の發展」（思想、一九四八年七月九日）、花田圭介「論理的經驗主義の批判」（思想、一九五一年一二月）、市井三郎「辨證法と記號論理學との對決」（下）（思想、一九五五年一月）。

また赤・佐藤の兩君から種々の點で御指摘を頂いた。ここに感謝致します。

産業部門の統合と動學的安定條件

荒　憲治郎

一　問題

私は、先に本誌で書いた「生産函數の齊一性と産業部門の統合」という論文で、最終需要がどのように變化しても、それが各産業部門の産出量水準に與える效果が不變なる條件を吟味した(1)。私は、この論文で、先に到達したる結論よりももっと一般的な條件を導出し、更に、産業部門の統合に伴う動學的安定條件の問題を分析したいと思う。

以下の分析のために、以前に得たる歸結を簡單に要約しておく。

いま、limitational な生産函數の下に、統合前のA體系について

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & O & \cdots & O \\ O & X_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & X_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$[X_{ij}][X_j]^{-1}=A$$

が計算せられたとせよ。そこで、變動效果不變性という規準の下で、このn個の産業部門をs個の産業部門に統合する。いま、産業部門の統合に必要な集計行列を

$$P\equiv\begin{pmatrix} e_{m(1)} & & & 0 \\ & e_{m(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e_{m(s)} \end{pmatrix}$$

とする。ここで、$e_{m(i)}$ は

$$e_{m(i)}=\underbrace{[1,1,\cdots\cdots,1]}_{m(i)\text{個}}$$

なる行ベクトルである。そこで、

$$P[X_{ij}]P'\equiv[Y_{ij}]$$

とすれば、これは最初の $m_{(1)}$ 個の部門を統合して第一部門、次の $m_{(2)}$ 個の部門を統合して第二部門という仕方で、n個の産業部門をs個の産業部門に統合することを意味している。かくして新たに、統合後のB體系について、

$$[Y_{ij}][Y_j]^{-1}\equiv B$$

とすれば（但し、$[Y_j]$ は $P[X_j]P'\equiv[Y_j]$ である）、

$$BP=PA$$

が成立する時、そしてその時においてのみ、變動效果不變性の條件が維持される。

私はこのことより進んで、若しもA體系の中に生産函數が齊一なる産業部門が存在するならば、そのような産業部門を統合すると、$BP=PA$ なる條件が必ず守られるということを明かにした。即ち、生産函數の齊一性は、産業部門統合のための一つの充分條件であることを證明した。

この論文では、私は更に、$BP=PA$ のための必要且つ充分なる條件を分析する。そして、生産函數の齊一性は、以下に述べるより一般的なる條件の一つの special case にすぎぬことが明かになるであろう。

二　産業部門統合の必要且充分條件

定理を與える前に、集計行列

$$(1)\cdots\cdots P\equiv\begin{bmatrix} e_{m(1)} & & & \\ & e_{m(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e_{m(s)} \end{bmatrix}$$

に對應して、レオンチエフ行列Aを

$$(2)\cdots\cdots A\equiv\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{ss} \end{bmatrix}$$

と書いておく。ここに A_{ij} は、$m(i)$ 行 $m(j)$ 列の部分行列である。そこで、次の定理を得る。

定理【I】（1）の集計行列Pに對して

$$(3)\cdots\cdots\cdots\cdots BP=PA$$

が成立するための必要且充分なる條件は、各部分行列 A_{ij} の列和がそれぞれ等しいことである。

證明を與えるに先立ち、必要なる記號を定めておこう。先ず、

$$(4)\quad PA=\begin{bmatrix} e_{m(1)}A_{11} & e_{m(1)}A_{12} & \cdots & e_{m(1)}A_{1s} \\ e_{m(2)}A_{21} & e_{m(2)}A_{22} & \cdots & e_{m(2)}A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{m(s)}A_{s1} & e_{m(s)}A_{s2} & \cdots & e_{m(s)}A_{ss} \end{bmatrix}$$

において、部分行列 A_{ij} の各列和を a_{ij} とするならば、勿論

$$e_{m(i)}A_{ij}=[\underbrace{a_{ij}, a_{ij}, \cdots, a_{ij}}_{m(j)\text{個}}]=a_{ij}[\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{m(j)\text{個}}]\equiv a_{ij}e_{m(j)}$$

