

《研究ノート》

線型計算に於ける誤差の影響

——レオンチェフ行列・線型計畫と誤差——

片岡 信 二

最近理論經濟學、計量經濟學に於て線型計算が大きな役割を占めつつあり、この理論的研究の成果が多數發表されている。特に投入產出分析に於けるレオンチェフ行列の計算、又經濟計畫、企業、經濟計畫に於ける線型計畫法は形式理論の段階より實際のデータによる實用の段階に至っており、これらの問題の多變數の場合の解を T. B. M. 602, A, C. P. C 等の計算機によつて求めるプログラミングの研究も爲されつつある。

この小論に於ては、原データに必然的に含まれている誤差が、解にどの位の影響を及ぼすかを議論し、特に線型計畫に於ける最適解の信頼度を評價する論理を述べたいと思う。レオンチェフ行列の誤差の問題に關しては既に W. Duane Evans (Econometrica Vol. 22 1954 461) の論文があるが、こゝではもう少し見透しのよい方法によつて計算した。

研究ノート

一 行列の逆轉と誤差

レオンチェフ體系に於いて生産係數の行列を A として

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

又體系の内生變數として總產出量のベクトルを x

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\text{ダッシュは横ベクトル})$$

外生變數として最終需要のベクトル ξ をとる。

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

このとき、レオンチェフ方程式は次の如くなる。

$$x = Ax + \xi \quad \cdots \cdots \cdots (1)$$

これは

$$x = (E - A)^{-1} \xi \quad \cdots \cdots \cdots (2)$$

なるごとく解かれる。

さて行列 A_0 を基準の係數としてこれに對する解がわかつているとき、これより僅かに係數が變化した時、(2)の解がどのように變るかを考えてみたい。即ち

$$x^{(0)} = (E - A_0)^{-1} \xi \quad \cdots \cdots \cdots (3)$$

なる $x^{(0)}$ が既知であるとして

$$A = A_0 + V \quad \cdots \cdots \cdots (4)$$

V: 微小量

なる行列 A を (2) に代入した時の解

$$z = (E - A_0 - V)^{-1} \bar{z} \dots \dots \dots (5)$$

$$z = \{ (E - A_0) [E - (E - A_0)^{-1} V] \}^{-1} \bar{z}$$

$$= [E - (E - A_0)^{-1} V]^{-1} (E - A_0)^{-1} \bar{z}$$

$$= [E - (E - A_0)^{-1} V] z^{(0)} \dots \dots \dots (6)$$

ここで $(E - A_0)^{-1} V$ は微量であるからこの二次以上の項を無視すれば

$$z = [E + (E - A_0)^{-1} V] z^{(0)} \dots \dots \dots (7)$$

となりこれより

$$\Delta x = z - x^{(0)} = (E - A_0)^{-1} V x^{(0)} \dots \dots \dots (8)$$

なる Δx は行列 A_0 の微小變動 V に對する (3) の解の變動量を表わしている。

次に V の成分 V_{kj} を、生産係數 A_{kj} に含まれる誤差を見做して議論を進めよう。 V_{kj} は各々平均値の、分散 σ_{kj}^2 なる正規母集団に屬していると假定する。(サンプルの分散についての推計學的な取扱いはここでは問題にしないことにする。)

(8)より

$$\Delta x_i = \sum_j \sum_k B_{ik} V_{kj} x_j^{(0)} \dots \dots \dots (8)$$

なる如く Δx_i は V_{kj} についての一次結合によって表わされる故、 V_{kj} がすべて獨立であるとする z_i の分散 σ_{zi}^2 は

$$\sigma_{zi}^2 = \sum_j \sum_k B_{ik}^2 \sigma_{kj}^2 \dots \dots \dots (9)$$

これによって、レオンチェフ方程式の解 (3) に對する誤差の評価が可能となる。これは W. D. EVANS の與えた式に一致す

るのでこれ以上はこの式については述べない。

ここでは更にこれを土臺として次の線型計畫の問題を考えてみよう。

二 線型計畫に於ける誤差と最適解の信頼度

さて吾々は次に線型計畫と誤差の問題について考えてみよう。レオンチェフの問題も線型計畫の問題も數學的には連立方程式を解くという問題であり前節の考察の結果が有効に使えるのである。先ず線型計畫の問題を數式化して置こう。notation はすべて Dorfman のそれに従うが、活動分析の言葉でも同じことが表現出来る。

