支出シェアの一定性について

釜　江　廣　志

線型支出体系 (Linear Expenditure System) として知られている需要関係の体系は、クライン・ルービン〔3〕により初めて示された。ギアリー〔1〕とサムエルソン〔4〕は、クライン・ルービンの需要関係が次のような形の効用関数

$$u=\phi\left[\prod_{i=1}^{n}(q_i-\gamma_i)^{\beta_i}\right] \tag{1}$$

を意味することを示した。ここに q_i は財の量、

$$\phi'>0,\ \beta_i>0,\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i=1,\ q_i-\gamma_i>0,$$

である。この時、予算制約

$$M=\sum_{i=1}^{n}p_iq_i$$

の下での(1)の最大化から、需要関係式

$$q_i=\gamma_i+\beta_ip_i^{-1}(M-\sum_{j=1}^{n}p_j\gamma_j)$$

が得られ、さらにこれは

$$v_i=p_iq_i=p_i\gamma_i+\beta_i(M-\sum_j p_j\gamma_j) \tag{2}$$

と書けて、線型支出体系と呼ばれる。

次にゴールドバーガー〔2〕は、効用関数がギアリー型になるための条件が、消費者の効用関数が direct additive、即ち

$$u=u(q_1,\cdots\cdots,q_n)=\sum_{i=1}^{n}u^i(q_i)$$

であり、かつその支出関数

$$v_i=p_iq_i=v_i(M,p_1,\cdots\cdots,p_n)\qquad(i=1,\cdots\cdots,n)$$

の限界支出シェア

$$\mu_i=\frac{\partial v_i}{\partial M}=\frac{\partial(p_iq_i)}{\partial M}=p_i\cdot\frac{\partial q_i}{\partial M}\qquad(i=1,\cdots\cdots,n)$$

が M、$p_1\cdots\cdots p_n$ の変化にかかわらず一定であること、を証明した。

では、需要関数にどのような性質があれば、限界支出シェアの一定性が導かれるであろうか。このノートではこのことを考えてみたい。

初めに、平均支出シェア一定のための条件を導く。そのための必要十分条件は、任意の異なる財の組合せ i、j に対し、財 i の価格が変化しても財 j の需要量が変化しないことである。即ち

$$\frac{\partial q_j}{\partial p_i}=0\qquad\text{for all } i,j(i\neq j). \tag{3}$$

証明。$\eta_i=\dfrac{p_iq_i}{M}$ と置く。この時、任意の異なる i、j に対して

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial p_j}=\frac{p_i\dfrac{\partial q_i}{\partial p_j}}{M}$$

であるから、η_iが一定、即ち$\dfrac{\partial \eta_i}{\partial p_j}=0$　の時、$\dfrac{\partial q_i}{\partial p_j}=0$　である。

逆を言う。スルツキー式から

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_j}=\sigma_{ij}-q_j\frac{\partial q_i}{\partial M}$$

である。ここで条件と、代替項の対称性とから、

$$q_j\frac{\partial q_i}{\partial M}=q_i\frac{\partial q_j}{\partial M}$$

が出るから

$$\frac{\partial \log q_i}{\partial M}=\frac{\partial \log q_j}{\partial M} \tag{4}$$

が言える。

次に　$\eta_i=\dfrac{p_iq_i}{M}$　から　$q_i=\dfrac{\eta_iM}{p_i}$　であるが、これをp_jで偏微分すると

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_j}=\frac{M\cdot\dfrac{\partial \eta_i}{\partial p_j}}{p_i}$$

である。条件から

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial p_j}=0$$

である。また　$\sum_{i=1}^{n}\eta_i=1$　であるから、任意のiに対し

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial p_i}=0$$

である。以上からη_iはMのみの関数であることが言える。

さらに、$\eta_i=\dfrac{p_iq_i}{M}$　の両辺の対数をとり、それをMで偏微分すると

$$\frac{\partial}{\partial M}\log\eta_i=\frac{\partial}{\partial M}\log q_i-\frac{\partial}{\partial M}\log M$$

