

數學を語る

山田 欽一

一 初等教育課程⁽¹⁾での數學

初等教育課程では、數學の主として理論面を種々の順序で物語っている。そしてそれが數式と圖形に關する永久不變の眞理として受け容れられている。なぜこのように物語られ、なぜそのように傳達されたのであろう。まず、これらのことから考えて見たい。

他の多くの科學と同じように數學にも三つの面がある⁽²⁾。一つは理論の面である。數學の探っている世界がどのようにに織り成されているかを扱う面であり、その世界について得た知識を全體として理路整然と物語ろうとする面である。數學が觀つめている世界の姿が話題の中心であるという意味で數學の審美的な一面である。他の一

つは應用の面である。數學が技術としてどのように他の科學の立論に活用されるか、生活の向上に利用されるかを主とする面である。他の科學に、生活に役立つような工夫をこらすことが目標であるという意味で數學の功利的な一面である。残る一つは歴史の面である。數學が知識として技術として人類文化の中にどのように生まれまた育ったかを省みる面である。美しい姿の合理的な再現を企てるのでも、實り豊かな力を合目的に用意しようというのでもない。數學の歩んで來た道を靜かに、そして深く追想しようというのである。その意味で數學の生成的な一面である。

この三つの面の中で、他の面と切り離して語り易いし、またそのように語ってもそう不都合でないのは理論

數學を語る

の面である。他の科學についての深い關心が、生活についての強い欲求が數學の技術を要求し、さらに遡って數學の知識を刺戟することは否めない。しかし數學の理論はむしろそうしたものに結び付けてはいけないことが論理的に云えるし、結び付けない方が安全であることが事實的に教えられたのである。⁽³⁾ところが残る二つの面は共に他の面と切り離しては語りにくいし、又そのように語ったのでは不都合なのである。まず應用の面についていうならば、他の科學のどんな問題が數學の援けを必要としているのかを知らなくては、適切な形の援けを用意できるものではない。また逆に數學の理論を知らないで數學の技術を使うのは大變危い話である。それは技術の力の限界を越えて使つて了うこともあろうからである。數學は周知のように自然科學の婢僕として育つて來たので、この科學には使い易くできている。社會科學に使つて都合よくできているとは限らない。問題の表面的な類似を見て、すでに用意された數學が無制限に援用できると思つては早計である。⁽⁴⁾各科學が扱うものの異同をよく見極わめてこそ各科學に役立つ數學の技術が用意される

のである。こんなところに理論を忘れて應用を語ることの危なさがある。これが歴史になるともっと錯雜する。誰がどんな問題をどう解いた、何時、誰がどんな本を著わしたというだけでは皮相な英雄傳か、年表の抜き書にすぎない。どのような事情の下で、そのような問題が話題となつたか、それがどのようにして新しい理論生成の契機となつたかまで掘り下げてこそ眞の歴史であらう。數學を知識として語るのでもなく、技術として傳えるのでもなく、人類の文化所産として時の経過の中に正しく位置付け、眞の姿を把むには、數學の理論面に關する鋭い洞察と、應用面に關する深い關心とがなくてはならない。さらに進んで、そうした問題を探り上げるに至つた社會的背景、新理論が生れることのできた社會的素地を明らかにすることも歴史の話題である。⁽⁵⁾歴史を語るには理論と應用、その舞臺である社會、そのどれを忘れてもならないと同時に、そのどれにも捉われないで總括的に話を進めなくてはならない。ここに歴史を語ることの困難さがある。

こうした數學の三つの面の相異が教育課程の中での數

學の語り方を制約している。すなわち、初等教育で數學の應用面や歴史面を採り上げることとは無理であり、事實、教材はほとんど數學そのものの中でとられている。この意味で、初等教育課程では數學の主として理論を物語っているといえよう。⁽⁶⁾

