(博士学位請求論文要旨)

一橋大学大学院国際企業戦略研究科 金融戦略・経営財務コース (2014.1.31)

数理ファイナンスにおけるフィルトレーションと曖昧性に関する諸考察

Considerations on Filtrations and Ambiguity in Mathematical Finance

足立高德 (ID11F001 中川ゼミ)

Takanori ADACHI, ICS, Hitotsubashi University

1　本論文の構成　本論文の構成は以下の通りである.

2　本研究の目的　およそ数理ファイナンスにおいて多期間の問題を考える際に，フィルトレーションを使わずにその定式化や解法を論ずることは不可能である．証券のプライシングしかり，ヘッジ技術しかり，最適ポートフォリオ制御問題しかり．いずれの場合も時間に伴って変化する観測可能な情報をフィルトレーションを使って表現することによって，問題を定式化し計算を行う．こうしたフィルトレーションは時刻ごとに σ 加法族を与え，その下で我々は条件付き期待値を計算することになる訳であるが，これは同時に各時刻ごとにひとつの客観的確率分布を与えることを意味する．

一方，世界が最近経験したリーマンショックを始めとする「想定外」の出来事は，こうした「客観的な」ひとつの確率分布だけを想定することの危険性を顕在化させることになった．特に，金融業界ではこの客観的確率分布のもとでの**不確実性** (*risk*) とは別に，確率測度 (あるいはそれによって決まる確率分布) そのものが特定できない不確実性を扱うために，複数の主観確率に基づく確率分布を想定する必要性を考えるようになってきた. 実はこうした「考え」は**意思決定理論** (*decision theory*) では 1950 年台から**曖昧性** (*ambiguity*) という名前で論じられてきていた.

本論文では，このフィルトレーションと曖昧性に関するいくつかの新しい定式化を与え，それらのファイナンスへの応用について論じた.

以下では，$\mathcal{T}$ は最小元 0 と適当な位相を持つ時間域，また，

$$(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{G} = \{\mathcal{G}_t\}_{t \in \mathcal{T}}) \tag{1}$$

をフィルトレーション付きの可測空間とする.

3　追随過程　論文第 2 章での話題は，情報の非対称性などが原因で発生する情報の観測時刻の遅延である．これを表現するために**追随過程** (***follower process***) という非減少な確率時刻

(*random time*) の列を定義した．以下では，$\mathbb{P}$ を可測空間 (1) 上の確率測度とする．

定義 1. [追随過程] **生の追随過程** (***raw follower process***) は，以下の条件を満たす確率過程 $f : \mathcal{T} \times \Omega \to \mathcal{T}$ である:

1. $f_0 = 0$ $\mathbb{P}$-a.s.,
2. すべての $\tau \in \mathcal{T}^*$ に対して，$f_\tau \leq \tau$ $\mathbb{P}$-a.s.,
3. すべての $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}^*$ に対して，$\tau_1 \leq \tau_2 \ \Rightarrow \ f_{\tau_1} \leq f_{\tau_2}$ $\mathbb{P}$-a.s.

ただし $\mathcal{T}^*$ は $\mathcal{T}$ 値を持つすべての確率時刻の集合である．

$\mathbb{G}$-追随過程とは，$\mathbb{G}$ 適合な生の追随過程である．

もともと追随過程は，構造型信用リスクモデルにおける情報の遅延を表現するために導入された．追随過程は各確率時刻が停止時刻であるという前提を仮定しないという意味で Guo, Jarrow, Zeng が導入した**時変過程** (***time change process***) の一般化になっている [4].

