

予想と均衡価格の安定性

奥 口 孝 二 *

一 序

全ての財が粗代替財であるならば、均衡価格が安定的であるための必要且つ十分条件は粗代替行列の n 次主座小行列式(但し n は1から財の種類の数までの値をとる)の符号が $(-1)^n$ となることである¹⁾。これは粗代替性と均衡価格の安定性に関する周知のMetzler, [8]の定理であるが、後にArrow and Hurwicz, [1], F. H. Hahn, [6]及び根岸隆[9]はそれぞれ独立に、粗代替性の仮定のもとでは均衡価格は必然的に安定的であることを明らかにした。

他方、Arrow and Enthoven [3]は予想価格を含む場合へMetzlerの定理を拡張した。この場合、予想価格は

$$P_i' = P_i + n_i P_i$$

(但し、 P_i' は第 i 財の予想価格、 P_i は第 i 財の実際の価格、 P_i はその変化率、 n_i はconst)にしたがって変化するものと想定され、各財に対する超過需要は全ての財の実際の価格 P_i と該財のみの予想価格の函数とされる。

Arrow and Nerlove, [4]はArrow and Enthoven, [3]

より一般的に、各財に対する超過需要は全ての財の実際の価格及び予想価格に依存するものとし、且つまたArrow and Enthovenとは異なり、予想価格の動きについてadaptive expectations

$$P_i' = \beta_i(P_i - P_i'), \beta_i > 0$$

を想定し、Metzlerの定理の拡張を行なった。

さらに、最近quasi-dominant main diagonalをもつ行列^[1]の特質がMckenzie [7]安井琢磨[10]によって明らかにされている。

以下、本論文の目的は、全ての財が実際の価格及び予想価格に相互に弱粗代替財 weak gross substitutes であるならば均衡価格は(locally) stable である、 n_i をquasi-dominant main diagonal matrixに関する定理を一般化した安井琢磨氏の定理を用いて証明することである。

用いられる記号を次の如く定める。

P_i 第 i 財の実際の価格 $i=0, 1, \dots, m$.

P_i' 第 i 財の予想価格 $i=0, 1, \dots, m$.

π_i 第 i 財を numeraire としたときの第 i 財の実際の価格 $i=0, 1, \dots, m$. $\pi_0=1$

π_i 第 i 財を numeraire としたときの第 i 財の予想価格 $i=0, 1, \dots, m$. $\pi_0'=1$

$X_i = X_i(P_0, P_1, \dots, P_m; P_0', P_1', \dots, P_m')$, $i=0, 1, \dots, m$.

第 i 財に対する超過需要函数。 X_i は連続(0)で実際の価格及び予想価格に関して零次同次(0)と仮定される。仮定(0)

46'

$$X_i = X_i(1, P_1/P_0, \dots, P_m/P_0; 1, P_1/P_0, \dots, P_m/P_0)$$

$$= x_i(\pi_1, \dots, \pi_m; \pi_1', \dots, \pi_m'), \quad i=0, 1, \dots, m$$

numéraire のなる場合及び第 0 財を numéraire とした場合のそれぞれについて、次の如き調整仮説 adjustment hypothesis を立てる。

$$\begin{cases} P_i = \alpha_i X_i, \alpha_i > 0, \quad i=0, 1, \dots, m \\ P_i' = \beta_i (P_i - P_i'), \beta_i > 0, \quad i=0, 1, \dots, m \end{cases} \quad (\text{A-H})$$

$$\begin{cases} \pi_i = \alpha_i' x_i, \alpha_i' > 0, \quad i=1, 2, \dots, m, \\ \pi_i' = \beta_i' (\pi_i - \pi_i'), \beta_i' > 0, \quad i=1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (\text{A-H})'$$