今 n 々の生産プロセスを $P_1, P_2, \dots, P_n$ としてそのベクトルを

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix}, \quad P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix} \dots \dots \dots (10)$$

又その稼働レベル(活動度)を $x_1, x_2, \dots, x_n$ 、利用可能な資源量 $S_1, S_2, \dots, S_k$ とすると、次の制限式が成立つ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq S_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq S_2 \\ &\vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &\leq S_k \end{aligned} \dots \dots \dots (11)$$

各々のプロセスの單位稼働レベル毎の利潤を $v_1, v_2, \dots, v_n$ とす

ると、線型計画の問題は

$$r = v_1x_1 + v_2x_2 + \dots + v_nx_n \dots\dots\dots (12)$$

なる総利潤 r を最大にするという問題になる。勿論線型計画の問題はこのような生産の問題だけではなく他の多くの型があるがここでは取扱わない。

さて、 n 個のプロセスベクトルに m 個の廃棄プロセスを加えて (11) 式の不等號を消すと

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (13)$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \dots\dots\dots (14)$$

$$V = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_{n+m}) \dots\dots\dots (15)$$

$$S = (s_1, s_2, \dots, s_m)$$

として

$$BX = S, \quad X \geq 0 \dots\dots\dots (16)$$

なる條件の下に

$$r = V \cdot X \dots\dots\dots (17)$$

を最大にするという問題になる。

次にシンプレックス判定法を要約する。 $P_1, P_2, \dots, P_{n+m}$ のプロセスの中から適當に n 個を選んでこれを基底 (basis) としてこれよりつくられる $n \times n$ 行列を B_1 とする。他の残りのプロセスをまとめて B_2 とすれば (16) 式は

$$B_1 X_1 + B_2 X_2 = S \dots\dots\dots (18)$$

但し、 X_1 は B_1 に對應する稼働レベル、 X_2 は B_2 に對應する稼働

研究ノート

レベルである。これより X_1 をとくと

$$X_1 = B_1^{-1} S - B_1^{-1} B_2 X_2 \dots\dots\dots (19)$$

となる。ここで

$$Q_0 = B_1^{-1} S, \quad B_1^{-1} B_2 = Q \dots\dots\dots (20)$$

とおくと

$$X_1 = Q_0 - Q X_2$$

が得られ、これを (17) 式に代入すれば、利潤は

$$\begin{aligned} r &= V_1 X_1 + V_2 X_2 \\ &= V_1 Q_0 + (V_2 - V_1 Q) X_2 \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

さて、ここで Q の横ベクトル $(V_2 - V_1 Q)$ の成分がすべて負であるならば X_2 のどの成分を 0 から正のレベルに引上げても利潤は減少する故、はじめに基底に選んだ n 個のプロセスは最適の組合せであることがわかる。これをシンプレックス判定法という。若し $(V_2 - V_1 Q)$ の成分に正のものがあれば適當な方法で (ここでは述べない) シンプレックス判定を満足するまで基底ベクトルを変更してゆくのである。

さて、吾々の問題は次の如くである。「シンプレックス判定 $V_2 - V_1 Q \geq 0$ に於て B_1, B_2 の成分に誤差があるとき、その判定の信頼度はどの位か」

$$Q = B_1^{-1} B_2 \dots\dots\dots (22)$$

に於て B_1, B_2 にそれぞれ誤差 Δ_1, Δ_2 があるとして

$$B_1 = B_1^0 + \Delta_1, \quad B_2 = B_2^0 + \Delta_2 \dots\dots\dots (23)$$

とする。

一橋論叢 第三十五卷 第三號

$$B_1^{-1} = (B_1^{(0)} + A^{(0)})^{-1} = \{B_1^{(0)}(E + B_1^{-1}A^{(0)})\}^{-1}$$

$$= (E + B_1^{-1}A^{(0)})^{-1}B_1^{(0)-1}$$

$$= (E - B_1^{(0)-1}A^{(0)})B_1^{(0)-1} \dots \dots \dots (24)$$

ここで前節と同じく $B_1^{(0)-1}A^{(0)}$ は微量量として二次以上は無視してある。(23)、(24)を(2)式に代入して、

$$Q = B_1^{-1}B_2 = (B_1^{(0)-1} - B_1^{(0)-1}A^{(0)}B_1^{(0)-1})(B_2^{(0)} + A^{(2)})$$

$$= B_1^{(0)-1}B_2^{(0)} + B_1^{(0)-1}(A_2 - A_1B_1^{(0)-1}B_2^{(0)}) \dots (25)$$

$$B_1^{(0)-1}B_2^{(0)} = Q^{(0)}, \quad A_2 - A_1Q^{(0)} = I' \dots \dots \dots (26)$$