今，任意の $\tau \in \mathcal{T}^*$ で，

$$f_{f_\tau} = f_\tau \ \mathbb{P}\text{-a.s.}. \tag{2}$$

を満たす追随過程を**冪等追随過程** (*idempotent follower process*) と呼ぶことにすると，これは**再生過程** (***renewal process***) によって駆動された追随過程などの自然な例を持つ．我々は，冪等追随過程が時変過程では表現し辛いことを示した．

つぎに追随過程によって変調された（すなわち遅延させることによって得られた）新しいフィルトレーション $\mathbb{G}^f = \{\mathcal{G}^f_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ を

$$\mathcal{G}^f_t := \bigvee_{s \in [0,t]_{\mathcal{T}}} \mathcal{G}_{f_s}. \tag{3}$$

で定義し，**追随フィルトレーション** (*follower filtration*) と呼ぶ．するとこれは時変過程によって変調された**連続遅延フィルトレーション** (***continuously delayed filtration***) の一般化になっている．

最後に離散時間を仮定して，冪等追随過程で変調された追随フィルトレーションのもとでの条件付き期待値がある種のマルコフ性を持つことを示した．

定理 1. f を冪等追随過程，また g を与えられた関数とすると，$s \geq t$ に対して，

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[g(Y_s) \mid \mathcal{G}^f_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[g(Y_s) \mid f_t, Y_{f_t}]. \tag{4}$$

ただし

$$Y_t(\omega) := y_0 + \nu t + \sigma M_t(\omega), \tag{5}$$

$$M_t(\omega) := \sum_{s \in]0,t]_{\mathcal{T}}} X_s(\omega), \tag{6}$$

$$X_t(\omega) := \begin{cases} \sqrt{\delta} & \text{if } \omega(t) = \mathfrak{H} \\ -\sqrt{\delta} & \text{if } \omega(t) = \mathfrak{T}. \end{cases} \tag{7}$$

この結果は，冪等追随過程によって不完全性を導入された構造型信用リスクモデルで，倒産可能な社債のプライシングを行う際に利用できる．

4　拡張状態　第 2 章で扱った追随過程は情報の非対称性を表現する一手段であるが，情報の観測者の情報把握能力，あるいは直観力にまでは立ち入っていない．論文第 3 章では，こうした観測者個人の直観力をも表現するために，**拡張状態** (*extended state*) という概念を導入した．拡張状態は，観測者の情報把握の歴史である．ここで情報把握とは，西田幾多郎の**純粋経験**に近い概念である [7]．つまり主客の別なく，なんら考えを巡らす前の直接経験であり，それ自身は何ら**解釈**されていない．

定義 2. [拡張状態] フィルトレーション付き可測空間 (1) が与えられているとき，集合 $\Omega[\mathbb{G}]$ を以下のように定義する．

$$\begin{aligned}\Omega[\mathbb{G}] :=\{e : \mathcal{T} \to \mathcal{G} \mid (\forall t \in \mathcal{T}) e(t) \in \mathcal{G}_t - \{\emptyset\} \\ \text{且つ } (\forall s, t \in \mathcal{T})[s \leq t \;\Rightarrow\; e(s) \supset e(t)]\}. \end{aligned} \tag{8}$$

$\Omega[\mathbb{G}]$ の要素を**拡張状態**と呼ぶ．

今，e を拡張状態とした時，時刻 t の値 $e(t)$ が純粋経験を表わすわけであるが，これは定義より所与の確率空間の状態集合 Ω の部分集合である．このとき，$\omega \in e(t)$ を選択することは，純粋経験 $e(t)$ を**解釈**することに対応する．

ある状況では，Ω を $\Omega[\mathbb{G}]$ に自然に埋め込むことができる．これが「拡張」状態と呼ぶ所以である．

観測者の**能力**は，彼女の置かれた環境 (**外的理由**，情報の非対称性など) も彼女の直観力 (**内的理由**) もひっくるめた形で，拡張状態の集合として表現される．ここで，内的理由を表現する集合の例として以下の様な集合 $\Omega^\varepsilon[\mathbb{G}]$ を定義する．ただし $\varepsilon > 0$ である．

例 1.

$$\mathcal{N}_{\Omega[\mathbb{G}]}(\omega) :=\{e \in \Omega[\mathbb{G}] \mid (\forall t \in \mathcal{T}) \omega \in e(t)\}, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^\varepsilon_{\mathbb{G}}(\omega) :=\{e \in \mathcal{N}_{\Omega[\mathbb{G}]}(\omega) \mid (\forall t \in \mathcal{T}) t \geq \varepsilon \;\Rightarrow\; \big[e(t) \notin \mathcal{G}_{t-\varepsilon} \\ \text{または } (\forall A \in \mathcal{G}_t)[\omega \in A \subset e(t) \;\Rightarrow\; A = e(t)]\big]\}, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\Omega^\varepsilon[\mathbb{G}] := \bigcup_{\omega \in \Omega} \mathcal{N}^\varepsilon_{\mathbb{G}}(\omega). \tag{11}$$

