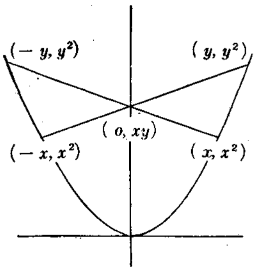
《研究ノート》

數學雜題

藤末宏

一　拋物線の性質と函數方程式

拋物線 $y=x^2$ は、左上圖のような性質を持って居る。即ち、曲線上の四點 $(x, x^2), (y, y^2), (-x, x^2), (-y, y^2)$ のうち、(x, x^2) と $(-y, y^2)$; (y, y^2) と $(-x, x^2)$ とを結ぶ直線の交點は (o, xy) である。そこでこの様な性質は拋物線だけに限るのであろうか。これを考えてみることにする。



いま拋物線に代る曲線を $f(x)$ とする。この曲線上の四點を $(x, f(x))$, $(y, f(y))$, $(-y, f(-y))$, $(-x, f(-x))$ とし、$(x, f(x))$; $(-y, f(-y))$; $(y, f(y))$, $(-x, f(-x))$ の二交點を夫々線ぶ直線の交點を求めてみると、

$$\left(\frac{xf(y)-yf(x)+yf(-x)-xf(-y)}{f(x)+f(-x)-f(y)-f(-y)},\ \frac{-2xf(y)f(-y)+2yf(x)f(-x)+(x-y)(f(x)f(y)+f(-x)f(-y))}{(x+y)(f(x)+f(-x)-f(y)-f(-y))}\right)$$

である。そこでX座標を0とするための條件は、次の函數方程式となる。

$$xf(y)+yf(x)=xf(-y)+yf(-x)$$

これが任意の二實數 x、y に對して成立するということから、

$$f(y)=f(-y)$$

が成立する。以上のことから函數 $f(x)$ の定義域は、Oを中心にして對稱な圖形、もっと一般的に云ってX軸全體とはじめからして置いてよいことが解る。

交點のY座標は、今の場合にどうなるかと云えば、

$$\frac{xf(y)+yf(x)}{x+y}$$

である。

二　R^2 に於けるイデアル

R^2 とは實數體に屬する二要素の組合わせによって得られる空間のことである。この空間は次の加法乘法によって環となる。

(i)　$a, b \in R$,　$(a, b)\pm(c, d)=(a\pm c, b\pm d)$

(ii)　$a, b \in R$,　$(a, b)(c, d)=(acx_1+adx_2+bcx_3+bdx_4,$
$acy_1+ady_2+bcy_3+bdy_4)$

(ii)の組合せ法則を調べてみよう。

それは、

$$x_2y_1=x_3y_1,\quad x_3y_3=x_4y_1=x_2y_2,\quad x_4y_3=x_4y_2,\quad y_1y_3=y_1y_2,$$
$$x_2x_4=x_3x_4,\quad x_1x_2+y_1x_3=x_1x_3+y_3x_2,$$
$$x_2{}^2+y_2x_4=x_1x_4+x_2y_4,\quad x_1x_4+x_3y_4=x_3{}^2+x_4y_3,$$
$$x_1y_2+y_1y_4=x_2y_1+y_2{}^2,\quad x_3y_1+y_3{}^2=x_1y_3+y_1y_4,$$
$$x_3y_2+y_3y_4=x_2y_3+y_2y_4$$

の條件を滿せばよい。この樣な條件の滿された環に於いて、いかなる條件が更に滿されれば、イデアルとなるであろうか。

$I=\{(a,b)\mid xa+yb=0,(a,b)\in R^2\}$ が右イデアルであるならば、

$$(a,b)(a',b')=(aa'x_1+ab'x_2+ba'x_3+bb'x_4, aa'y_1+ab'y_2+ba'y_3+bb'y_4)\in I$$

即ち

$$ax=by=0,$$
$$(aa'x_1+ab'x_2+ba'x_3+bb'x_4)x+(aa'y_1+ab'y_2+ba'y_3+bb'y_4)y=0$$

よって、行列

$$\begin{pmatrix} x & y \\ xx_1+yy_1 & xx_3+yy_3 \\ xx_2+yy_2 & xx_4+yy_4 \end{pmatrix}$$

の rank が2より小なることを要す。逆も明か。よって次の定理が成り立つ。

〔**定理**〕 環R^2に於いて、$\{(a,b)\mid ax+by=0,\ (a,b)\in R^2\}$ が右イデアルであるための必要充分條件は、

$$\begin{pmatrix} x & y \\ xx_1+yy_1 & xx_3+yy_3 \\ xx_2+yy_2 & xx_4+yy_4 \end{pmatrix}$$

の階數が2より小であることである。

環R^2に於いて、$\{(a,b)\mid ax+by=0,\ (a,b)\in R^2\}$ が左イデアルであるための必要充分條件は、

$$\begin{pmatrix} x & y \\ xx_1+yy_1 & xx_2+yy_2 \\ xx_3+yy_3 & xx_4+yy_4 \end{pmatrix}$$