である。更に、最初のエレメントのみが1であり、殘餘が凡て0なる行ベクトルを

$$\overline{m}(i)\equiv[\underbrace{1, 0, \cdots\cdots, 0}_{m(i)\text{個}}]$$

と定義し、且つ

$$\mathfrak{A}\equiv\begin{bmatrix} a_{11}\overline{m}(1) & a_{12}\overline{m}(2) & \cdots & a_{1s}\overline{m}(s) \\ a_{21}\overline{m}(1) & a_{22}\overline{m}(2) & \cdots & a_{2s}\overline{m}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1}\overline{m}(1) & a_{s2}\overline{m}(2) & \cdots & a_{ss}\overline{m}(s) \end{bmatrix}$$

と定義するならば、

(4) 式は次の如くなる。

(5)　$PA=\mathfrak{M}PP$

(この證明は、實際に計算をやってみれば、容易に確められる。)

以上のことを前提として、證明に移る。

證明

(1) 必要なること。もしも部分行列 A_{ij} の各列和が等しくなければ、

$$e_{m(i)}A_{ij} \neq a_{ij}e_{m(j)}$$

である。從って、計算によって容易にわかるように

$$BP \neq PA$$

となる。即ち、A_{ij} の各列和は等しくなければならない。

(2) 充分なること。計算によって

$$PA[X_j]P \equiv P[X_{ij}]P \equiv [Y_{ij}] \equiv B[Y_j]$$

である。兩邊の右側より $[Y_j]^{-1}$ を乘ずると

(6)　$PA[X_j]P[Y_j]^{-1} \equiv B[Y_j][Y_j]^{-1} \equiv B$

を得る。所で、(5) 式によって、$PA=\mathfrak{M}PP$ であるから、これを代入すれば、

$$PA[X_j]P[Y_j]^{-1} = \mathfrak{M}PP[X_j]P[Y_j] = \mathfrak{M}P[Y_j][Y_j]^{-1} = \mathfrak{M}P$$

となる。從って

$$\mathfrak{M}P=B$$

である。そこで兩邊の右側から P を乘ずるならば、

$$\mathfrak{M}PP=PA=BP$$

が得られる。かくして、A_{ij} の各列和が等しければ、$BP=PA$ を得る。即ち、充分條件である。　(Q. E. D)

證明は省略するが、最終需要變動効果の不變性という規準の下で、次の系の成立は明白である。

系【一】 行列 A の列和が凡て等しい時、これを凡て統合して一部門となすことが出來る。

系【二】 行列 A の或る任意の列ベクトルが等しい時、これを統合して一部門となすことが出來る(生産函數の齊一性)。

〔注意〕 以上に導出した定理は、統合についての Eindeutlichkeit を意味するものではないことに注意せよ。私はただ、與えられた集計行列 P について言っているにすぎない。しかしながら、以上の定理は、レオンチェフ體系にづいて、かなり有效な法則であるように思われる。

三　産業部門の統合と安定條件

さて、次に、理論的問題として、Aggregation Problem といわゆる動學的安定條件の關係を尋ねよう。この問題の重要性は、經濟體系を動學的に觀察する場合に、同一の經濟現象を統合前の A 體系で考察するか統合後の B 體系で考察するかに從って、體系がある場合には安定になったりある場合には不安定になったりするのでは、吾々の分析方法が間違っている、という

ことを反省するならば、容易に理解されるであろう。

分析を簡單にするために、私は、産業部門が直接的又は間接的に相互に連結している經濟體系、即ち indecomposable な體系を前提とする。そこで、考察すべき經濟體系は、

(7)……$x(t)=Ax(t-1)+\xi$

(8)……$y(t)=By(t-1)+\zeta$

である[2]。勿論、ここで、行列Aは非負行列で且つ indecomposable である。而して、$BP=PA$ ならば、A體系とB體系とは、動學的安定條件に關して equivalent であることを明かにしよう。

先ず、非負にして且つ indecomposable な行列Aに關しては、數學上において知られたる「フロベニウスの定理」が適用できる。この定理によれば、行列Aは絶對値最大の正根 λ_1 をもち、且つ λ_1 に所屬する特性ベクトル $x(1)$ は正のエレメントから成ることが知られている[3]。從って

(9)……$Ax(1)=\lambda_1 x(1)>0$

が成立する。そこで、この式の左側から、集計行列Pを乘ずると、

(10) $PAx(1)=\lambda_1 Px(1)=BPx(1)$

である。かくして

(11) $[\lambda_1 E(s)-B]Px(1)=0$

を得る。ここに $E(s)$ は s 次の單位行列を示す。

明かに $x(1)>0$ なる故に $Px(1)>0$ であるから、

(12) $\det[\lambda_1 E(s)-B]=|\lambda_1 E(s)-B|=0$

でなければならない。即ち、λ_1 は行列Bの特性根でなければならない。かくして、もしもA體系が不安定 ($\lambda_1>1$) ならば、B體系も必ず不安定であることが結論される。