科學の内容の配列については基本的に二つの順列が考えられる。一つは論理的順序である。それは科學の内容を一つの完結した全體とみて、單純なものから複雑なものへの飛躍のない配列である。他の一つは時間的順序である。これは科學の内容が人間の歴史の中へ登場した、あるいはその中で完成した順にそっての配列である。この二つの順序は必ずしも一致してはいない。論理的には複雑なものが、單純なものより早く採り上げられていることがある。⁽⁷⁾ また元來ならば互いに順序の上で一致すべき二項目が逆の順序で話題になっていることがある。⁽⁸⁾ これは他の多くの科學と同じように、應用が理論に先立つことと、應用上問題となる項目が見掛けに相異して、案外組立ての複雑なものであることによるのである。さらに科學の内容の次の世代への傳達ということに係

わらせるともう一つの教育的順序が考えられる。これは授けられる相手が最も容易く受け入れるということを目指しての配列である。數學は最も古い科學の一つであると同時に又最も抽象的な科學の一つである。そしてこのことのために古くから教科課程に組み入れられていながら、⁽⁹⁾ 傳達の困難なものに数えられている。したがって數學では教育的順序が大切な話題となる。⁽¹⁰⁾ それは教育的順序を他の二つの順序とどうかかわらせるかという點である。もちろん教育的順序を他の二つの順序の一方に一致させることだけをいうのではない。たとえば時間的順序そのままで傳達することは授けられる相手によっては必ずしもよい順序ではない。それは時の経過の中で個人が又社會が科學上の話題を扱う仕方は不合理に錯雜していることが多いからである。しかし論理的順序そのままで傳達することも授けられる相手によっては悪い順序となる。それは論理的に基本的なものは餘りに單純すぎで具象的なものの中に求めにくく、知的段階の低い者には受け容れにくいことが多いからである。概していえることは知的段階の高い者には論理的順序で接近することが

容易く、低い者には幼なかつた人類が今日に到る歴史の中で數學的なものに接近して來た時間的順序に論理的順序を加味した教育的順序がよいということであろう。どちらも傳達目標と受容能力の兩方からいって合理的であるという意味で良いといったのである。初等教育課程での數學が理論面を主とすることはすでに述べたのであるが、どの順序で語られているのであろうか。筆者の印象では一様でないようである。幾何は概して論理的順序で語られている。これはこの分野が比較的早く論理的に配列されていたことと、これを論理的思考の訓練に利用しようという教育界の慣わしとによるものである。代數はどちらかといえば時間的順序で語られている。これはこの分野で扱うものが幾何で扱うものに較べてずっと抽象的であつて、嚴密に論理的に配列したのでは初學者に受け容れにくいということとこの分野では時間的順序が概して論理的順序に近いこととによるのである。微分積分では教育的順序が大いに考慮されている。それはこの分野で扱うものこそそのままでは初學者に受け容れにくいということとこの分野への接近が種々の道順ですす

數學を語る

められたこととによるのであろう。

こうして承け繼がれた數學の理論内容は殆んどすべての人に圖形と數式に關する永久不變の眞理と考えられて來た。しかし、それは數學の理論組成を論理的に吟味して見てのことではなかつた。數學の理論内容を他の科學の立論に活用し、生活の合理化に利用して見てのことであつた。すなわち、他の科學が話題とする具象的な世界を極めてよく説明してくれるし、生活の要求を好都合に満してくれるからなのである。だがこれは一寸考えてみると尤も至極なことである。というのは前にも述べたとおり、數學でも應用が理論に先行して、具象的な世界の理論的處理、生活上の要求の合理的處置にかかわりのある數學の話題が採り上げられ、解答が用意されて來たまでのことであるのである。しかし、このような——役立つようにと凝らした工夫が望むように役立ったという——事態が果して眞理性の裏付けになるものであろうか。甚だもつてあやしいことではある。

二 反省を促がされた數學

數學の理論組織の論理的吟味を促がす事態が十九世紀の半頃三つの分野で起った。非ユークリッド幾何學の成立、非可換代數系の發見、ワイヤストラス (Weierstrass) 曲線の構成である。この三つは數學の理論内容の論理的性格を明確にするという大きな結果をもたらした。