$\Omega^\varepsilon[\mathbb{G}]$ は，過去 ε 以降にアップデートされた情報があるときは，ε より以前の情報にとどまっているほど愚かではないような能力を表す拡張状態の集合である．これはまた**支配部分集合** (*dominant subset*) と呼ばれる部分集合のクラスに属している．

今，外的理由を追随フィルトレーションで，また内的理由を支配部分集合で記述した以下の様な拡張状態の集合を考える．

$$\mathcal{S} := \Omega^\varepsilon[\mathbb{G}^f] \tag{12}$$

するとこれはストレス・テストの為のシナリオを体系的に作成する指針となり得るだろう．

最後に，拡張状態の多期間選択理論 [8] への応用として離散時間域 $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \ldots, T\}$ における再帰的効用関数の拡張を試みた．

定義 3. [状態曖昧性を考慮した再帰的効用関数] 消費計画の集合 $\mathcal{H}$ を以下のように定める．

$$\mathcal{H} := \{h : \mathcal{T} \times \Omega \to X \mid h \text{ は } \mathbb{G} \text{ 適合過程 }\} \tag{13}$$

ただし，X は適当な Polish 空間．また能力が $\mathcal{S} \subset \Omega[\mathbb{G}]$ で与えられているとする．このとき，

$$V : \mathcal{T} \times \mathcal{S} \to (\mathcal{H} \to \mathbb{R}) \tag{14}$$

を $(t, e) \in \mathcal{T} \times \mathcal{S}$ と $h \in \mathcal{H}$ に対して，以下のように定義する．

$$V(t,e)(h) = \begin{cases} I(e(t))(h(t,-)) + \beta J(t,e)(h) & \text{if } t < T, \\ I(e(t))(h(T,-)) & \text{if } t = T \end{cases} \tag{15}$$

ただし

1. $I : \mathcal{G} \to ((\Omega \to X) \to \mathbb{R})$,
2. $\beta \in]0, 1[$,
3. $J : \mathcal{T} \times \mathcal{S} \to (\mathcal{H} \to \mathbb{R})$.

ここで，関数 J としてはつぎのようなものが考えられる．

$$J(t,e)(h) := \inf_{\eta \in \mathcal{P}(t,e)} \int_{\mathbf{D}(t,e)} \Big(\inf_{(t+1,d) \in \mathbf{N}(t,e,\omega)} V(t+1,d)(h) \Big) d\eta(\omega) \tag{16}$$

ただし，$\mathbf{N}(t,e,\omega)$ は時刻 t までは拡張状態 e と同じ軌跡を持ち且つ ω を常に含むような拡張状態 d とつぎの時刻 $t+1$ の順序対 $(t+1, d)$ の集合，また $\mathcal{P}(t,e)$ はある種の条件を満たす事前確率測度の ((t,e) で添字付けされた) 集合族である．

(16) の最初の inf は Gilboa-Schmeidler [3] 以来考慮されてきた事前分布の不確実性 (*proir ambiguity*) を表す一方, ふたつめの inf は観測者の能力から生じる**状態曖昧性** (***state ambiguity***) を表している．形からも明らかなように，この関数 J は従来よりもより保守的な値を持つ関数になっている．

一方 (15) のなかの関数 I の形として以下のような例を考えた．

$$I(e(t))(\xi) := \inf_{\omega \in e(t)} u(\xi(\omega)) \tag{17}$$

ここで $u : X \to \mathbb{R}$ は vNM 型の効用関数である．しかしながら，この方法では $\omega \in e(t)$ の部分で純粋経験 $e(t)$ を解釈してしまっているため，本来の純粋経験の力を台無しにしてしまっている．