の階數が2より小であることである。

環R^2に於て $\{(a,b)\mid ax+by=0,\ (a,b)\in R^2\}$ がイデアルであるための必要充分條件は、

$$\begin{pmatrix} x & y \\ xx_1+yy_1 & xx_2+yy_2 \\ xx_3+yy_3 & xx_4+yy_4 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x & y \\ xx_1+yy_1 & xx_2+yy_2 \\ xx_3+yy_3 & xx_4+yy_4 \end{pmatrix}$$

の階數がともに2より小であることである。

イデアルの定義も、Kadison; Reprsentation Theory for Commutative Topological Algebra に從えば、次のようになる。

〔定義〕 R^2に於ける部分集合Iが、その總ての要素(x,y)に關してp、qという次の二正數p,qが存在するときイデアルであるという。即ち

$$|x|<p,\qquad |y|<q$$

この定義に従えば次の定理が成り立つ。

〔**定理**〕 $R^2 \cup I$ $\quad I$ がイデアルであるならば、

$$I=\{(a,b)\mid(x_1y_2-x_2y_1)a^2+(x_3y_2+x_1y_4-x_2y_3-x_4y_1)ab+(x_3y_4-x_4y_3)b^2=0\}$$

三 R^2 の環を使うと、巾等元と三次方程式との關係が得られる

XY平面上の二點を (x,y), (x',y') とする。この二點を結ぶ直線上に點 (x,y) (x',y') なる點が存在している場合を考えてみよう。

$$(x,y)(x',y')=p(x,y)+q(x,'y'),\qquad p+q=1$$

より

$$x=\frac{q}{\varDelta}\begin{vmatrix}x' & cx'+dy'\\ y' & c'x'+d'y'-p\end{vmatrix}\qquad y=\frac{q}{\varDelta}\begin{vmatrix}ax'+by'-p & x'\\ a'x'+b'y' & y'\end{vmatrix}$$

$$\varDelta=x'^2(ac'-a'c)+x'y'(bc'-b'c+ad'-a'd)+y'^2(bd'-b'd)$$
$$-px'(a+c')-py(b+d')+p^2$$

この關係より $(x,y)^2=(x,y)$ ならば

$$\frac{y'}{x'}=\frac{-x'^2a'+x'y'(a-b')+by'^2-py'}{x'^2c'+x'y'(d'-c)-dy'^2-px'}=k$$

より

$$dk^3+(b-d'+c)k^2+(a-b'-c')k-a'=0$$

が成立する。

ここの x、y、a、b、……a'、b' は二の a、b、x_1、x_2、……、y_1、y_2、……である。

四 函数 $f(x,y)=f(xy)$ と束論

$f(x,y)=f(xy)$ なる函數に於いて、

$f(f(x,y),z)=f(x,f(y,z))$

なる關係が成立するのは如何なる場合であろうか。代入してみると直ちに、

$$f(xy)z=f(yz)x=f(zx)y$$

なる關係が成立する。この函數が變域 R または $P=\{x\mid x>0\ x\in R\}$ の上で定義されているとする。これが微分可能な函數であるということが解っているならば、直ちに、

$$f(x)=kx$$

なることが證明される。ここで、二函數 $f(x)=kx$, $g(x)=k'x$ とし、束論の記號を對應させる。即ち、

$$x\cup y=kxy,\qquad x\cap y=k'xy$$

とすれば、明らかに、

$$(x\cup y)\cup z=x\cup(y\cup z),\ x\cap(y\cap z)=(x\cap y)\cap z$$
$$(x\cup y)\cap z=(x\cap y)\cup z$$

が成立する。

五 圓周上の二點に於いて垂直に交わる圓

圓の方程式を

$$x^2+y^2+2ax+2by=R\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

とする。圓周上の二點 (x,y_1), (x_2,y_2) を通る圓の方程式は

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2-r^2 & x & y \\ x_1^2+y_1^2-r^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2+y_2^2-r^2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0=x^2+y^2+2a'x+2b'y=r^2\cdots(2)$$

とする。この圓の (x_1, y_1) に於ける接線の方程式は

$$(2x_1dx+2y_1dy)(x_1y_2-x_2y_1)+2a(x_1y_2-x_2y_1)dx+2b(x_1y_2-x_2y_1)dy=0$$

(1) の圓の (x_1, y_1) に於ける接線は、

$$(x_1+a)dx+(y_1+b)dy=0$$

これ等が垂直に交わることより、

〔定理〕 (x_1, y_1), (x_2, y_2) を通る圓が圓 $x^2+y^2+2ax+2by=R$ に (x_1, y_1) に於いて垂直ならば $2x_1y_1+(b'+b)x_1+(a'+a)y_1+(ab'+a'b)=0$ 但し $x_1y_2 \neq x_2y_1$ とする。

六　二次行列と双一次關係

次の行列を考えてみよう。

$$\begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & c^2+a^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