いわゆる幾何學は圖形についての技術としてエジプトの測量術に始まり、ギリシヤに傳えられ、ユークリッド (Euclid) の手によってストイケイヤと稱ぶ本の中で科學の體裁を具えるようになったものである。この本ではまず部分、幅、長さ、端などという言葉を使って點、線、直線、面、平面、圓、平行線などを定義する。次に

- (一) 任意の點から任意の點に直線をひくことができる、
- (二) 有限な直線を續けて直線に延長することができる、
- (三) 任意の中心と距離で圓を畫くことができる、
- (四) 直角はすべて互いに相等しい、
- (五) 一つの直線が二つの直線に交つて作る同側内角の

和が二直角より小さければ、この二直線をこの側で限りなく延長すると交わる、

と前提している。この五つを公準と呼ぶ。あとは極めて明白な(例えば「等しいものに等しいものを加えると全體は相等しい」、「全體は部分より大きい」など)五つの事項を援用して、圖形と數式について四六〇以上に及ぶ命題を證明している。ほとんど非のうちどころのない立派な體系であつて、二〇〇〇年の長きに亘つて學問體系の典型とされ、空間の直相を傳える唯一の科學と考えられて來た。しかし、全然無批判で迎えられたわけではない。⁽¹⁶⁾たとえは上に掲げた(五)は他の四つから證明できると考え、その證明を試みる人が續出してゐる。そのため「ユークリッド批判」といえば(五)を他の四つから證明しようという研究を意味するようになった程である。

この種の研究の中で最も重要なのはサツケリ (Saccheri) の研究である。なお(五)は「一點を通して他の直線に平行な直線は唯一つである」という大切な命題を證明する基となるので、「平行線公準」とよぶ。さてサツケリ

の研究は他の四つを認め、平行線公準を否定すると矛盾

に陥いることを示して、他の四つを認める限り平行線公準をも認めねばならぬことを明かにしそれによって平行線公準が他の四つから證明できることを裏付けようというねらいであった。(一)乃至(四)だけから證明できる数々の大切な命題(たとえば「三角形の内角の和は二直角を超えない」)を明らかにした。これは大きな貢献であった。さらにつづけて平行線公準の否定がどんな矛盾を招くかを二つの場合に分けて研究した。その一つの場合からは「三角形の内角の和は二直角より大きい」ということが出たので、これは矛盾であると断定した。他の一つの場合には「一つの線分の両端で立てた垂線と斜線で相交わらないものがある」ということが分かった。これをサツケリは「こんなことは直線の本質にそむく」という天降り式の理由で矛盾と断定した。ところがこの第二の断定は誤っていた。他の四つから平行線公準を證明するすべての研究が失敗したので、この証明は不可能なものではなからうかという考えをいだく人々が出た。そして十九世紀の半頃には同じことが全く異った方向への研究となっていた。すなわち、ガウス(Gauss)、ロバチェフスキー

(Lobatschewsky)、ボリアイ(Bolyai)等が(一)乃至(四)が成立し、「一つの線分の両端で立てた垂線と斜線とが交わらないことがある」ような(つまり平行線公準をある形で否定した)幾何學を研究したのである。ガウスはユークリッド幾何學の絶對性を主張したカント哲學に遠慮してか遂に公表しなかった。ロバチェフスキーは一八二六年、ボリアイは一八三二年にこの幾何學を公表した。つづいて一八五四年にはリーマン(Riemann)が(一)、(二)「直線は終りはないが有限である」、(三)、(四)、(五)「平行線はない」という公準の上に立つ幾何學を公表した。こうして、唯一絶對の空間學であると考えられていたユークリッド幾何學の他にも空間學のあり得ることが明らかになったのである。

