

ボックス・チャオ共著

『統計解析におけるベイズ流推論』

George E. P. Box and George C. Tiao

Bayesian Inference in Statistical Analysis

Addison-Wesley 1973 588+xiii pp.

本書はボックス、チャオ等を中心として主として1960年代後半に進められたベイズ流統計学の成果をまとめたものである。

ベイズ流統計学はサバージの *The Foundations of Statistics* (1954) 以後復活して、とくにアメリカにおいて展開されている統計学の1つの立場である。事前確率と事後確率を結びつける、いわゆるベイズの定理それ自体は200年も昔から知られていたが、K. ピアソン、R. A. フィッシャー以後、いわゆる標本理論が統計学の主流を占めてきた。それが、サバージが先の書物で、確率を主観的なものと認めた上で行動にある種の合理性を仮定すれば、必然的にベイジアン的な方法に従わねばならないことを示して以来、ベイズ流統計学は急速に勢いを回復して、決定理論とも結びつき多くの成果をあげてきている。たとえば、数学的に扱ったものには、リンドレー、デ・グルート、決定問題に関してはワルド以後ブラックウェル=ガーシック、経営学の分野ではシュレイファなどをあげることができよう。

さて、本書の著者たちがそうしているように、決定理論から離れることにすれば、統計的推論においてベイジアンと標本分布論との差は決定的でないとと言われることもあった。もちろん、これまでの主流であった標本分布論(その代表としてのネイマン・ピアソン理論)には不完全なところがあり、たとえば信頼区間の構成など場合によっては不合理な結論を導くことがある。ベイジアンではこの点について少なくとも論理的には矛盾のない体系

を構成することができるのであるが、結論についての解釈はともかく、これまでの手法それ自体が問題とされることは少なかったからである。したがって、ここまでの話は確率の解釈をめぐる論争だけであると言ってもよく、標本分布論の手法では解決が困難であるような問題に対して、ベイジアンが有効な手法を提供し得るかという点が本質的な問題であろう。この点に関して、本書の一部は肯定的な解答を与えていると評価できる。

ベイジアン統計学の基本的な問題である事前分布については、個人の持っている知識を重視するレイファ、シェレイファなどの経営統計学の考え方、数学的変換に関する不変性を重視するジェフリーズ、分布の族が不変であること（いわゆる共役分布）を要求するデ・グルート、事前の知識がそれほど正確でなければ、データが事後分布を決定する（いわゆる高精度測定原理）ということから散漫な事前分布を用いるという考え方、その他いろいろな考え方がある。

本書では、ボックスが化学畑出身の実験家であるということからもわかるように、数学的な形式を重んじることはなく、データそれ自身の持つ情報を引き出すという考え方から散漫な事前分布を仮定している。また、特定の損失関数を仮定してベイズ推定量を導くということとはせず、パラメータの事後分布そのものを問題にするという立場をとっている。これもデータのもつ情報だけを引き出そうという考え方から導かれるものであり、これによって彼らの用いるベイジアンの手法が実用性を持つことになるのである。

さて、以下に本書の内容を順に見てゆくことにする。第1章はベイズ流推論の本質と題して、彼らの統計学に対する考え方が述べられている。ここでは標本分布論の問題点が示され、ベイジアンではそれらは形式的には解決できると主張される。ここの叙述に関して言えば、彼らは確率の解釈はこうでなければならないというサベージ流のベイジアンではないようである。事前分布は先に述べたように散漫なものをを用いるが、その導入は丁寧でわかりやすい。なかでもパラメータを変換した後に散漫な事前分布を与えるという議論などは、彼らの実際問題に対する注意深さをうかがわせる。

第2章は正規分布に関する、ベイジアンの立場からのこれまでの結果の要約であるが、標本分布論との関連の叙述も手際がよい。

第3章と4章はベイジアンによる仮定設定と題して、正規分布からのズレを含む広い分布族を用いた推論を展開している。第3章では統計量の頑健性 robustness と

推論の頑健性とを区別し、いわゆる t 統計量は正規分布からのズレに対して統計量としては頑健でも、推論としては頑健ではないことが示される。したがって正規性からのズレをあらわすパラメータを推定する必要があるが、彼らの想定した分布では次元の小さい十分統計量が存在しないので、標本分布論による接近は困難である。一方、ベイジアンでは事後分布さえ（仮に数値的にであっても）導けばよいのだからこのことは問題にならない。この場合のベイジアンの有用性は彼らの強調するところである。なお158ページの表から正規分布からのいろいろなズレに対して片側5%点はほとんど変化しないことが読みとれる。このことは通常5%有意水準が用いられることと考え合わせると興味深い。4章ではこの分布を用いて分散の比較の問題を扱っている。2つの分散の比の事後分布、および（これが複雑な形をしているため）その近似を求めている。なおこの数値例では正規性を仮定したときの推論とあまり差はないと結論されているが、それは彼らが正規性からのズレのパラメータの事前分布を対称な単峰型にしたからであって、J字型あるいはU字型にしたらこうはなるまいと思われる。