均衡価格とは

$$X_i(P_0, P_1, \dots, P_m, P_0', P_1', \dots, P_m') = 0 \quad i=0, 1, \dots, m$$

$$P_i' = P_i, \quad i=0, 1, \dots, m$$

を満足する価格 (ユニーク)

$$(P_0, P_1, \dots, P_m; P_0', P_1', \dots, P_m')$$

を云ふ。第 0 財を numéraire とする。

$$x_i(\pi_1, \dots, \pi_m; \pi_1', \dots, \pi_m') = 0, \quad i=1, 2, \dots, m$$

$$\pi_i' = \pi_i, \quad i=1, 2, \dots, m$$

を満足する価格 (ユニーク)

$$(1, \pi_1, \dots, \pi_m; 1, \pi_1', \dots, \pi_m')$$

のことである。以下では均衡価格を π 記号を用いて明示する。また、均衡価格は正であること (E+) が仮定される。

二 予想、弱粗代替性及び定安性

x_i を均衡点 $(\pi_1, \dots, \pi_m; \pi_1', \dots, \pi_m')$ の近傍に Taylor 展開し、二次以上の偏微係数の関係する項を無視する (偏微係数は全て均衡点で評価する)。以下同様。

$$x_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial \pi_j} (\pi_j - \pi_j) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial \pi_j'} (\pi_j' - \pi_j'), \quad i=1, 2, \dots, m$$

(A-H)' を整理して

$$\begin{cases} \pi_i = \alpha_i' \sum_{j=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial \pi_j} (\pi_j - \pi_j) + \alpha_i' \sum_{j=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial \pi_j'} (\pi_j' - \pi_j') \\ i=1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (\text{A-H})''$$

X_i は仮定 1 の第 1 回次近似を

$$\sum_{j=0}^m \frac{\partial X_i}{\partial P_j} P_j + \sum_{j=0}^m \frac{\partial X_i}{\partial P_j'} P_j' = 0 \quad i=0, 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^m P_j \frac{\partial X_i}{\partial P_j} + \sum_{j=1}^m P_j' \frac{\partial X_i}{\partial P_j'} = -P_0 \frac{\partial X_i}{\partial P_0} - P_0' \frac{\partial X_i}{\partial P_0'}$$

$$i=0, 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

より

$$\frac{P_i}{P_0} = \pi_j, \quad j=1, 2, \dots, m$$

$$\frac{P_j}{P_j} \frac{\partial X_i}{\partial P_j} = \pi_j' \frac{\partial x_i}{\partial \pi_j}, \quad i=0, 1, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, m$$

$$(2)$$

$$\frac{P_j}{P_j} \frac{\partial X_i}{\partial P_j'} = \pi_j' \frac{\partial x_i}{\partial \pi_j'}, \quad i=0, 1, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, m$$

$$\text{であるから (1), (2) より}$$

$$\sum_{j=1}^m \pi_j \frac{\partial x_i}{\partial \pi_j} \sum_{i=1}^m \pi_j \frac{\partial x_i}{\partial \pi_j} = -P_0 \left(\frac{\partial X_i}{\partial P_0} + \frac{\partial X_i}{\partial P_0'} \right),$$

$$i=0, 1, \dots, m \quad (3)$$

いじむ 全ての財は実際の価格及び予想価格に関して相互に弱相代替財 weak gross substitutes であるものと仮定する。
即ち'

$$\begin{cases} \frac{\partial X_i}{\partial P_j} \geq 0 & i \neq j, i, j=0, 1, \dots, m \\ \frac{\partial X_i}{\partial P_i} < 0, & i=0, 1, \dots, m \\ \frac{\partial X_i}{\partial P_j'} \geq 0, & i, j=0, 1, \dots, m \end{cases} \quad (S)$$

が成立するものとする。これより (2) 及び仮定 (E') を考慮する。第 0 財が numéraire のとき次の (S') が成立する。

$$\begin{cases} \frac{\partial x_i}{\partial \pi_j} \geq 0, & i \neq j, i=0, 1, \dots, m, j=1, 2, \dots, m \\ \frac{\partial x_i}{\partial \pi_i} < 0, & i=1, 2, \dots, m \\ \frac{\partial x_i}{\partial \pi_j'} \geq 0, & i=0, 1, \dots, m, j=1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (S')$$