と置く

$$Q = Q^{(0)} + I' \dots \dots \dots (27)$$

となる。

$$V_1'Q - V_1' = V_1'(Q^{(0)} + I') - V_1'$$

$$= (V_1'Q^{(0)} - V_1') + V_1'I'$$

シンプレックス判定が成立つためには

$$V_1'Q - V_1' > 0$$

即ち

$$V_1'Q^{(0)} - V_1' > -V_1'I' \dots \dots \dots (28)$$

が成立たなければならぬ。左邊の量はシンプレックス表に於て各プロセスの下段に判定の項として計算されているものであり、右邊の I' は誤差の各成分の一次結合であるのでこの統計的性質(分散)も計算可能な量である。以後一般論を展開することは止めて、例題によって示したいと思う。

計算例

次のような簡単な例について考えてみる。

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 10$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 12$$

$$\dots \dots \dots (29)$$

なる制限条件の下で、次の一次式を最大にする。

$$z = x_1 + \frac{5}{3}x_2 + x_3$$

そのシンプレックス表は

basis		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S
	$\frac{b_j}{a_{ij}}$						
x_4	0	2	3	1	1	0	10
x_5	0	1	2	2	0	1	12

(First Step)

basis		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S
	$\frac{b_j}{a_{ij}}$						
x_1	1	1	$\frac{5}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$
x_3	1	0	$\frac{1}{6}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{14}{3}$
$V_1'Q^{(0)}$			$\frac{11}{6}$		$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
$V_2' - V_1'Q^{(0)}Q$			$-\frac{1}{6}$		$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	

(Last Step)

最適解: $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{8}{3}$, $x_3 = \frac{14}{3}$ 他は 0

さて、ここで最初の表の中の係数に誤差のある場合を考えてみよう。前記號に従って X_1 , X_2 を基底に選んだものであるから、

$$B_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり、各々の誤差 Δ_1 , Δ_2 がある

$$B_1 = B_1^{(0)} + \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{pmatrix}, \quad B_2 = B_2^{(0)} + \begin{pmatrix} \Delta_{13} & 0 & 0 \\ \Delta_{23} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。 $Q^{(0)}$ は最終段階に於ける基底以外のプロセスの列ベクトルよりなる行列であるから直ちに得られ、

$$Q^{(0)} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

これより(26)式によって Γ を計算し、横ベクトル $V_1 \Gamma$ は

$$V_1 \Gamma = (4, 1) \Gamma$$

$$= \frac{1}{3} \left(-\frac{5}{3} \Delta_{11} - \frac{1}{6} \Delta_{12} - \frac{5}{3} \Delta_{21} - \frac{1}{6} \Delta_{22} + \Delta_{13} + 2 \Delta_{23} \right)$$

$$- \frac{2}{3} \Delta_{11} + \frac{1}{3} \Delta_{12} - \frac{2}{4} \Delta_{21} + \frac{1}{3} \Delta_{22} \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$\frac{1}{3} \Delta_{11} - \frac{2}{3} \Delta_{12} + \frac{1}{3} \Delta_{21} - \frac{2}{3} \Delta_{22}$$

となる。一方 $V_1 Q^{(0)} - V_2$ はシンプレックス表の最下行より

$$V_1 Q^{(0)} - V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (31)$$

と得られる。さて、シンプレックス判定の成立つ条件(28)は

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{9} \Delta_{11} + \frac{1}{11} \Delta_{12} + \frac{5}{9} \Delta_{21} + \frac{1}{18} \Delta_{22} - \frac{1}{3} \Delta_{13} - \frac{2}{3} \Delta_{23} \\ \frac{2}{9} \Delta_{11} - \frac{1}{9} \Delta_{12} + \frac{2}{9} \Delta_{21} - \frac{1}{9} \Delta_{22} \\ - \frac{1}{9} \Delta_{11} + \frac{2}{9} \Delta_{12} - \frac{1}{9} \Delta_{21} + \frac{2}{9} \Delta_{22} \end{array} \right\} \begin{matrix} \leq \frac{1}{6} \\ \leq \frac{1}{3} \\ \leq \frac{1}{3} \end{matrix} \quad \dots\dots\dots (32)$$