これを簡單に (a, b, c) で示す。これと (a', b', c') との積は $aa'+bb'+cc'=0$ の條件の下で次の定理が成立する。

〔定理〕
$$\begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & c^2+a^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b'^2+c'^2 & -a'b' & -a'c' \\ -a'b' & c'^2+a'^2 & -b'c' \\ -a'c' & -b'c' & a'^2+b'^2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (cb'-c'b)^2 & -(a'c-ac')(c'b-cb') & -(a'b-b'a)(cb'-c'b) \\ -(a'c-ac')(c'b-cb') & (a'c-ac')^2 & -(a'c-ac')(ab'-a'b) \\ (-ba'-b'a)(cb'-c'b) & -(a'c-ac')(ab'-a'b) & (ab'-a'b)^2 \end{pmatrix}$$

〔證明〕 $-ab(b'^2+c'^2)-(c^2+a^2)a'b'+bcc'a'=-(b^2+c^2)a'b'-ab(c'^2+a'^2)+(ab'c')=-(a'c'-ac')$ 等、

$(b^2+c^2)(b'^2+c'^2)+aba'b'+cac'a'=(cb'-bc')^2$ 等

もっと一般的に云えば、

〔定理〕
$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{k\neq 1} a_k^2 & \cdots & -a_1a_i & \cdots & -a_1a_j & \cdots & -a_1a_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -a_1a_i & \cdots & \sum\limits_{k\neq i} a_k^2 & \cdots & a_ia_j & \cdots & a_ia_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -a_1a_j & \cdots & -a_ia_j & \cdots & \sum\limits_{k\neq j} a_k^2 & \cdots & -a_ja_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -a_1a_n & \cdots & -a_na_i & \cdots & -a_na_j & \cdots & \sum\limits_{k\neq n} a_k^2 \end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} \sum\limits_{k\neq 1} a_k'^2 & \cdots & -a_1'a_i' & \cdots & -a_1'a_j' & \cdots & -a_1'a_n' \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -a_1'a_i' & \cdots & \sum\limits_{k\neq i} a_k'^2 & \cdots & a_i'a_j' & \cdots & a_i'a_n' \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -a_1'a_j' & \cdots & -a_i'a_j' & \cdots & \sum\limits_{k\neq j} a_k'^2 & \cdots & -a_j'a_n' \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -a_1'a_n' & \cdots & -a_i'a_n' & \cdots & a_j'a_n' & \cdots & \sum\limits_{k\neq n} a_k'^2 \end{pmatrix}$$

$$=c_{ij} \qquad c_{ij}=c_{ji}\longrightarrow$$

$$\frac{a_1'}{a_1}\cdots\cdots=\frac{a_i'}{a_i}=\cdots\cdots=\frac{a_n'}{a_n}, \qquad \text{or}\begin{cases} {}_n\sum\limits_i a_i'\sum\limits_i a_i^2=2\sum a_ia_i'^2 \\ {}_n\sum\limits_i a_i\sum\limits_i a_i'^2=2\sum a_i'a_i^2 \end{cases}$$

〔**證明**〕 $c_{ij}=c_{ji}$ より

$$a_1'a_j'\sum_{k\neq j}a_k^2+a_1a_i\sum_{k\neq i}a_k'^2=-(a_ia_j'-a_i'a_j)(a_1a_1'+\cdots\cdots+a_ia_i'$$
$$+\cdots\cdots+a_ja_j'+\cdots\cdots+a_na_n')$$

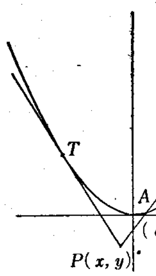
$$a_1'a_i'\sum_{k\neq i}a_k^2+a_1a_j\sum_{k\neq j}a_k'^2=-(a_ja_i'-a_j'a_i)(a_1a_1'+\cdots\cdots+a_ia_i'$$
$$+\cdots\cdots+a_ja_j'+\cdots\cdots+a_Na_N')$$

$$\therefore\ a_1'(a_i'+a_j')\sum a_k^2+a_1(a_i+a_j)\sum a_k^2=a_1'a_j'a_j^2+a_1a_ia_i'^2$$
$$+a_1'a_i'a_i^2+a_1a_ja_j'^2$$

$$\therefore\ a_1'\{{}_n\sum a_i'\sum a_i^2-2\sum a_i'a_i^2\}+a_1\{{}_n\sum a_i\sum a_i'^2-2\sum a_ia_i'^2\}=0$$

七 抛物線の割線と接線

抛物線 $Y=X^2$ の (x,y) よりの割線を $\overline{PAB}$ とする。$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=(1+m^2)\,|\,x^2-y\,|$ である。P よりこの抛物線に引ける接線を PT とする。



$$\overline{PT}^2=(1+m'^2)\,|\,x^2-y\,|$$

ここに m, m' は $\overline{PAB}, \overline{PT}$ の方向係數である。

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PT}^2$$

が成立するのは、P より X軸へ下した垂線に關して $\overline{PAB}$ と $\overline{PT}$ が對稱であるときである。

八 抛物線上の三點における四接線が一點で交わること

抛物線上に三點 (x,y), (x',y'), $(x,y)(x',y')$ が存在するものとする。ここに抛物線上の方程式は

$$y=x^2$$

また、

$$(x,y)(x',y')=(xx'+2yy',\ xy'+yx'+yy')$$

とする。この點が抛物線上にあるならば、

$$x+x'=4x^2x'^2(1+xx') \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

各點に於ける接線の方程式は、

$$2xX-Y=x^2$$
$$2x'X-Y=x'^2$$
$$2(xx'+2x^2x'^2)X-Y=xx'^2+x^2x'+x^2x'^2$$

である。これ等が一點で交わる爲には

$$\begin{vmatrix} x & 1 & x^2 \\ x' & 1 & x'^2 \\ xx'(1+2xx') & 1 & xx'(x+x'+xx') \end{vmatrix}=0$$