$$\text{さらに、次の Walras' Law (W) を仮定する。}$$

$$\sum_{j=1}^m P_j X_j = 0 \quad (W)$$

動学体系 (A-H)' の係数なるものを行列を A とする。

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1' \frac{\partial x_1}{\partial \pi_1} & \dots & \alpha_1' \frac{\partial x_1}{\partial \pi_m} & \alpha_1' \frac{\partial x_1}{\partial \pi_1'} & \dots & \alpha_1' \frac{\partial x_1}{\partial \pi_m'} \\ \alpha_2' \frac{\partial x_2}{\partial \pi_1} & \dots & \alpha_2' \frac{\partial x_2}{\partial \pi_m} & \alpha_2' \frac{\partial x_2}{\partial \pi_1'} & \dots & \alpha_2' \frac{\partial x_2}{\partial \pi_m'} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_m' \frac{\partial x_m}{\partial \pi_1} & \dots & \alpha_m' \frac{\partial x_m}{\partial \pi_m} & \alpha_m' \frac{\partial x_m}{\partial \pi_1'} & \dots & \alpha_m' \frac{\partial x_m}{\partial \pi_m'} \\ \hline \beta_1' & & 0 & -\beta_1' & & 0 \\ 0 & & \beta_m' & 0 & & -\beta_m' \end{bmatrix}$$

$$= A_1 A_2$$

但し'

$$A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1' & & & & & \\ & \alpha_m' & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \beta_1' & & \\ & & & & \beta_m' & \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \pi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \pi_m} & \frac{\partial x_1}{\partial \pi_1'} & \frac{\partial x_1}{\partial \pi_m'} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \pi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \pi_m} & \frac{\partial x_2}{\partial \pi_1'} & \frac{\partial x_2}{\partial \pi_m'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \pi_m}{\partial \pi_1} & \frac{\partial \pi_m}{\partial \pi_m} & \frac{\partial \pi_m}{\partial \pi_1'} & \frac{\partial \pi_m}{\partial \pi_m'} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

また numéraire を前提しない場合について、次の行列 B を考える。

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_0 \left(\frac{\partial X_0}{\partial P_0} + \frac{\partial X_0}{\partial P_0'} \right) & \alpha_0 \left(\frac{\partial X_0}{\partial P_1} + \frac{\partial X_0}{\partial P_1'} \right) & \cdots & \alpha_0 \left(\frac{\partial X_0}{\partial P_m} + \frac{\partial X_0}{\partial P_m'} \right) \\ \alpha_1 \left(\frac{\partial X_1}{\partial P_0} + \frac{\partial X_1}{\partial P_0'} \right) & \alpha_1 \left(\frac{\partial X_1}{\partial P_1} + \frac{\partial X_1}{\partial P_1'} \right) & \cdots & \alpha_1 \left(\frac{\partial X_1}{\partial P_m} + \frac{\partial X_1}{\partial P_m'} \right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_m \left(\frac{\partial X_m}{\partial P_0} + \frac{\partial X_m}{\partial P_0'} \right) & \alpha_m \left(\frac{\partial X_m}{\partial P_1} + \frac{\partial X_m}{\partial P_1'} \right) & \cdots & \alpha_m \left(\frac{\partial X_m}{\partial P_m} + \frac{\partial X_m}{\partial P_m'} \right) \end{pmatrix}$$

さて、予想と均衡価格の安定性に関する Arrow and Nerlove の定理は次の如く要約される。

定理 (Arrow and Nerlove) 仮定 (C), (E⁺), (S) のもとで動学体系 (A—H) は (locally) stable であるための必要且つ十分条件は行列 B の非対角元素が全つ正となり、対角元素

が全て負となることである。

右の定理は numéraire のない体系に関するものであるが、安定性を問題にする限り、numéraire を前提とする場合とそうでない場合とで結果に本質的相違は生じない。われわれは証明の便宜のため第 0 財を numéraire とした体系について次の定理を得る。

定理 行列 A_2 は分解不能であると仮定し、さらに、(C) (E⁺) (S) (したがって (S')) (W) を仮定する。このとき動学体系 (A—H)' は (locally) stable である。

証明 安井氏の定理を適用する。対角行列 A_1 の対角元素は全て正 (したがって、 A_1 の対角元素も全て正)、仮定 (S) (したがって (S')) より行列 A_2 の非対角元素は全て非負、対角元素は全て負であるから、 A の非対角元素は全て非負、対角元素は全て負である。したがって、行列 A の固有値の実数部が全て負のとき、行列 A_2 は $A_1 A$ の固有値の実数部も全て負となり、且つ又、その逆もいえる。したがって、行列 A_2 の固有値を問題にする