5　フィルトレーションと曖昧さの圏論による定式化　論文第 4 章では，フィルトレーションと曖昧性を**圏論** (*category theory*) [6] を使って定式化し，その枠組で**多期間貨幣リスク測度** (*dynamic monetary risk measure*) の値の符号を反転させた**多期間貨幣価値測度** (*dynamic monetary value measure*) の理論を展開した．以下で何故圏論を使うかについて説明する．

今，フィルトレーション $\{\mathcal{G}_t\}_{t \in [0,T]}$ と $\mathcal{G}_T$ 可測な確率変数 X で表された終端時刻 T でのペイオフが与えられているとする．このとき T 以前の時刻 t での X の値を求めたいというのが数理ファイナンスではよくある展開である．この結果の値を時刻 t での**条件付き価値**と呼び $\mathcal{G}_t$ 可測な確率変数 $\varphi_t(X)$ で表すとしよう．Föllmer-Schied [2] の 11 章で定義されている条件付きリスク測度 (*conditional risk measure*) の値の逆符号の値を持つ条件付き価値測度を考えると，この条件付き期待関数 φ_t の完璧な例になっている．

ここで条件付き関数の問題点のひとつは，これらの定義域として終端時刻 T で可測な確率変数しか許していない，という点である．これを定義域を任意の時刻で可測な確率変数を許すように拡張して，例えば $s < t \leq T$ の時，新しい条件付き関数 φ_t^s を $\mathcal{G}_t$ 可測確率変数から $\mathcal{G}_s$ 可測確率変数への関数として定義すると，どんな風な性質を持つべきだろうか？ これに対する答えは恐らく下図のように $s \leq t \leq u \leq T$ のときに，$\varphi_t = \varphi_T^t$ や $\varphi_t^s \circ \varphi_u^t = \varphi_u^s$ を満たすことと考えるのが自然だろう．

$$\begin{tikzcd} s & t \arrow[l, "\varphi_t^s"'] & u \arrow[l, "\varphi_u^t"'] \arrow[ll, bend right, "\varphi_u^s"'] & T \arrow[l, "\varphi_u=\varphi_T^u"'] \end{tikzcd}$$

ある種の一貫性を保証する為の後半の条件は，**圏論** (***category theory***) として知られている抽象関数理論を利用できる可能性を示唆している．圏論は数学や物理学の多くの領域で広く使われているが，今までのところファイナンス理論への応用はないと思われる．

論文第 4 章の話に戻る．最初に，可測空間 $(\Omega, \mathcal{G})$ が与えられた時，$\mathcal{G}$ の部分 σ 加法族と $(\Omega, \mathcal{G})$ 上で定義可能な**主観** (***subjective***) 確率測度の順序対がなす圏 χ を導入する．

定義 4. [圏 $\chi_{\mathcal{F}}, \chi_{\mathbb{P}}$ と χ]

1. $\chi_{\mathcal{F}} := \chi_{\mathcal{F}}(\mathcal{G})$ を，$\mathcal{G}$ のすべての部分 σ 加法族の集合に集合の包含関係をいれた**半順序集合** (***partially ordered set***) とする．これは圏とみなせる．

2. $\chi_{\mathbb{P}} := \chi_{\mathbb{P}}(\mathcal{G})$ を，$(\Omega, \mathcal{G})$ 上のすべての確率測度の集合に以下のような**前順序** (***preorder***) $\leq_{\chi_{\mathbb{P}}}$ をいれた前順序集合とする．すなわち，$\mu, \nu \in \chi_{\mathbb{P}}$ に対して，
$$\mu \leq_{\chi_{\mathbb{P}}} \nu \quad \Leftrightarrow \quad \mu \gg \nu \tag{18}$$
ここで $\mu \gg \nu$ は，ν が μ に絶対連続であることを表す．すると $\chi_{\mathbb{P}}$ も圏とみなせる．