即ち、$x\neq x^2$ ならば

$$xx'+2xx'(x+x')+1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)と(2)より $xx'+1=0$ または $2xx'+1=0$

また

$$(x,y)(x',y')=(2xx'+yy',\ 2xy')$$

の場合は、

$$\begin{cases} -(x+x')(xx'+2)+1+2x'=0 \\ x(2+xx')^2=2x' \end{cases}$$

を滿す三點に於いて上のことが成立する。

所で一點より拋物線へは接線は一本より引けないことから、$x \neq x'$ のとき

$$\begin{cases} x+x'=4x^2x'^2(1+xx') \\ xx'+2xx'(x+x')+1=0 \end{cases} \longrightarrow x \text{ or } x'=xx'(1+2xx')$$

$$\begin{cases} 1+2x'-(x+x')(xx'+2)=0 \\ x(2+xx')^2=2x' \end{cases} \longrightarrow x \text{ or } x'=2xx'+x^2x'^2$$

九　拋物線と三法線（その一）

拋物線 $Y=X^2$ 上の三點 (x,y), $(x',y')(x,y)(x',y')=(xx', yy')$ に於ける法線の方程式は

$X+2xY=2x^3+x$

$X+2x'Y=2x'^3+x'$

$X+2xx'Y=2(xx')^3+xx'$

これが同一點に於いて交わるための條件は

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 2x^3+x \\ 1 & x' & 2x'^3+x' \\ 1 & xx' & 2x^3x'^3+xx' \end{vmatrix}=0$$

ここで $x \neq x' \neq xx' \neq 0$ とすれば、卽ち

〔**定理**〕 拋物線上の三點 (x,y), (x',y'), $(x,y)(x',y')=(xx', yy')$ に於ける三法線が一點で交わるための條件は、

$x^2x'^2+xx'+x+x'-(x+x')^2=0$

である。

十　拋物線と三法線（その二）

拋物線　$y=x^2$ 上の三點 (x,y), (x',y'), $(x,y)(x',y')=(3xx'+xy'+x'y, yy')$ に於ける法線の方程式は、

$X+2xY=2x^3+x$

$X+2x'Y=2x'^3+x'$

$X+2(3xx'+xx'^2+x^2x')Y=2(3xx'+xx'^2+x^2x')^3+(3xx'+xx'^2+x^2x')$

である。この三點が一直線上にあるための條件は

$x+x'+3xx'+xx'^2+x'x^2=0$

$x+x'=2 \text{ or } 4$

法線が一點で交わる條件は

$xx'(x+x'+3)+x+x'=0$

である。

よって今の場合、三法線が一點で交わる場合は四通りである。

同樣に $(x,y)(x',y')=(xx'+yy', yy')$ の場合は、

$(\sqrt{2},2)$, $(-\sqrt{2},2)$, $(2,4)$ の場合だけである。

また、$(x,y)(x',y')=(xx', xy'+x'y)$ の場合は、ない。

十一　拋物線と三法線（その三）

〔**定理**〕　拋物線 $y=x^2$ 上の三點 (x,y), (x',y'), $(x,y)(x',y')$

$=(-xx',\ -xy'-yx'+2yy')$ に於いて立てた三法線は、

$$xx'=x+x'$$

のとき一點に會する。

〔**證明**〕 $(x,y)(x',y')$ が拋物線上にあるならば、

$$xx'=x+x'$$

である。この場合に三法線が一點に會することは、

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 2x^3+x \\ 1 & x' & 2x'^3+x' \\ 1 & -xx' & -2(xx')^3-xx' \end{vmatrix}=0$$

より明かとなる。

十二　圓に內接する四邊形

$(x,y),\ (x',y'),\ (x,y)(x',y'),\ (x',y')(x,y)$ なる四點が圓に內接する爲の條件を求めてみると次の樣になる。

〔**定理**〕 $(x,y)(x',y')=(x(x'-y'),\ y(x'-y'))$ なるとき、

$$\frac{x^2+y^2}{x-y}=\frac{x'^2+y'^2}{x'-y'}$$

ならば、圓に內接する。

また、$(x,y),\ (x',y')(x,y)$；$(x',y'),\ (x,y)(x',y')$ を結ぶ二直線の交點の座標は、

$$\left(\frac{(x-y)(x'-y')(x+x')+xy'+x'y-2xx'}{(x-y)(x'-y')-1},\ \frac{-(x-y)(x'-y')(y+y')+xy'+x'y-2yy'}{(x-y)(x'-y')-1}\right)$$