數ならびに式の科學としての代數學は幾何學のように早くは體系立てられなかった。しかし、世界の諸所で別に研究されていながら主題はどこでも方程式を解くことであった。一次方程式、二次方程式の考えは可成り古いもののようである。たとえばエジプトでは紀元前一〇〇〇年以上も前にかかれたと思われるパピルスの中に一

次方程式と二次方程式にあたる問題が入っている。⁽¹⁸⁾今日の
 ような機械的な解き方が工夫されたのは勿論ずっと後の
 ことであり、根を一般的な公式として書き下すことは
 文字係数が使われてからのことであろうから一六世紀終
 り以降のことである。エジプトでは假りの答を代入して
 合わないときは比例の考えで修正するという算術的な工
 夫によって解き、ギリシヤでは線分と矩形を使う幾何的
 な方法によって解いている。⁽²⁰⁾アラビヤでは代数的な解法
 を幾何的に確かめるといふ珍しい處置をとっている。⁽²¹⁾
 これに對してインドでは六世紀頃から二次方程式を扱っ
 ているが、その解き方は平方完成という代数的なもので
 ある。⁽²²⁾一一世紀始めには、兩邊に x^2 の係数の四倍をか
 け、 x の係数の平方を加え、左邊の三項を平方の形にな
 おすという方法で解いている。これは内容的には今日の
 機械的な方法と全く同じであつて、二次方程式の根の公
 式は實質的には一一世紀にインドで確立されたといつて
 よからう。次は三次方程式であるが、その一般的解法は
 やつと一五三〇年頃イタリアのフォンターナ⁽²³⁾(Fontana)
 が求め、また一五四五年頃同じくイタリアのフェラリ

(Ferrari) が四次方程式の解き方を明らかにしている。
 さて一般一次方程式 $ax+b=0$ ($a \neq 0$) の根の公式は
 $x = -b/a$ である。この結果は文字係数 a 、 b に減法一
 回、除法一回施した形でかかれている。また一般二次方
 程式 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) の根の公式は $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
 b 、 c に加法一(又は〇)回、減法二(又は三)回、乗
 法三回、除法一回、巾法一回、開法一回施した形でかか
 れている。このように、一般方程式の根をその文字係数
 に加法、減法、乘法、除法、巾法、開法を有限回施した
 形で書くことを方程式を代数的に解くという。つまり一
 次方程式と二次方程式は代数的に解けたのである。フォ
 ンターナの方法、フェラリの方法をしらべると、三次方
 程式、四次方程式も代数的に解けているのである。
 次は當然のことながら數學界は一般五次方程式の代數
 的解法の研究にとりかかった。ところがこの研究も平行
 線公準の證明と同じように失敗つづきのままで一八世紀
 の終りを迎えてしまった。そしてこれもまた平行線公準
 のときと同じように「一般五次方程式については代數的

解法がない」のではなからうかという考をいただく人々が出て來た。たとえば一七九九年にはルッフィーニ(Ruffini)が五次方程式が解けないことについての一文を公けにした。⁽²⁴⁾この研究は誤っていたけれども、この研究方向を追う多くの人が現われる契機となった。そしてルッフィーニの豫想の正しかったことがアーベル(Abel)とガロワ(Galois)によって別々に證明された。⁽²⁵⁾特にガロワの立論の中には「群」という新しい數學的世界が登場している。それは若干個のものの順列(置換)全體がなす世界である。この世界は乗法や除法が自由に行えることは舊來の世界と變らないのであるが、乗法の交換則($xy = yx$)が必ずしも成立たないという點ではひどく舊來の世界と異っているのである。こうして、從來、數と式について永久不變の性質と考えられていた交換則の一般性を拒否するような別の代數系⁽²⁶⁾(計算の定められた數學的世界)のあることが明らかになったのである。しかもその奇異な世界についての知識をかりて、通常の世界の長く解くのできなかった重要問題が解けたのである。