整理して

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 = 10 \Delta_{11} + \Delta_{12} + 10 \Delta_{21} + \Delta_{22} - 6 \Delta_{13} - 12 \Delta_{23} \\ D_2 = 2 \Delta_{11} - \Delta_{12} + 2 \Delta_{21} - \Delta_{22} \\ D_3 = -\Delta_{11} + 2 \Delta_{12} - \Delta_{21} + 2 \Delta_{22} \end{array} \right\} \begin{matrix} \leq 3 \\ \leq 3 \\ \leq 3 \end{matrix} \quad \dots\dots\dots (23)$$

即ち(33)式の不等式を満たす場合にシンプレックス判定が成立つことになる。そして Δ_{ij} が各々分散 $\overline{D_{ij}^2}$ を持つ正規分布をするときには D_1 , D_2 , D_3 も正規分布をし、

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{D_1^2} = 100 \overline{D_{11}^2} + \overline{D_{12}^2} + 100 \overline{D_{21}^2} + \overline{D_{22}^2} + 36 \overline{D_{13}^2} + 44 \overline{D_{23}^2} \\ \overline{D_2^2} = 4 \overline{D_{11}^2} + \overline{D_{12}^2} + 4 \overline{D_{21}^2} + \overline{D_{22}^2} \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$\overline{D_3^2} = \overline{D_{11}^2} + 4 \overline{D_{12}^2} + \overline{D_{21}^2} + 4 \overline{D_{22}^2}$$

なる $\overline{D_1^2}$, $\overline{D_2^2}$, $\overline{D_3^2}$ なる分散を有する正規分布をなす。

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_{11}} &= \frac{1}{100} & \frac{1}{D_{12}} &= \frac{1}{50} & \frac{1}{D_{13}} &= \frac{1}{40} & \dots\dots\dots \\ \frac{1}{D_{21}} &= \frac{1}{100} & \frac{1}{D_{22}} &= \frac{1}{50} & \frac{1}{D_{23}} &= \frac{1}{40} & \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (35)$$

とすると、次の數値を得る。

$$\bar{D}_2 = 6.54, \quad \bar{D}_1 = 0.12, \quad \bar{D}_3 = 0.18 \quad \dots\dots\dots (36)$$

これらの分散を有し、正規分布をする D_2, D_1, D_3 が不等式 (33) を満足する確率を確率積分の表より得れば、

$$\begin{aligned} \text{Prob}(D_2 < 3) &= 0.885 \\ \text{Prob}(D_1 < 3) &= 0.999 \\ \text{Prob}(D_3 < 3) &= 0.999 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (37)$$

となる。この意味は、「基底として X_1, X_2 を選んで他のプロセス X_3, X_4, X_5 にシンプレックス判定を行った時その成立つ信頼度は各々 (37) の如き數値で與えられる。即ち、 X_1, X_2 については殆んど正確であるが X_3 については 88% の信頼度しかない故、これが成立たず、 X_3 が基底になっている可能性もある」ということを意味している。

三 結 び

以上線型計算特にレオンチエフ行列の逆轉、及び線型計畫法と誤差の問題について述べた。後者については解の最適値について統計的な判定を下すことを試みたが、各プロセスについて

のシンプレックス判定の成立の檢定に止ったことは不満であり、解そのものの信頼度を計算したのであるが、それには多重確率積分を、(33) の制限内で行はねばならず今の所不可能である。又、問題を判定の誤差を或る限度内に止めるためにはどの位の精度のデータを用いねばならないか」というように變えて考える必要もあると思う。(山田勇先生御教示による。)

最後に色々と御議論を戴いた山田勇先生外投入産出研究會の方々に謝意を呈する。本研究に要した費用の一部は文部省科學研究費によることを附記する。

技術進歩と不均等的發展

先 崎 久 雄

經濟成長の理論は種々の角度からますます深化されてきたが、それは要するに資本蓄積、技術進歩および人口ないし雇用量の増加の諸要因の長期動態的メカニズムを明かにすることである。このノートはマルクスの再生産論の方式を援用して、「順調な發展のモデル」を構成し、これを手懸にして再生産の條件をたずね、技術の進歩が不均等的發展をもたらす傾向を明かにする試みである。こゝでは資本家と労働者の二階級、および生産財と消費財の二つの生産部門より成る經濟をグロス・タームで表わし、利子率、資金および土地などの問題を不