  $\{w = 0\}$  平面にはめ込むと定めたことである .

(1) の軌道と (2) の軌道とを比較する次の評価式は証明の重要な点である .

$$\delta_Q(t) = \sup_{u_0 \in \mathcal{U}} |u(t + t_Q, u_0) - P_0^{-1} \bar{u}(t, Pu(t_Q, u_0))|$$

とおく . このとき ,  $Q$  とは独立な  $P_r, P_m, R, b$  のみに依存する定数  $C_2, C_3$  があり ,

$$\delta_Q(t) \leq C_2 \cdot Q e^{c_3 t}$$

が成り立つ . ここで  $\bar{u}(t, Pu(t_Q, u_0))$  は ,  $t = 0$  のとき  $Pu(t_Q, u_0) \in \bar{U}$  となる (2) の解をあらわす .

$\delta(t)$  の評価式の意味は , あるいは , (1) と (2) の軌道はせいぜい指数的にしか離れないということである . 導出は方程式にもどる .

$$\begin{aligned} \delta_Q(t, u_0) &= u(t + t_Q) - P_0^{-1} \bar{u}(t, Pu(t_Q, u_0)) \\ &= (\delta x, \delta y, \delta z, \delta w) \end{aligned}$$

とおく .  $\delta_Q(t, u_0)$  のみたす方程式は ,

$$\begin{cases} (\dot{\delta x}) = -P_r(\delta x) + P_r(\delta y) - P_r Q(\delta w) \\ (\dot{\delta y}) = R(\delta x) - (\delta y) - z(\delta x) - \bar{x}(\delta z) \\ (\dot{\delta z}) = -b(\delta z) + y(\delta x) + \bar{x}(\delta y) \\ (\dot{\delta w}) = P_r P_m^{-1} Qx - P_r P_m^{-1}(\delta w) \end{cases}$$

となる . ここで  $u(t + t_Q) = (x, y, z, w), P_0^{-1} \bar{u}(t, Pu(t_Q, u_0)) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, 0)$  とおいた .  $|\delta_Q(0, u_0)| = |w(t_Q)| \leq C_1 Q$  に注意すれば , 求める評価式を得ることは易しい .

さて証明を完成させよう . 任意の  $\delta > 0$  に対して ,  $\omega$  極限集合  $\omega(U)$  の性質より ,  $t_\varepsilon$  があり  $t > t_\varepsilon$  のとき

$$\mathcal{N}_{\mathbb{R}^4}(P_0^{-1} \bar{A}, \varepsilon) \supset \mathcal{N}_{\mathbb{R}^4}(P_0^{-1} \bar{u}(t, \bar{U}), \frac{\varepsilon}{2})$$

となる . ここで  $\bar{u}(t, U)$  は , 初期値を  $U$  にとる (2) の解をあらわす .  $Q_\varepsilon = \varepsilon/4 \cdot C_2^{-1} e^{-c_3 t_\varepsilon}$  と定める .  $0 < Q < Q_\varepsilon$  のとき  $t_{\varepsilon, Q}$  が存在して ,  $t \geq t_{\varepsilon, Q}$  ならば

$$\mathcal{N}_{\mathbb{R}^4}(u(t, U), \frac{\varepsilon}{4}) \supset \omega(U) = \mathcal{A}_Q$$

が成り立つ． $t > t_\varepsilon + t_{\varepsilon, Q} + t_Q$  をとろう． $\delta_Q(t_\varepsilon)$  の評価式を用いれば

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\mathbf{R}^4}(u(t, \mathcal{U}), \frac{\varepsilon}{4}) &\subset \mathcal{N}_{\mathbf{R}^4}(u(t_\varepsilon + t_Q, \mathcal{U}), \frac{\varepsilon}{4}) \\ &\subset \mathcal{N}_{\mathbf{R}^4}(P_0^{-1}\bar{u}(t_\varepsilon, \bar{\mathcal{U}}), \frac{\varepsilon}{2}) \end{aligned}$$

であるから， $\mathcal{A}_Q \subset \mathcal{N}_{\mathbf{R}^4}(P_0^{-1}\bar{\mathcal{A}}, \varepsilon)$  がいえた．

これによって，先に数値計算で観測されたアトラクターの形状（可視化データ）の収束が数学的に証明されたことになる．

最後に注意を述べてこの節を閉じよう．一般的には，Hausdorff 収束とアトラクターの次元の収束とは無関係である．しかし，もしアトラクター達の曲率が下に有界であるという幾何学的な条件があれば，次元の下半連続性が成り立つことは知られている．先の次元の数値計算結果は，下半連続性すなわち  $\lim_{Q \rightarrow 0} \dim(\mathcal{A}_Q) \geq \dim(\bar{\mathcal{A}})$  を示した．従って我々はアトラクター  $\mathcal{A}_Q, \bar{\mathcal{A}}$  達に何か幾何学的な性質が存在すると予想し，アトラクターの幾何学的構造の研究を続けている．

## 5. おしまいに

この論説では，カオスを誘発するアトラクターに関する応用解析（応用数理）学的な研究を，簡約磁気 Bénard 系を例にとり解説してきた．ここで，簡単なまとめを与えるとともに，今後の展望について述べたい．