變動量の科學としての微分學、計量の科學としての積

數學を語る

分學がニュートン(Newton)とライプニッツ(Leibnitz)によって培われたことは周知のとおりである。しかしその育った家——微分學については速度に關連して力學、積分學については求積に關連して幾何學——の臭味は却却ぬけなかった。ガウス、コーシイ(Cauchy)、その他の學者によって、獨立した科學の體裁に整理されてからも、何かにつけて力學的な類推や、圖形的な暗示が大きな據り處となっていたようである。

ある函數が微分可能であるためには連續でなければならない。これは曲線上の一點で接線が引けるためにはそこで曲線が切れてはいけなことを思わせる。これはたしかにそのとおりである。このことの逆は「函數が連續なところでは微分可能である」となる。これも成立つと考えられていた。それはこの逆が「切れていない曲線には接線が引ける」ということを思わせるのと、曲線といえは鉛筆で紙上に畫いた線なり、机上においた線なりを連想することによるのである。ところがこの逆は成立たない。たとえば曲線 $y = \sin \frac{1}{x}$ (ただし、 $x \neq 0$ のとき $y = 0$ とする) は $y = 0$ (すなわち原點) で連續

である。しかし、この曲線上の動点PとOを結ぶ動直線OPを作っておいて、Pを曲線上でOに近付けるとOPは仰角 $\pi/4$ と俯角 $\pi/4$ の間を無限に振動してしまふ。すなわちOでの接線というものは考えられないのである。この曲線の場合この奇妙な点は原点一ヶ所だけである。ところが、ワイヤストラスは 1875 年 $y = \frac{1}{2}a^x \cos(b^x \pi a)$ 、 $(0 < a < 1, ab > 1 + \frac{3}{2} \pi, b \text{ は奇数})$ という函数を發表した。この函数はいたるところ連續でありながら、いたるところ微分不能である。幾何の言葉に翻譯すると、この函数の表わす曲線はどこも切れていないが、どこで接線を引こうにも引けないのである。この曲線ではそのすべての点が上の曲線 $y = \sin x$ の点Oと同じような点になっているのである。こんな奇妙な曲線は鉛筆で畫いた線や机上においた糸を據り處として曲線を考へている限り思ひも及ばないものである。

このワイヤストラスの曲線は感覺に訴へたのではどうい考えられないような性質を有つものが數學の世界にはあることを示している。

三 特異性のある科學——數學

數學はそれを語っている人も何について語っているかを知らず、また語っていることが眞であるかないかを知らない科學である(ラッセル⁽²⁸⁾ Russell)。數學はあらゆる面で經驗とは何の係わりもないし、また、その方がよい。だが、數學は何處へ行く。

他の多くの科學と同じように、數學も何物かについて、何事かを物語っている。ユークリッド幾何學體系以來、數學は嚴密科學の最たるものと考へられて來た。それは數學が何物かについて何事かを物語る仕方が他の科學にくらべ、際立って整然としていたからである。すなわち、話題を採り上げるには必らず「定義」によって「何物について物語ろうとしているか」を明確にしているからである。また、「何事かを物語る」のが聲を大にしての單なる強調ではなく、「證明」という裏付をそえての言明であつたからでもある。ところが定義とはすでに明確となつた概念から新しい概念を構成する手續である。甲という概念から、定義の手續を逆行して、甲の定

義の中に出てくる一つ概念乙へ、これと同じように乙から丙へといくらでも逆行は考えられる。しかし一つの體系の中でこの逆行を限りなくつづけるわけにはゆかない。すなわち、すべてを定義することはできない。したがって、上の逆行はどこかであきらめなくてはいい。すなわち體系の冒頭では話題を無定義で採り上げなくてはならない。また證明とはすでに承認した命題から新しい命題を誘導する過程である。命題丙から、證明の過程を逆行して、丙の證明の中で使っている一つの命題丁へ、これと同じように丁から戊へといくらでも逆行は考えられる。しかし一つの體系の中でこの逆行を限りなくつづけるわけにはゆかない。すなわち、すべてを證明することはできない。したがって上の逆行はどこかであきらめなくてはならない。すなわち體系の冒頭では主張を無證明で承認してかからなくてはいいけない。このように考えてくると演繹體系としての數學は出發點で、無定義概念を採り、無證明命題を認めなくては歩み出すことさえできない科學なのである。無定義であるから「何であるか」知るすべがない。無證明であるから「真である