3. $\chi := \chi(\mathcal{G})$ は**積圏** (***product category***) $\chi_{\mathcal{F}} \times \chi_{\mathbb{P}}$ である．言い換えれば，χ は $\mathcal{F} \in \chi_{\mathcal{F}}$, $\mu \in \chi_{\mathbb{P}}$ であるようなすべての順序対 $(\mathcal{F}, \mu)$ をオブジェクトに持つ．今，$\mathcal{U}$ が χ のオブジェクトの時，その第 1 要素の σ 加法族と第 2 要素の確率測度を，それぞれ $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ と $\mathbb{P}_{\mathcal{U}}$ で表記する．すなわち $\mathcal{U} = (\mathcal{F}_{\mathcal{U}}, \mathbb{P}_{\mathcal{U}})$. すると χ の中で $\mathcal{V}$ から $\mathcal{U}$ への射があるための必要十分条件は
$$\mathcal{F}_{\mathcal{V}} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{U}} \text{ 且つ } \mathbb{P}_{\mathcal{V}} \gg \mathbb{P}_{\mathcal{U}} \tag{19}$$
となる．

圏 χ は，リスクと曖昧さの両方が変化するような状況を表現している．そして，χ 上の**前層** (***presheaf***) として**一般化条件付き期待値** (*generalized conditional expectation*) を定義した．

次に**貨幣価値測度** (***monetary value measure***) (これは自動的に多期間となる) を χ 上の前層として定義した後，この貨幣価値測度が従来は公理として導入していた**時間一貫性** (*time consistency*) 条件を満たすことを示した．これはこの公理の妥当性を示すよい証拠になる．一方，Kupper-Schachermayer [5] の結果 — 時間一貫性と**分布不変性** (***law invariance***) の両方の公理を満たす多期間リスク測度は ***entropic*** リスク測度しかない — を思い出すと，制約が強すぎる結果とも言える．

Artzner 達は，貨幣価値測度の堅牢表現 (robust representation) の理論を展開した [1] が，我々も**凹型** (***concave***) な圏論的貨幣価値測度で同様の結果を得た．我々はさらに，堅牢表現に触発されて，時間一貫性の条件を壊すための技術を開発することにした．しかしながら，こうして作られる**一般化**貨幣価値測度がもはや関手とはならないことは明らかである．

この問題を解決するために，観測者の**主観構造** (***strucutre of subjectivity***) を χ の部分圏 ${}^e\chi$ 上の *Grothendieck cotopology* として定義した．この cotopology を生成する *cobasis* に属するある種の構造毎に決まる関数の族として**一般化貨幣価値測度** (*generalized monetary value measure*) を定義するとこれは必ずしも時間一貫性を持たなくなり，分布不変性との相性がよくなることが期待できる．

Artzner 達によって貨幣価値測度の公理化が初められて以来 [1]，時間一貫性や分布不変性を始めとするいろいろな公理が提案されてきた．こうした研究は理論的にも実務的にも重要である．が，一方これら数々の公理の中から，一体どのような公理の集合を選べばよいかという理論的な判定基準も必要になってきている．たとえば 2012 年に JP Morgan Chase 銀行が，CDS によるヘッジを失敗した事件などを考えるにつけ，こうした判定基準の重要性は益々高まっていると思われる．

論文第 4 章では，与えられた貨幣価値測度の**公理群**が妥当な選択であるかどうかの判定基準として，その公理群を満たす貨幣価値測度のクラスを特徴付けするような χ 上の ***Grothendieck* 位相** (***Grothendieck topology***) の存在性が利用できるかどうかについて考察した．すなわち，公理群が妥当であるための必要十分条件は，ある *Grothendieck* 位相 J が存在して，件の公理群を満たすようなすべての χ 上の貨幣価値測度からなる集合が，**景** (***site***) (χ, J) 上のすべての**層** (***sheaf***) のなす集合と一致するものとする，という基準を提案した．以下で詳細を述べる．

