

# 博士学位請求論文審査報告書

申請者：吉田直広

論文題目：Essays on Mean-Variance Portfolio Selections and Utility Maximizations  
in Mathematical Finance

## 1. 論文の主題と構成

吉田氏が提出した博士論文は、多期間の平均一分散 portfolio 選択問題、連続時間非完備市場における効用最大化問題、離散過程での伊藤公式と Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程式という、三つの数理ファイナンスにおける重要な問題を考察し、それぞれに解析した論考をまとめたものである。

数理ファイナンスにおいては、不確実性は一般に確率過程によって記述されるが、不確実な状況のもとで最適解を求める問題は、理論上も応用上も重要な研究対象である。不確実性を確率過程によって記述する場合でも、平均を所与として分散を最小化する平均一分散 portfolio 選択問題、あるいは満期での効用を極大化する効用最大化問題など、様々な形の問題設定が可能である。そのため、現在までの研究の蓄積は膨大であり、重要な知見も数多く得られている分野である。吉田直広氏は、これら先行研究を十分に咀嚼した上で、問題の解析においては複雑な計算を的確に実行し、それぞれの結果において新たな解析の手法を提示した。さらに、離散 HJB 方程式の研究では、その解の時間無限小極限の特徴付けも与えた。結果として、離散最適化問題に新しい独自の視点を提供しているという意味で重要な論文となっている。

本論文の具体的な構成は次の通りである。

Chapter 1. Overview

Chapter 2. On explicit solutions to mean-variance portfolio selections via mean-variance hedging

Chapter 3. Remarks on optimal strategies to utility maximization in continuous time incomplete markets

Chapter 4. On discrete Itô formulas and discrete Hamilton-Jacobi-Bellman equations

Chapter 5. Conclusions

## 2. 各章の概要

第1章では、本論文全体の概観が述べられている。具体的には、研究の動機や先行研究との比較、各章の内容が簡潔にまとめられている。第2-4章が本論文の主要な章である。

第2章では、多期間の平均一分散 portfolio 選択問題を取り上げ、特に以下に述べる2つの問題において明示的な解を求めることに成功した。まず離散時間の問題において、既に知られている平均一分散 hedge 問題の手法を応用することにより明示的な解を求めた。従来は解の存在に関する結果、すなわち解がある等式を満たす関数という形で陰的に与えられるものがほとんどであったため、これらの結果は吉田氏の貢献と判断できる。さらに連続時間での連続 semi-martingale モデルの問題においても、やはり連続な平均一分散 hedge 問題の手法を応用することにより、従来よりも見通しのよい明示的な解を求める解法を得ることに成功した。それぞれの問題における解析は複雑で膨大であるが、丁寧な計算を重ねることでそれらの結論を導いている。

第3章では、非完備市場における期待効用最大化問題を取り上げ、最適戦略が満たすべき方程式を、既存の手法とは異なり、双対定理を用いずに導出する方法を確立した。その方法によって、jump 幅が可予測とは限らない複合 Poisson 過程モデルにおいて、期待効用最大化問題の最適化戦略が満たす方程式を導出した。ともに解析はやはり複雑で膨大であるが、一つ一つ丁寧に計算を行うことでそれらの結論を導いている。

第2章と第3章で取り上げた問題そのものは、既に研究がなされてきたものであり、得られた解に特に新奇性があるものではない。しかし、解は陰的に求められるだけでなく、工夫すれば明示的に求めることが可能であるという新たな視点を提供している点が吉田氏の貢献である。第3章の内容は、*JSIAM Letters* に単著で公刊され、第2章の内容もその水準に達しており、今後の査読付き雑誌における公刊が見込まれる。

第4章では、まず離散 jump 拡散過程における離散伊藤公式を導出し、その応用として、離散 jump 拡散過程モデルの場合の期待効用最大化問題の価値関数が満たす離散 HJB 方程式を導出した。さらに、離散 HJB 方程式の解と、連続時間幾何 Brown 運動モデルにおける HJB 方程式の解との関係を考察し、離散拡散過程の時間幅を無限小にした極限においては、いくつかの仮定をおいたもとで、離散 HJB 方程式の解が対応する連続時間幾何 Brown 運動モデルにおける最適化問題の HJB 変分不等式の粘性解であることを証明した。離散過程における解が、時間無限小の連続極限においてどのような解に収束するのかという問題は、状況の設定を含めて丁寧に考察する必要がある。既存の研究ではその重要性に関わらずあまり取り上げられなかった研究対象であるが、丁寧な考察がなされ比較的受け入れ易い結論が導かれている。この章の内容は、石村教授との査読付き雑誌公刊済みの共同研究を含む。

第5章では全体の結論が改めて述べられ、論文としての統一感をもたせている。

### 3. 全体的な評価

本論文で考察された平均一分散 portfolio 選択問題と期待効用最大化問題は、ともに既存の問題に対して別の視点による解法を提示するというものである。得られた結論自体に特に目新しさはないが、そこでの解析における複雑な計算に関しては、見通しのよ

い手法によって入念にかつ正確に処理が行われており、吉田氏の高い数理能力が十分に示されていることが理解される。また、離散 jump 拡散過程のもとで期待効用最大化問題の価値関数が満たす離散 HJB 方程式の研究では、いくつかの仮定があるものの、時間幅を無限小にした極限の特徴付けを明確に与えることに成功した。まとめるならば、吉田直広氏は、本論文において今後研究者として活動するための基礎的な能力を、既に十分に備えていることを示したと判断できる。

とはいえ、論文に不備な点が多い。その一つは、一般に最適化問題の研究全体に関わることでもあるが、理論面での進歩が大いに進んだため現実の問題とはあまりに乖離した状況を考察しているのではないか、という批判である。たとえ数学として興味深い内容であっても、現実の経済活動に応用が不可能であったり、あるいは適用が困難であったりすれば、研究そのものの意義も半減する。吉田直広氏には、今後も実際の経済現象からかけ離れた机上の問題ではなく、応用に耐えうる研究を地道にかつ着実に進めてもらいたいと期待する。

さらに、2017年7月14日に実施された口述試験では、論文全般にわたり審査員から多くの質問や厳しい意見が寄せられた。具体的には以下のようなものである。論文は全体として研究の動機付けや意義、先行研究との比較など背景の説明などが足りず、その結果論文全体の流れが明確になっていない。またさらに、第2章の平均一分散 portfolio 選択問題では、問題の定式化が現実の経済現象とは齟齬があるような印象を与えていることなどに対する疑問や批判の意見である。吉田直広氏は、これらの疑問や批判的な意見のすべてを十分に検討した上で、すべてに対応しかつすべてをプラスの方向で反映させて入念な改訂作業を進めた。論文題目も内容をよりよく反映すべく改題された。その結果として、審査員全員がほぼ満足可能な水準までの改訂がなされ、全員の了解が得られた。

よって以上により、我われ審査員一同は、吉田直広氏が一橋大学博士（経済学）の学位を授与されるに十分な資格を有していると判断する。

2017年9月14日  
論文審査員（五十音順）  
石村 直之  
高岡 浩一郎  
西出 勝正  
本田 敏雄  
山田 俊皓

論文審査委員長 本田 敏雄