$(x,y),\ (x',y')$；$(x,y)(x',y'),\ (x',y')(x,y)$ を結ぶ二直線の交點は、

$$\left(\frac{(x-y)(x'-y')(x-x')+xy'-yx'}{x-y-x'+y'},\ \frac{xy'-yx'+(y-y')(x-y)(x'-y')}{x-y-x'+y'}\right)$$

となる。同樣に

〔**定理**〕 $(x,y)(x',y')=(x(ax'+by'),\ y(ax'+by'))$ なるとき、$(x,y),\ (x',y'),\ (x,y)(x',y'),\ (x',y')(x,y)$ なる四點が次の場合には同一圓周上にある。

$$\frac{x^2+y^2}{ax+by}=\frac{x'^2+y'^2}{ax'+by'}$$

また夫々の直線の交點は、

$$\left(\frac{(ax+by)(ax'+by')(x+x')-2xx'-xy'-x'y}{(ax+by)(ax'+by')-1},\ \frac{(ax+by)(ax'+by')(y+y')+2yy'+yx'+xy'}{(ax+by)(ax'+by')-1}\right)$$

$$\left(\frac{xy'-x'y+(x'-x)(ax+by)(ax'+by')}{y'-y+x'-x},\ \frac{(y'-y)(ax+by)(ax'+by')-(xy'-x'y)}{y'-y+x'-x}\right)$$

十三　直圓錐と三點

直圓錐　$x^2+y^2=z^2$ 上の三點 $(a,b,x),\ (a',b',x')$ に對して $(a,b,c)(a',b',c')=(a(b'+c'),\ bb'+cc',\ bc'+cb')$ が矢張りこ

の上に存在するための條件として次の定理がある。

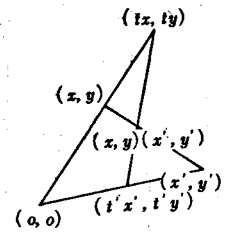
〔定理〕 $b'+c'=0$, 或は $b+c=0$, $a^2+b^2=c^2$, $a'^2+b'^2=c'^2$ ならば、(a,b), (a',b'), $(a,b)(a',b')$ は直圓錐 $x^2+y^2=z^2$ 上にある。

十四　直圓錐と三點（その二）

〔定理〕 三點 (x,y,z), (x',y',z'), $(x,y,z)(x',y',z')=(xy'+zx',\ yy',\ zz')$ が直圓錐 $x^2+y^2+z^2$ 上に存在する爲の條件は、

$$x^2+y^2=z^2,\qquad x'^2+y'^2=z'^2,$$
$$xzx'y'=0$$

である。



十五　二直線とその交點

〔定理〕 圖の如き五點のうち、

$$(x,y)(x',y')=(xx'+2yy',\ xy'+x'y+yy')\qquad tt'=1$$

なる關係の成り立つ場合には、

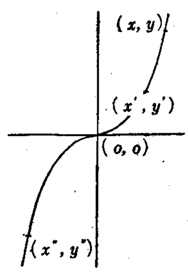
$$x=\frac{-\dfrac{t'-1}{t+t'}\left(x'^2+x'y'-2y'^2-x'\dfrac{t-1}{t+t'}\right)}{\left(\dfrac{t-1}{t+t'}-x'-2y'\right)\left(\dfrac{t-1}{t+t'}-x'+y'\right)}$$

$$y=\frac{\dfrac{(t-1)(t'-1)}{(t+t')^2}x'}{\left(\dfrac{t-1}{t-t'}-x'-2y'\right)\left(\dfrac{t-1}{t-t'}-x'+y'\right)}$$

である。

一六　三次多項式とその上の點

〔定理〕 三次多項式 $y=x^3$ 上に相異なる三點 (x,y), (x',y'), (x'',y'') が存在するとき、



$$xx'+x'x''+x''x=0$$

が成立する。

〔證明〕
$$\begin{vmatrix}3x^2 & -1 & 2x^3\\ 3x'^2 & -1 & 2x'^3\\ 3x''^2 & -1 & 2x''^3\end{vmatrix}=6(x''-x')(x-x')(x-x'')(xx'+x'x''+x''x)$$

十七　條件付二變數函數の極値

〔定理〕 $f(x,y)$ 2nd order total. diff. on an interval D^2

$g(x_1,y_1,x_2,y_2)$ 2nd order total. diff. on $D^2\times D^2$

$f(x_1,y_1)=C_1\qquad f(x_2,y_2)=C_2$ の條件の下で

$G(x_1,x_2)=g(x_1,x_2,y_1,y_2)$ は

$$g_{x_1}(x_1,x_2,y_1,y_2)+g_{y_1}(x_1,x_2,y_1,y_2)\left(-\frac{f_{y_1}(x_1,y_1)}{f_{x_1}(x_1,y_1)}\right)=0$$

$$g_{x_2}(x_1,x_2,y_1,y_2)+g_{y_2}(x_1,x_2,y_1,y_2)\left(-\frac{f_{y_2}(x_2,y_2)}{f_{x_2}(x_2,y_2)}\right)=0$$