第5章以後は正規分布が仮定される。5章では変量模型について、分散の推定値が負になり得ること、およびデータのプールの方法についての標本分布論の弱点が述べられる。ここでベイジアンのもつもう1つの有利な点が明らかになる。すなわち、パラメータに関する制約条件を、事前分布を通じて、直接推論に取り入れることができるという点である。分散が正であるという条件を含めると、分散の比の事後分布はF分布でなく、それに制約条件による修正項がかかった形で表現されることになる。なお、この章の補論ではベイズ推定量の標本分布論的性質を議論するという考え方に対する著者たちの批判的見解が述べられている。彼らのベイジアンに対する考え方がうかがえて興味深い。

続く2つの章はこの結果の応用であるが、第6章では実験計画二元配置の問題、第7章では一元配置とBIBDの問題が扱われる。ここでは母数模型と変量模型に対する事前分布の差が事後分布に与える影響についての考察、および通常推定量の非許容性 inadmissibility に関するC. スタインの結果との関連（良く知られていることではあるが）以外には特に面白い問題はない。

第8章では多変量正規分布の推定の問題がとりあげられている。多くの結果は良く知られていることだが、行列変量 t 分布 matrix variate t distribution の結果（特にその分散共分散行列）は他の教科書にはない新しい結

果であり、著者たちの研究は数学的側面でも深いことを示している。ただ、この議論と同様の方法で次に述べられている逆ウィッシュアート分布(ウィッシュアート分布の逆行列の分布)の期待値を求めることが可能であるのだが、残念ながらそのことには言及していない。続く第9章では第8章のモデルの特別な場合をいろいろ扱っている。このあたりでは新しい手法というより、これまでの問題に対してベイジアン^①の推論はどう行なわれるかという公式の羅列である。

最後の第10章は非常に面白い。データに適当な変換をして、正規分布、等分散、線形模型、交差項がないことなどの仮定が満たされるようにしようというものである。この変換のパラメーターの推定の問題には、第3章と同じく次元の小さい十分統計量が存在しない。したがってベイジアン^②の有用性がまた示されるという訳である。

以上、本書に添ってその内容をみてきたが、ベイジアン^③の手法には有利な点ばかりあるのではないことに注意しなければならない。十分統計量が存在しないときにもデータの情報を集約できるとは言っても、それは事後分布としてなのであって、無限次元と有限次元の空間の担い得る情報を比較するに等しい。また、推定するパラメーターの数が1ないし2ならば分布あるいは等確率曲線を描くことができるが、3ないし4以上になるとその同時分布を表現することは困難であり、すべてのパラメーターの(事後分布の)相関が高いときには問題がある。また分布が描ける場合でも特別な場合を除き電子計算機^④の存在は不可欠のものとなろう。さらに数値的に導いた事後分布ではそのスソの状況は正確にはわからないことがあるから、この点に関しては問題を残すだろう。

しかしながら、筆者はベイジアン^⑤と標本分布論との比較はこのような、推論の手間と精度の関係といった問題でなされるべきものではないと考えている。それは確率論を実際に適用する場合の解釈の妥当性の問題であろう。この点についてはこれまで多くの議論がなされているが、筆者はこの本の著者たちとは若干の差を感じながらも、特に経済の問題に関してはベイジアン^⑥の考え方が直観的に受け入れ易い筈であると信じている、とだけ言っておこう。

本書を一読してすぐわかるように、豊富な数値例と各章末の整理された公式は、この手法を実際に利用させようという著者たちの意図をはっきりと示している。単に、これまでの結果をベイジアン^⑦の言葉を使って書き変えたという以上の内容を持つ本書は、このような点からみても、わが国におけるベイジアン統計学の考え方の普及に

大きく役立つものと期待したい。

【美 添 泰 人】