である。この時、(4)から

$$\frac{\partial}{\partial M}\log\eta_i=\frac{\partial}{\partial M}\log\eta_j$$

であり、η_iがMのみの関数であることから、

$$\log\eta_i-\log\eta_j=\text{const.}$$

が導かれる。故に

$$\frac{\eta_i}{\eta_j}=\lambda_{ij}(\text{const.})$$

であり

$$\eta_i=\lambda_{ij}\eta_j$$

と表わせる。さらに　$\sum_{i=1}^{n}\eta_i=1$　から

$$\sum_i\lambda_{ij}\eta_j=1$$

であるから

$$\eta_j=\frac{1}{\sum_i \lambda_{ij}}=\text{const.}$$

となる。(証了。)

次に、この条件と限界支出シェア一定との関連をみる。まず

$$\eta_i=\frac{p_i q_i}{M} \quad から$$

$$p_i q_i=\eta_i M$$

である。これをMで偏微分すると

$$p_i\frac{\partial q_i}{\partial M}=\frac{\partial \eta_i}{\partial M}M+\eta_i$$

であり、η_iが一定であれば　$\partial\eta_i/\partial M=0$　だから

$$\eta_i=p_i\frac{\partial q_i}{\partial M}$$

となる。つまり平均支出シェアη_iは限界支出シェアに等しいことがわかった。従ってこの時、限界シェアも一定である。即ち、(3)は限界支出シェア一定のための十分条件なのである。

では、このことの逆は言えるだろうか。限界支出シェアをμ_iと置き、その一定性を仮定する。

$$p_i\frac{\partial q_i}{\partial M}=\mu_i.$$

μ_iは一定であるからMにも依存しない。積分して

$$q_i=\frac{\mu_i}{p_i}M+\beta_i \tag{5}$$

である。ここでq_iのとりうる値の範囲を正象限全域とする。

もし　$\beta_i<0$　なるものがあるとすれば、Mが十分小さい時　$q_i<0$　となってしまうから

$$\beta_i\geqq 0 \quad (i=1,\cdots\cdots,n)$$

でなければならない。ところで、(5)の和をとると、

$$M=\sum_i p_i q_i=\sum_i \mu_i M+\sum_i \beta_i p_i$$

$$=M+\sum_i \beta_i p_i$$

であるから

$$\sum_i \beta_i p_i=0$$

が出る。これと　$p_i>0$, $\beta_i\geqq 0$　とから

$$\beta_i=0 \quad (i=1,\cdots\cdots,n)$$

が導かれる。つまり

$$q_i=\frac{\mu_i}{p_i}M$$

となって、μ_iは平均支出シェアでもあるのである。従ってこの場合、平均支出シェア一定である。以上から、限界支出シェアが一定で、かつq_iのとりうる値の範囲を正象限全域とすれば、平均支出シェアは一定であり、前の結果を用いると、

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_j}=0 \quad \text{for all } i,j\,(i\neq j)$$

であることが言える。

さらに、q_iが全てのiについてある一定の値a_iよりも大である場合を考えてみよう。この時限界支出シェアが一定であれば、線型支出体系が導かれる。次にこのことを示す。q_i^*、M^*を各々

$$q_i{}^* = q_i - a_i \qquad (i = 1, \cdots\cdots, n)$$

$$M^* = M - \sum_j p_j a_j$$

と定義する。限界支出シェアが一定であれば、前の結果を用いて

$$q_i{}^* = \frac{\mu_i}{p_i} M^*$$

を得る。つまり

$$q_i = a_i + \frac{\mu_i}{p_i}(M - \sum p_j a_j)$$

となり

$$v_i = p_i q_i = p_i a_i + \mu_i(M - \sum p_j a_j)$$

が得られるが、これは線型支出体系に他ならない。即ち、ゴールドバーガーの結果は、限界支出シェアの一定性のみを仮定すれば得られるのであって、効用関数の additivity の仮定は不要である。