を滿す (x_1,x_2) に於いて

$G_{x_1x_2}{}^2-G_{x_1x_1}G_{x_2x_2}<0$ で $G_{x_1x_1}\gtreqless 0$ のとき極大/極小となる。こ

ここに，

$$G_{x_1x_1}=g_{x_1x_1}+2g_{x_1y_1}\left(-\frac{f_{x_1}(x_1,y_1)}{f_{y_1}(x_1,y_1)}\right)+g_{y_1y_1}\left(\frac{f_{x_1}(x_1,y_1)}{f_{y_1}(x_1,y_1)}\right)^2$$
$$+g_{y_1}\left(-\frac{f_{x_1x_1}(x_1,y_1)f_{y_1}(x_1,y_1)^2-2f_{x_1y_1}f_{x_1}f_{y_1}+f_{y_1y_1}f_{x_1}^2}{f_{y_1}(x_1,y_1)^3}\right)$$

$$G_{x_1x_2}=g_{x_1x_2}+g_{x_1y_2}\left(-\frac{f_{x_2}(x_2,y_2)}{f_{y_2}(x_2,y_2)}\right)+g_{y_1x_2}\left(-\frac{f_{x_1}(x_1,y_1)}{f_{y_1}(x_1,y_1)}\right)$$
$$+g_{y_1y_2}\left(\frac{f_{x_2}(x_2,y_2)}{f_{y_2}(x_2,y_2)}\right)\left(\frac{f_{x_1}(x_1,y_1)}{f_{y_1}(x_1,y_1)}\right)$$

$$G_{x_2x_2}=g_{x_2x_2}+2g_{x_2y_2}\left(-\frac{f_{x_2}(x_2,y_2)}{f_{y_2}(x_2,y_2)}\right)+g_{y_2y_2}\left(-\frac{f_{x_2}(x_2,y_2)}{f_{y_2}(x_2,y_2)}\right)^2$$
$$+g_{y_2}\left(-\frac{f_{x_2x_2}(x_2,y_2)f_{y_2}(x_2,y_2)^2-2f_{x_2y_2}f_{x_2}f_{y_2}+f_{y_2y_2}f_{x_2}^2}{f_{y_2}(x_2,y_2)^3}\right)$$

とくに $X=-\dfrac{dy_1}{dx_1}=-\dfrac{dy_2}{dx_2}$

$Y_1=\dfrac{d^2y_1}{dx_1}$, $Y_2=\dfrac{d^2y_2}{dx_2}$ 　のときは

$$G_{x_1x_2}^2-G_{x_1x_1}G_{x_2x_2}=(g_{x_1x_2}^2-g_{x_1x_1}g_{x_2x_2})-2X(g_{x_1x_2}g_{x_1y_2}$$
$$+g_{x_1x_2}g_{y_1x_2}-g_{x_1x_1}g_{x_2y_2}-g_{x_1y_1}g_{x_2x_2})+X^2\{(g_{x_1y_2}$$
$$+g_{y_1x_2})^2+2g_{x_1x_2}g_{y_1y_2}-g_{x_1x_1}g_{y_2y_2}-4g_{x_1y_1}g_{x_2y_2}$$
$$-g_{y_1y_1}g_{x_2x_2}\}+2X^3\{g_{x_1y_1}g_{y_2y_2}+g_{y_1y_1}g_{x_2y_2}-g_{y_1y_2}(g_{x_1y_2}$$
$$+g_{y_1x_2})\}+X^4(g_{y_1y_2}^2-g_{y_1y_1}g_{y_2y_2})-(Y_1g_{y_1}g_{x_2x_2}$$
$$+Y_2g_{y_2}g_{x_1x_1})+2X(g_{x_1y_1}g_{y_2}Y_2+g_{y_1}g_{x_2y_2}Y_1)$$
$$-X^2(g_{y_1y_1}g_{y_2}Y_2+g_{y_1}g_{y_2y_2}Y_1)-g_{y_1}g_{y_2}Y_1Y_2$$

一八　ある四次の二變數函數について

$G_1=a+bx+cx^2$

$G_2=a'+b'y+c'y^2$

$G_3=a''+(b''x+b'''y)+c''xy$

とする。

$G_3^2-G_1G_2$ の係數を一般にして

$f(x,y)=a+bx+cy+dx^2+2exy+fy^2+gx^2y+hxy^2+kx^2y^2$

とする。

$f_x=b+2dx+2ey+2gxy+hy^2+2kxy^2$

$f_y=c+2ex+2fy+gx^2+2hxy+2kx^2y$

さらに

$f_{xx}=2d+2gy+2ky^2$

$f_{xy}=2e+2gx+2hy+4kxy$

$f_{yy}=2f+2hx+2kx^2$

となり，これは G_1, G_2, G_3 と同種の函數である。

十九　ある四邊形

四點 $A(x,y)$, $B(x',y')$, $C(x,y)(x',y')$, $D(x',y')(x,y)$ から出來る四邊形に於いて，AC^2, DA^2 の値を計算してみると次の樣になる。