かないか」知るよしもない。あとはどんなに整然と定義しても、證明しても同じことである。これが上に引用したラッセルの名言が意味するところである。

このように考えてくると、ユークリッド幾何學の諸々の定理は決して、空間についての永久不變の眞理を述べているのではない。この幾何學で採り上げたいろいろなものが公準に述べたような性質を有しているとすれば、定理で述べたようなことになる主張しているだけのことである。だからこそ、ユークリッド幾何學とならんで、ロバチエフスキー幾何學も、リーマン幾何學も考えられるのである。代數學とても同じことである。交換則 $(a \parallel b)$ 、結合則 $(ab \parallel a \cdot b)$ 、分配則 $(a(b+c) \parallel a \cdot b + a \cdot c)$ 、どれも數と式についての永久不變の眞理ではない。このような計算規則をみたすような數と式の世界がどんなことになっているのだろうかをしらべるための手始めにすぎない。こんな事情が幾何學でまず氣付かれたのは、演繹科學の論理的性格を知ってか知らないでかはわからないが、ユークリッド⁽²⁹⁾が幾何學をまず論理的に組織立てたからにすぎない。こうして、數學は抽象形式科

學であることが分かる。

次にサツケリの失敗は大きな教訓となる。サツケリの失敗はユークリッド幾何學に對する過信による。その過信はこの幾何學が、餘りにも忠實に經驗の世界を解き明かしていることによる。經驗の世界だけが在り得る世界だと考えて、研究の對象を經驗で不當に狹めてしまった。サツケリの失敗は推理の導き手として經驗を過信したことにもよる。一つの線分の兩端で立てた垂線と斜線とが相交わらないという事態は經驗とは合わない。經驗が案内役であれば、こんなことには出會わなかつたはずである。こうしてこれを矛盾と速斷して了つた。經驗という案内人を不當に重んじて研究の領域を狹ばめてしまつたのである。サツケリの失敗は經驗を眞偽の尺度に使つたことにもよる。垂線と斜線とが交わらないことのあらゆる幾何學では三角形の内角の和が二直角より小となる。これは經驗という尺度で測る限り偽である。しかし、數學はその論理的性格からいって、眞とか偽とかを云々すべき筋合のものでもなく、まして判定役に經驗をかつぎ出して、不當な價值付をすることはなるまい。

すなわち、サツケリの失敗は三つのことを教える。數學の研究對象を經驗の世界に限つては狹きに失する。經驗的數量は交換則に従うが、學としての代數學は非可換代數系をも研究すべきである。數學の推理誘導に經驗を基準にしては危い。經驗的圖形とは程遠いワイヤストラス曲線などというものもあつたのである。數學の結論主張を經驗に照合するのは必要なことである。非ユークリッド幾何學のいうところが經驗と付合しなくても、氣にするにはあたらぬ。約言すると、數學はあらゆる面で經驗とは係わりのない害のものである。そして係わらせない方が數學展開のためにも安全である。

新幾何學の成立、新代數系の發見、新曲線の出現という歴史的過程の中で促進された數學の論理的性格の考察は一應の段落に到達した。³¹⁾この考察の結論を承け容れた上で、數學の方法論も確立された。それはいわゆる公理的方法である。すなわち、無定義概念を出發的におき、無證明命題を冒頭にみとめ、それだけを基として諸命題をみちびき、飛躍のないようにならべるという方法である。この方法に則つて、舊來の代數學の基本事項と考え