最後に、平均支出シェアが一定であるか否かにかかわらず、限界支出シェアが一定となるための条件について考える。前と同様の証明により、次のことが導かれる。つまり

$$\frac{\partial q_i}{\partial M} \cdot \frac{\partial^2 q_j}{\partial M^2} = \frac{\partial q_j}{\partial M} \cdot \frac{\partial^2 q_i}{\partial M^2} \text{ for all } i, j (i \neq j) \qquad (6)$$

かつ

$$\frac{\partial^2 q_i}{\partial M \cdot \partial p_j} = 0 \qquad \text{for all } i, j (i \neq j) \qquad (7)$$

であれば、限界支出シェアは一定である。

このことを証明する。$\dfrac{\partial q_i}{\partial M} = Q_i$, $\dfrac{\partial q_j}{\partial M} = Q_j$ と置くと、(6)は

$$Q_i \cdot \frac{\partial Q_j}{\partial M} = Q_j \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial M}$$

となり

$$\frac{1}{Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial M} = \frac{1}{Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial M} \qquad (8)$$

が成り立つ。以下、劣等財[1]のない場合、即ち全ての i、j について

$$\frac{\partial q_i}{\partial M} = Q_i > 0, \quad \frac{\partial q_j}{\partial M} = Q_j > 0$$

である場合を考える。(8)から

$$\frac{\partial}{\partial M} \log Q_i = \frac{\partial}{\partial M} \log Q_j$$

であるから、Q を元に戻すと

$$\frac{\partial}{\partial M} \log \frac{\partial q_i}{\partial M} = \frac{\partial}{\partial M} \log \frac{\partial q_j}{\partial M} \qquad (9)$$

が言えた。

次に、$\mu_i = p_i \dfrac{\partial q_i}{\partial M}$ と置く。この時

$$\frac{\partial q_i}{\partial M} = \frac{\mu_i}{p_i}$$

である。この両辺を p_j で偏微分すると

$$\frac{\partial^2 q_i}{\partial M \cdot \partial p_j}=\frac{\frac{\partial \mu_i}{\partial p_j}}{p_i}$$

であり、第二の条件から、全ての異なるi、jに対し

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial p_j}=0$$

となる。また　$\sum_{i=1}^{n}\mu_i=1$　であるから、全てのiについて

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial p_i}=0$$

も言える。以上から、μ_iは全ての価格から独立であり、従ってMのみの関数であることがわかった。

ところで、$\mu_i=p_i\frac{\partial q_i}{\partial M}$　の両辺の対数をとると、

$$\log \mu_i=\log p_i+\log\left(\frac{\partial q_i}{\partial M}\right)$$

である。これをMで偏微分すると

$$\frac{\partial}{\partial M}\log \mu_i=\frac{\partial}{\partial M}\log\frac{\partial q_i}{\partial M}$$

この時、(9)から

$$\frac{\partial}{\partial M}\log \mu_i=\frac{\partial}{\partial M}\log \mu_j$$

である。また全てのμ_jがMのみの関数であることがわかっているから

$$\log\mu_i-\log\mu_j=\text{const.}$$

である。以下、前と同様にしてμ_iが一定であることが言える。

(1)　本文では劣等財のない場合だけを考えているが、一般的に

$$\int\frac{dx}{x}=\log|x|$$

であるから、劣等財の存在する場合も、符号の適当な処理により、同様の証明が可能である。

参　考　文　献

〔1〕 Geary, R. C., "A Note on 'A Constant Utility Index of the Cost of Living'," The Review of Economic Studies, 18 (1950), pp. 65—66.

〔2〕 Goldberger, A. S., "Directly Additive Utility and Constant Marginal Budget Shares," The Review of Economic Studies, 36 (1969), pp. 251—254.

〔3〕 Klein, L. R., and H. Rubin, "A Constant Utility Index of the Cost of Living," The Review of Economic Studies, 15 (1948), pp. 84—87.

〔4〕 Samuelson, P., "Some Implications of Linearity," The Review of Economic Studies, 15 (1948), pp. 88—90.

＊　なお、このノートをまとめるに当っては、倉林義正、二階堂副包両先生の有益な御示唆をいただきました。記して厚くお礼申し上げます。

(一橋大学大学院博士課程)