としよう。

A_2 は仮定より分解不能である。さらに、仮定 (S), (E⁺) より (3) を $i=1, 2, \dots, m$ について考えよう、

$$\sum_{j=1}^m \pi_j \frac{\partial x_i}{\partial \pi_j} + \sum_{j=1}^m \pi_j' \frac{\partial x_i}{\partial \pi_j'} < 0$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial \pi_i} \geq \sum_{j \neq i}^m \frac{\pi_j}{\pi_i} \frac{\partial x_i}{\partial \pi_j} + \sum_{j=1}^m \frac{\pi_j}{\pi_i} \frac{\partial x_i}{\partial \pi_j}$$

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial \pi_i} \right| \geq \sum_{j \neq i}^m \left| \frac{\partial x_i}{\partial \pi_j} \right| + \sum_{j=1}^m \left| \frac{\partial x_i}{\partial \pi_j} \right|$$

$$i=1, 2, \dots, m \quad (4)$$

$$\frac{\partial X_0}{\partial P_0} P_0 = - \sum_{i=1}^m P_i \frac{\partial X_i}{\partial P_0} < 0$$

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial X_i}{\partial P_0} > 0$$

が成立するから、(3)を考慮して、(4)は少なくとも1つの i について不等号は成立しなければならない。

ゆえに、

$$|\pi_i - 1| = |\pi_i| \quad i=1, 2, \dots, m \quad (5)$$

は明らか。

したがって、行列 A_2 は安井氏の定理^(*)の条件を全て満足し、その固有値の実数部は全て負となる。即ち、動学体系(A-H)は (locally) stable であることが証明された。

* 本論文を書くにあたって、私は一橋大学の学部以来の恩師山田雄三教授に心から感謝したい。また、本論文執筆の最大の契機となった未公開論文の結果の利用を心よく許され、書面を通じて御教示下さった東北大学の安井琢磨教授の御厚意に深く感謝したい。しかし、本論文にあり得べき誤りは全て筆者の責にあることは云うまでもなく。

(1) 任意の n 次実行列 $B = (b_{ij})$ について

$$\alpha_i |b_{ii}| > \sum_{j \neq i}^n \alpha_j |b_{ij}|, \quad i=1, 2, \dots, n$$

が成り立つ

$$\alpha_j |b_{jj}| > \sum_{i \neq j}^n \alpha_i |b_{ij}|, \quad j=1, 2, \dots, n$$

を成立させる正数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ が存在するならば、 B は quasi-dominant main diagonal を持つ。

(2) Arrow and Nerlove, [4], p. 302. 但し、本文に誤植したと思われる Arrow and Hurwicz, [1], F. H. Hahn, [6], T. Negishi, [9] を考慮して筆者が再定式化したものを示す。

(3) Arrow and Enthoven, [3].

(4) T. Yasui, [10], p. 4.

参考文献

- [1] Arrow, K. J. and L. Hurwicz: "On the Stability of Competitive Equilibrium, I," *Econometrica*, 26 (1958), 522—552
- [2] Arrow, K. J. and L. Hurwicz: "Competitive Stability under Weak Gross Substitutability: Nonlinear Price Adjustment and Adaptive Expectations," *International Economic Review*, 3 (1962), 233—255
- [3] Arrow, K. J. and A. C. Enthoven: "A Theorem on Expectations and the Stability of Equilibrium,"

- brum." *Econometrica*, 24 (1956), 288—293
- [4] Arrow, J. and M. Nerlove: "A Note on Expectations and Stability," *Econometrica*, 26 (1958), 297—305
- [5] Gantmacher, F. R.: *Applications of the Theory of Matrices*. (New York, Interscience Publishers, Inc., 1959).
- [6] Hahn, F. H.: "Gross Substitutes and the Dynamic Stability of General Equilibrium," *Econometrica*, 26 (1958), 169—170.
- [7] McKenzie, L. W.: "The Matrix with a Dominant Diagonal and Economic Theory," *Mathematical Methods in the Social Sciences, 1959, Proceedings of the First Stanford Symposium*, K. J. Arrow, S. Karlin and P. Suppes (ed.) (Stanford: Stanford Univ. Press, 1960), 47—62
- [8] Metzler, L.: "Stability of Multiple Markets: The Hicksian Conditions," *Econometrica*, 13 (1945), 277—292
- [9] Negishi, T.: "A Note on the Stability of an Economy where All Goods are Gross Substitutes," *Econometrica*, 26 (1958), 445—447.
- [10] Yasui, T.: "A Note on Metzlerian Matrix." (unpublished)

(一橋大学大学院学生)