られる自然数の理論を再構成したのがペアーノ (Peano) であり、舊來の幾何學を再整理したのがヒルベルト (Hilbert) である。⁽³²⁾ 一方、微積分學の基礎につながるものとして、實數を表示する直線を點の集りとみて研究していたカントール (Cantor, G.) は「無限の學」である集合論に想到した。カントールは長い躊躇の上でこの新しい科學を公表したのであるが、案の定可成の人々から反對の聲が起った。しかし、自然數、分數、有理數、無理數、複素數という數概念の擴張とはまた別な數概念の擴張を扱っていること、⁽³³⁾ 點の「多少」ばかりでなく、點の「つながり」も考察していることなどによって全數學の基礎となることのできる科學であると考えられるようになった。ところが、この嚴格に組立てられた立論の中にも種々の逆理の發生することが明らかにになった。これが又數學の基礎付けそのものの再吟味をせまったこと勿論である。

⁽³⁴⁾ この再吟味にあたっては三つの異った態度が見られる。一つは「集合」「關係」などの概念を「肯定」「否定」「選言」などの論理的概念、⁽³⁵⁾ だけから構成し、自然數系

數學を語る

(したがって數學) を論理學の一分枝として位置付けようとする。これはラッセル、ホワイトヘッド⁽³⁵⁾ (Whitehead) の代表する論理主義の態度である。一つは論理だけから個々の科學は生來しないという。各科學固有の概念を論理で操作してこそ各科學が造られる。一方に數學の無定義概念と無證明命題を用意し、他方に論理を用意し、後者で前者を吟味、分析するという手順をとる。數學を前論理的なもの、論理學を外數學的なものとみている。これは數學が形式科學であることに力點をおく、ヒルベルトその他の形式主義の態度である。一つは論理主義や形式主義のように數學を「何か時を超えた構造」のように考えてかかることに反對する。定義の構成についても定理の證明にあたっては、有限を基盤とし、逐次操作が可能であるという直観に準據して數學を組立ててゆくことを主張する。集合論に出現した逆理⁽³⁶⁾ が無限を一つの完結したものとして扱っていることに因るとして「無限概念の亂用」を戒める。又集合論の矛盾は排中律を論理の捨ててはならぬ鐵則とみるからのことであるとして「排中律の固執」をも戒める。これはブラウワー (Brouwer)

一 橋 論 叢 第三十七卷 第四號

wer)につゞく直觀主義の態度である。

こうして、數學は假設演繹的體系として、地下工事を補強している。では地上構造は？ やはり假設演繹的體系として抽象理論が増強されている。これが數學進展の二方向である。

では假設演繹的體系として數學は具象的なものに目を閉じ、他の科學に背を向けているのであろうか？ 決して、そうではない。又機を得て説くこととしよう。

(五七・一・二七)

註 ローマ數字は参照書目につけた番號である。

- (1) 本稿では新制高等学校までの教育課程をいう。
- (2) 數學をこのように眺めることはもちろん新しいことではない。I一一—一二頁、一九五—一九六頁
- (3) 本稿第三節参照。
- (4) 「最小の手段で最大の效果を目指す」のが經濟行動の一つの型である。このことだけから、最大最小の數學(微分學)の技術が無制限に使えると考へては危い。
- (5) たとえばニュートンの微分學はガリレイの新しい物理學の中に問題を見出し、デカルトの新しい代數學の上に可能になったといえよう。
- (6) アリストテレスがすでにこの種のことに觸れている。