定義 5. $\mathcal{A}$ を貨幣価値測度の公理の集合とする．

1. $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ は $\mathcal{A}$ を満たすすべての貨幣価値測度をオブジェクトする $\widehat{\chi}$ の**充満** (***full***) 且つ**忠実** (***faithful***) な部分圏である．
2. $J_{\mathcal{A}}$ は $\mathcal{A}$ を満たすようなすべての貨幣価値測度が層となるような最大の Grohtendieck 位相である．
3. $\mathcal{M}_0$ は，すべての貨幣価値測度からなる圏である．
4. 集合 $\mathcal{A}$ は，以下のダイアグラムが可換であるような関手 $\eta_{\mathcal{A}} : \mathcal{M}_0 \to \mathcal{A}$ が存在するとき，**完全** (***complete***) と呼ばれる．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_0 \arrow[r, tail] \arrow[d, "\eta_{\mathcal{A}}"'] & \widehat{\chi} \arrow[d, "\pi_{J_{\mathcal{A}}}"] \\ \mathcal{M}[\mathcal{A}] \arrow[r, tail] & \mathrm{Sh}(\chi, J_{\mathcal{A}}) \end{tikzcd} \tag{20}$$

ここで，$\widehat{\chi}$ は χ 上のすべての前層がなす圏，$\mathrm{Sh}(\chi, J_{\mathcal{A}})$ は，景 $(\chi, J_{\mathcal{A}})$ 上のすべての層がなす圏，また $\pi_{J_{\mathcal{A}}}$ は，$\mathrm{Sh}(\chi, J_{\mathcal{A}})$ から $\widehat{\chi}$ への包含関手の左随伴関手として得られる**層化関手** (***sheafification functor***) である．

定理 2. $\mathcal{A}$ を公理の完全集合とする．すると，貨幣価値測度 φ に対して，$\pi_{J_{\mathcal{A}}}(\varphi)$ は $\mathcal{A}$ を満たすような最良の近似となる貨幣価値測度である．

6　結論と課題　論文第5章では，本論文で行った議論を総括した上で，本論文で扱うことができなかった課題について言及した．以下ではこうした課題について述べる．

拡張状態の概念の背後には，西田哲学から借用してきた純粋経験の考えがある．しかしながら，この哲学に照らすと (17) のような関数 I の定義は，せっかくの概念の力を損ねてしまっている．この点を改善するために，$\omega \in e(t)$ を使わず $e(t)$ から直接 I の値を得る手法を探るべきだろう．

(16) の中で用いられている事前確率測度の集合 $\mathcal{P}(t, e)$ は，**矩形条件** (***rectangular condition***) という条件を満たしていることを仮定した．しかしこの条件と ${}^{e}\chi$ 上で考えた Grothendieck cotopology の定義に出てくる**安定性** (***stability***) と**推移性** (***transitivity***) の条件はとても近い形をしている．この関係を明らかにできれば，矩形条件を事前確率の集合に要求することへのさらなる正統性を得られるかもしれない．

圏 χ には，状態曖昧性の概念は含まれていない．この概念も含めて統一的に扱える圏を考えることは有用であろう．

凹型貨幣価値測度の公理のような重要な公理群の完全性を調査したい．さらに進んで，**安全な**貨幣価値測度の基礎になるような完全な公理集合を提案できれば素晴らしい．

References

[1] Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, and David Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9(3):203–228, 1999.

[2] Hans Föllmer and Alexander Schied. *Stochastic Finance*. Walter de Gruyter, Berlin, 3rd edition, 2011.

[3] Itzhak Gilboa and David Schmeidler. Maxmin expected utility with non-unique prior. *Journal of Mathematical Economics*, 18:141–153, 1989.

[4] Xin Guo, Robert A. Jarrow, and Yan Zeng. Credit risk models with incomplete information. *Mathematics of Operations Research*, 34(2):320–332, 2009.

[5] Michael Kupper and Walter Schachermayer. Representation results for law invariant time consistent. *Math Finan Econ*, 2:189–210, 2009.

[6] Saunders MacLane. *Categories for the Working Mathematician*. Number 5 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 1997.

[7] Kitarō Nishida. *An Inquiry into the Good (Zen no Kenkyu)*. Kodokan, Tokyo, 1911.

[8] Tomasz Strzalecki. Temporal resolution of uncertainty and recursive models of ambiguity aversion. *Econometrica*, 81(3):1039–1074, 2013.