〔**定理**〕 $(x,y)(x',y')=(axx'+bxy'+cyx'+dyy',\ a'xx'+b'xy'+c'yx'+d'yy')$ とするとき，

$\overline{AC}^2-\overline{DA}^2=(xy'-x'y)[2xx'(ab-ac+a'b'-a'c')+2yy'(bd$

$$-cd+b'd'-c'd')+(b^2+b'^2-c^2-c'^2)(xy'+x'y)$$
$$-2(b-c)x-2(b'-c')y]$$

である。

〔系〕 $(x,y)(x',y')=(axx'+bxy'+cyx'+dyy',\ a'xx'+b'xy'$
$+c'yx'+d'yy')$

とするとき

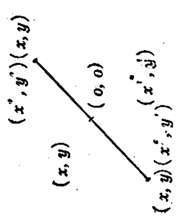
$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{AD}^2$$

が成立する條件は

$xy'=x'y$ かまたは，$(b-c)(x-x')+(b'-c')(y-y')=0$ である。

二十　原點を通る直線と四點

〔定理〕 $(x,y)(x',y')=(axx'+bxy'+cyx'+dyy',\ a'xx'+b'xy'$
$+c'yx'+d'yy')$ なるとき，(o,o)，$(x,y)(x',y')$，$(x',y')(x,y)$ が一直線上にあるための條件は，

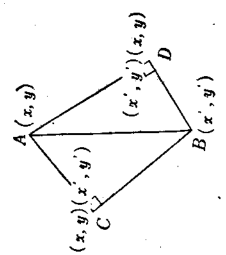


$$xy'=x'y \text{ かまたは } \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$$

である。

二十一　二角が直角なる四邊形

〔定理〕 $A(x,y)$, $B(x',y')$, $C(x,y)(x',y')$, $D(x',y')(x,y)$ なる四邊形に於いて，



$$AC\perp BC,\ AD\perp BD$$

なるときの條件は，

$$\begin{cases} x(a'-ak'''+ak+a'k'k''')+y(c' \\ \quad +ck-bk'''+b'k'k''')=k-k''' \\ x(b'+bk-ck'''+c'k'k''')+y(d' \\ \quad +dk-dk'''+d'k'k''')=1+kk''' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(a-a'k-a'k''-ak'k'')+y'(b-b'k-c'k''-k'k''c)=1-k'k'' \\ x'(c-kc'-b'k''-bk'k'')+y'(d-kd'-d'k''-k'k''d)=-k-k'' \end{cases}$$

である。ここに，

$(x,y)(x',y')=(axx'+bxy'+cyx'+dyy',\ a'xx'+b'xy'$
$+c'yx'+d'yy')$

である。

二十二　相接する二圓の共通接線

〔定理〕 $(0,0)$ に於いて相接する二圓

$$\begin{cases} (X-x)^2+Y^2=x^2 \\ (X-x')^2+Y^2=x'^2 \end{cases}$$

の共通接線の交點を，$(\bar{x},y)$，$(\bar{x}',y')$ とすれば，

$$\frac{\bar{x}-x}{x'-\bar{x}'}=\frac{y}{y'}=\frac{x\bar{x}}{x'\bar{x}'},\quad \bar{x}^2=\bar{x}'^2$$

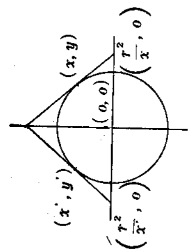
$$\bar{y}^2=2x\bar{x}-\bar{x}^2$$

$$\bar{y}'^2=2x'\bar{x}'-\bar{x}'^2$$

が成立する。

二十三　圓と二接線

〔定理〕　圓 $x^2+y^2=r^2$ 上の二點 (x, y), (x', y') に於ける二接線の交點 (X, Y) は



$$X=\frac{r^2(y'-y)}{xy'-x'y},\quad Y=\frac{r^2(x-x')}{xy'-x'y}$$

また、X 軸との交點は $\left(\frac{r^2}{x}, 0\right)$, $\left(\frac{r^2}{x'}, 0\right)$

Y 軸との交點は $\left(\frac{r^2}{y}, 0\right)$, $\left(\frac{r^2}{y'}, 0\right)$ である。

〔系〕　$ad+a'd'-b'c'-bc=-ab'-cd'+c'd+ba'=-ac'-bd'+b'd+ca'$ のとき、

$$ax+cy=1,\quad b'x+d'y=1,\quad x^2+y^2=x'^2+y'^2$$
$$ax'+by'=1,\quad c'x'+d'y'=1$$