I 二七六頁

- (7) 概念としては行列が行列式よりも始原的である。しかし、行列式(ライプニッツ)は行列(ケイレイ)より百年以上も前に話題になつてゐる。
- (8) 加法、乗法と一致した順序は減法、除法である。したがって數としては負數、分數の順でありたいが歴史は逆行している。負數を扱うことの割合早かつたインドでさえ、七世紀になつてからである。II 二四一頁。
- (9) インドでは前四百年頃すでに教科目に數えられ、ギリシャではアラトンが教科目に入れている。II 六頁、III 一八—二五頁
- (10) 數學についてはいわゆる學會の他に教育會があつて、數學の教育面を論究している。
- (11) 幾何學、代數學、解析學のことであつて當時の數學の全分野とみてよい。
- (12) ギリシャ以前の數學についてはノイゲバウアの有名な研究がある。IV 参照。
- (13) III 第一卷一一—一二八頁
- (14) これについてはヒースの詳細な研究がある。V 参照。
- (15) ニュートンの「自然哲學の數學的原理」もストイケイヤの體裁に倣つて書いたといわれる。
- (16) 簡潔な歴史的説明がVII 七—二〇頁にある。
- (17) カントの數學觀についてはVII 二四七—三二六頁を見よ。

- (18) IV 一一一頁
 (19) IV 一一二頁
 (20) II 第一卷一五〇—一五二頁
 (21) VII 一六三、一六四頁
 (22) II 二三四—二三八頁
 (23) 普通タルタリーヤと呼んでいる。VIII 二二一頁
 (24) Teoria Generale delle Equazioni K 一三九頁
 (25) ガロワについてはK 一一〇、一一三頁
 (26) 關係系とならんで現代代數學の大切な概念である。X 一五三頁
 (27) 藤原松三郎著、微分積分學第一卷一六〇、一六一頁参照。
 (28) ラッセルが一九〇一年に書いた論說の中で使った句である。
 (29) アリストテレスは明白にこの問題を扱っている。I 六頁、六八—七一頁、III 三三六、三三七頁、V 第一卷一一七—一二四頁
 (30) ユークリッドはプラトン派の幾何學は知っていたが、アリストテレスの著作は読んでいなかったらしい。VIII 五三頁
 (31) VII 緒論参照。
 (32) スプアノの Arithmetica Principia 1889 とエントネルトの Grundlagen der Geometrie 1899 を比較。
 (33) XI は無限論となっているが、数概念の兩様の擴張について

數學を語る

いての総合的批判的な研究である。

(34) XII 参照。

(35) この主義に立つラッセル・ホワイトヘッドの共著がXII である。

(36) XV 参照

なお本文中の人名については英、獨、佛、伊以外は英書に使われている綴りによる。

参照書目

一橋大學付属圖書館にあって、本稿に關連のあるものに止めた。この大學の圖書館には青年諸君が全青春を傾けても悔いない書物が數多收められている。

I Heath, T. L.: Mathematics in Aristotle, Oxford, 1949

II Datta & Singh: History of Hindu Mathematics (Part I, Numerical Notations and Arithmetic), Lahore, 1935

III Heath, T. L.: Greek Mathematics, 2 vols., Oxford, 1921

IV Neugebauer, O.: Vorlesungen über Geschichte der Antiken Mathematischen Wissenschaften (Bd. I, Vorgrichische Mathematik), Berlin, 1934

V Heath, T. L.: The Thirteen Books of Euclid's Elements, 3 vols., Cambridge, 1926

一橋論叢 第三十卷 第四號

- VI Baldus, R.: Nichteuclidische Geometrie, Berlin u. Leipzig, 1927
 VII Couturat, L. (deutsch von C. Siegel): Die Philosophischen Prinzipien der Mathematik, Leipzig
 VIII Ball, W. W. R.: A Short Account of the History of Mathematics, London, 1893
 IX Cantor, M. (herausgegeben von): Vorlesungen über Geschichte der Mathematik (Bd. IV), Leipzig, 1908
 X Hermes, H.: Einführung in die Verbandstheorie, Berlin, 1955
 XI Couturat, L.: De l'Infini Mathématique, Paris, 1896
 XII Black, M.: The Nature of Mathematics, London, 1953
 XIII Russell & Whitehead: Principia Mathematica 3 vols. Cambridge, vol. I, 1925, vol. II, 1927 (vol. III 欠)
 XIV Fraenkel, A.: Einleitung in die Mengenlehre, Berlin, 1923

(一橋大學教授)