アトラクターの次元評価は，[17, p.426] にもふれられているように，この十数年大きく研究が進んだ話題である．数学の世界でも，Navier - Stokes 方程式に対するアトラクターの Hausdorff 次元有限性が示されて以来，注目を集めてきた分野である（例えば [18] 参照）．第 3 節では，この 2 つの流れの接点となるような題材を扱った．そこではアトラクターの存在とその次元の具体的な理論計算を紹介し，カオスの理論的な推定法を与えた．これは数学以外の応用分野の研究者の理論研究に役立つものと信じる．一方第 4 節では，アトラクターの収束という興味深い話題にふれた．このアトラクターの収束は，主に数学の世界で，抽象的な枠組みの中で研究されてきた話題である．ここでは次元の不連続性を示唆する結果を紹介した．数学のみならず，物理・工学の分野でも興味深い話題を提供できたと思う．

第 1 著者の仕事はオーストラリア国立大学の Centre for Mathematics and its Application で行われました . 同センターの援助に感謝いたします .

## 6. 文献

- [1] P. ベルジェ , Y. ポモウ , Ch. ビダル 共著, 相澤 洋二 訳「カオスの中の秩序」産業図書, 1992 年.
- [2] 長島 弘幸, 馬場 良和 共著「カオス入門」培風館, 1992 年.
- [3] 高安 秀樹 編著「フラクタル科学」朝倉書店, 1987 年.
- [4] R.L. デバネー 著, 後藤 憲一 訳「カオス力学系入門」共立出版, 1987 年.
- [5] J.Banks, J.Brooks, G.Cairns, G.Davis and P.Stacey, *On Devaney's definition of chaos*, Amer. Math. Month. **99** (1992), 332-334.
- [6] E.N. Lorenz, *Deterministic non-periodic flows*, J. Atmos. Sci. **20** (1963), 130-141.
- [7] H. Imai and M.-A.Nakamura, *Numerical analysis of the simplified magnetic Bénard problem*, in “Nonlinear mathematical problems in industry II,” H. Kawarada, N. Kenmochi, and N. Yanagihara (eds.), Gakuto, Tokyo (1993), pp.405-419 ; H. Imai and M.-A.Nakamura, *On the bifurcation diagram of the simplified magnetic Bénard problem*, in “Unstable and turbulent motion of fluid,” S.Kida (ed.), World Scientific, Singapore (1993), pp.71-78.
- [8] **磁気問題については**, E. Knobloch and M.R.E. Proctor, *Nonlinear periodic convection in double-diffusive systems*, J. Fluid Mech. **108** (1981), 291-316, **において 5 成分系が導出されている . 文献 [7] は , それを 4 成分系に簡略化した場合に相当する .**
- [9] J. Kaplan and J.A. Yorke, *Chaotic behaviour of multidimensional difference equations*, Springer Lecture Notes in Math.**730** (1979), pp. 204-227.
- [10] P.Constantin and C.Foias, *Global Lyapunov exponents, Kaplan-Yorke formulas and the dimension of the attractors for 2D Navier-Stokes equations*, Comm. Pure. Appl. Math. **38** (1985), 1-27.
- [11] I. Shimada and T. Nagashima, *A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems*, Prog. Theor. Phys. **61** (1979), 1605-1616.

- [12] A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney and J.A. Vastano, *Determining Lyapunov exponents from a time series*, Physica **16D** (1985), 285-317.
- [13] P. Grassberger and I. Procaccia, *Measuring the strangeness of strange attractors*, Physica **9D** (1983), 189-208.
- [14] N. Ishimura and M.-A. Nakamura, *On the simplified magnetic Bénard problem - dimension estimate of the attractor*, Adv. Math. Sci. Appl. **4** (1994), 241-247.
- [15] Y. Hattori, N. Ishimura, I. Ohnishi and M. Umeki, *Dimension estimate of the global attractor for forced oscillation systems*, Japan J. Indust. Appl. Math. **10** (1993), 351-366.
- [16] H. Imai, N. Ishimura and M.-A. Nakamura, *Convergence of attractors for the simplified magnetic Bénard equations*, to appear in European J. Appl. Math..
- [17] J. Guckenheimer and P. Holmes, “Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields,” Second ed. Appl. Math. Sci. **42**, Springer-Verlag (1990).
- [18] R. Temam, “Infinite dimensional dynamical system in mechanics and physics,” Springer-Verlag, Berlin, 1988.

## 著者紹介

石村 直之 氏は 1964 年徳島生まれ．1986 年東大物理卒．同大学院修士課程終了後，東大数学助手．現在東大数理科学科助手．1993 年ジョンスポプキンス大日米数学研究所研究員，1994 年オーストラリア国立大学客員研究員．専門は非線型解析学．

今井 仁司 氏は 1960 年愛媛生まれ．1983 年東大物理工学卒．同大学院博士課程修了後，筑波大学電子・情報工学系助手．同講師を経て，現在徳島大学工学部助教授．専門は数値解析学．

中村 正彰 氏は 1945 年生まれ．1968 年東大数学卒．同大学院修士課程修了後，電気通信大学助手．同講師を経て，現在日本大学理工学部助教授．専門は応用解析学・数値解析学．