ならば、

$$(X, Y)=(x, y)(x', y')$$

が成立する。ここに

$$(x, y)(x', y')=(axx'+bxy'+cyx'+dyy',\ a'xx'+b'xy'+c'yx'+d'yy')$$

二十四　(x, y) の簡單な多項式

〔定理〕　$p(x, y)(x', y')+q(x, y)=(x_0, y_0) \longleftrightarrow$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} x_0 & pcx'+pdy' \\ y_0 & pc'x'+pd'y'+q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} pax'+pby'+q & pcx'+pdy' \\ pa'x'+pb'y' & pc'x'+pd'y'+q \end{vmatrix}},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} pax'+pby'+q & x_0 \\ pa'x'+pb'y' & y_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} pax'+pby'+q & pcx'+pdy' \\ pa'x'+pb'y' & pc'x'+pd'y'+q \end{vmatrix}}$$

但し分母は0でない，p, q は實數とする。

〔定理〕　$p(x, y)^2+q(x, y)=(x_0, y_0) \longleftrightarrow$

$$\begin{cases} pax^2+(pb+pc)xy+pdy^2+qx=x_0 \\ pa'x^2+(p'b+p'c)xy+pd'y^2+qy=y_0 \end{cases}$$

二十五　二つのアーベル群の對應

A、B を夫々アーベル群とする。

(i)　$A \ni a, b \longrightarrow B \ni ab$

が成立するような演算を定めることが出來るとする。a、b が A の單位元であるとき ab は B の單位元となる。しかし B の單位元には、a、b が A の單位元であるとは限らない。

(ii)　$a(b+c)=ab+ac$, $(b+c)a=ba+ca$ なる演算が定められている。

例
$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & b \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ab & 0 & 0 \\ ab & ab & ab \\ ab & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

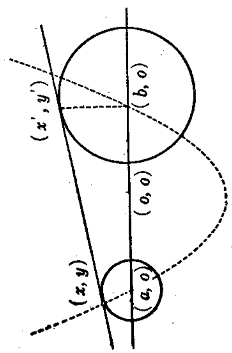
二十六 二圓と接線

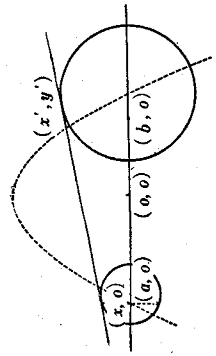
〔**定理**〕 二圓 $(x-a)^2+y^2=r^2$, $(x'-b)^2+y'^2=r'^2$ 上の一點を夫々 (x, y), (x', y') とするとき，その各點に於ける接線の交點 (X, Y) は

$$X=\frac{x(x-a)y'-x'y(x'-b)+yy'(y-y')}{(x-a)y'-(x'-b)y}$$

$$Y=\frac{(x-a)(x'-b)(x'-x)+(x-a)y'^2-y^2(x'-b)}{(x-a)y'(x'-b)y}$$

〔**系**〕 $(x-a)(x'-x)+y=0$ 或は $(x'-b)(x'-x)+y'=0$ の





とき，(x, y), (X, Y), (x', y') は同一直線上にあって，共通接線となる。

二十七 三次方程式の根

〔**定理**〕 $p^3+q^2=0 \longrightarrow x^3+3px+q=0$ の根は $2\sqrt[3]{-q}$, $-\sqrt[3]{-q}$ である。

〔**系**〕 $a^3x^3+x^2(3a^2b+a'^2)+x(3ab^2+2a'b')+(b^3+b'^2)=0$ の根を x とすれば

$$y^3+3(ax+b)y+2(a'x+b')=0$$

の根は $y=2\sqrt[3]{-a'x-b'}$, $-\sqrt[3]{-a'x-b'}$ である。

二十八 三平面と一直線の交點

〔**定理**〕 $xX+yY+zZ=0$, $x'X+y'Y+z'Z=0$, $x''X+y''Y+z''Z=0$ と

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$$

の交點を夫々 (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3) とする。

$$(X_1, Y_1, Z_1)=\left(\frac{(am-lb)y+(an-cl)z}{lx+my+nz},\ \frac{(bl-am)x+(bn-mc)z}{lx+my+nz},\ \frac{(cl-na)x+(cm-nb)y}{lx+my+nz}\right)$$

$$(X_2, Y_2, Z_2)=\left(\frac{(am-lb)y'+(an-cl)z'}{lx'+my'+nz'},\ \frac{(bl-am)x'+(bn-mc)z'}{lx'+my'+nz'},\ \frac{(cl-na)x'+(cm-nb)y'}{lx'+my'+nz'}\right)$$

$$(X_3, Y_3, Z_3)=\left(\frac{(am-lb)y''+(an-cl)z''}{lx''+my''+nz''}\right.$$

$$\left.\frac{(bl-am)x''+(bn-mc)z''}{lx''+my''+nz''},\ \frac{(cl-na)x''+(cm-nb)y''}{lx''+my''+nz''}\right)$$

二十九　二次方程式の共有根と行列式

〔定理〕 $ax^2+bxy+cy^2=0$, $a'x^2+b'xy+c'y^2=0$ に共有根があるならば、

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ a' & b' & c' & 0 \\ 0 & a' & b' & c' \end{vmatrix}=0$$

すなわち

$$a^2c'^2+a(cb'^2-2a'c'c-bb'c')+a'^2c^2+a'b^2c'-abb'c=0$$

（一橋大學講師）