しかしながら、この結論は、A體系が安定であるにも拘わらず、B體系が不安定であるかも知れない、という可能性を排除するものではない。そこで、$BP=PA$ より

(13) $P'B'=A'P'$

を作る。ここにダッシュは列と行の同時的入れかえを意味する。先ず、行列Bと行列B'とについて

(14) $|E(s)\rho-B|=|E(s)\rho-B'|=0$

なることに注意せよ。而して、行列B'が非負行列にして且つ indecomposable ならば、上述の「フロベニウスの定理」によって、絶對値最大なる正根 ρ_1 をもち、その特性ベクトル $y(1)$ は正のエレメントよりなる。從って

(15) $B'y(1)=\rho_1 y(1)>0$

が成立する。この左側より P' を乘ずれば

(16) $P'B'y(1)=\rho_1 P'y(1)=A'P'y(1)$

である。かくして

(17) $[E(n)\rho_1-A']P'y(1)=0$

を得る。前提により $P'y(1)>0$ なる故に、

(18) $|E(n)\rho_1-A'|=|E(n)\rho_1-A|=0$

でなければならない。即ち、ρ_1 は行列Aの特性根でもある。

かくして、B體系が不安定（$\rho_1>1$）ならば、A體系も必ず不安定であることが結論されるのである。

容易に知れるように、行列Aの最大根λ_1は行列Bの根であり、Bの最大根ρ_1はAの根である。從って

(19)　$\lambda_1=\rho_1$

である。即ち、A體系の最大根とB體系の最大根は等しい。かくして、吾々は次の定理を證明することが出來た。[4]

定理【二】 $BP=PA$なる場合、A體系が安定（不安定）ならばB體系も安定（不安定）であり、B體系が安定（不安定）ならばA體系も安定（不安定）である。すなわち、A體系とB體系は動學的安定條件に關して等値である。

この定理によって、吾々は、老大なn個の產業體系について安定條件を尋ねたりその成長率を吟味する必要はない。吾々は、それを$BP=PA$という規準に從ってs個の統合された產業體系について分析すればそれで充分なのである。證明は省略するけれども、次の系も容易に確められる。

系【一】 行列Bを不變ならしめるような仕方で行列Aに變動が生じたとせよ。その時、安定條件は不變である。

系【二】 行列Aの列和が凡て等しいとせよ。その時、その列和がλ_1である。

以上の議論に、簡單な數字例をあてておこう。いま、A體系が

$$\begin{pmatrix} y_1(t)\\ y_2(t)\\ y_3(t)\\ y_4(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.4\\ 0.3 & 0.1 & 0.3 & 0\\ 0.1 & 0 & 0.1 & 0.3\\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t-1)\\ y_2(t-1)\\ y_3(t-1)\\ y_4(t-1)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\\ \xi_4\end{pmatrix}$$

とする。そこで、この體系の特性方程式を求めるならば、

$$\begin{aligned}|\lambda E-A| &= \lambda^4-0.4\lambda^3-0.18\lambda^2-0.028\lambda+0.0049\\ &=(\lambda-0.7)(\lambda-0.1)(\lambda+0.2+0.5\sqrt{-0.12})\\ &\quad(\lambda+0.2-0.5\sqrt{-0.12})=0\end{aligned}$$

となって、$\lambda_1=0.7$が最大根である。フロベニウスの定理の確證のために、λ_1に所屬する特性ベクトルを求めると、

$$x_{11}=0.198,\ x_{21}=0.138,\ x_{31}=0.078,\ x_{41}=0.09$$

となり、正値ベクトルである。

容易にわかるように、定理〔一〕によって、第一部門と第二部門を統合し、第三部門と第四部門を統合するならば、吾々は、新たにB體系として、

$$\begin{pmatrix} y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.4\\ 0.2 & 0.3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t-1)\\ y_2(t-1)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\xi_1+\xi_2\\ \xi_3+\xi_4\end{pmatrix}$$

を得る。明白に、$PA=BP$即ち

$$\begin{pmatrix} 1100\\ 0011\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.4\\ 0.3 & 0.1 & 0.3 & 0\\ 0.1 & 0 & 0.1 & 0.3\\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.4\\ 0.2 & 0.3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1100\\ 0011\end{pmatrix}$$

が成立している。從って、吾々の定理の條件を滿足している。

再び、B 體系について特性方程式を求めると、

$$|\rho E-B|=\rho^2-0.8\rho+0.07=(\rho-0.7)(\rho-0.1)=0$$

である。かくて $\rho_1=0.7$ が最大根であり、明かに $\rho_1=\lambda_1$ である。ρ_1 に所屬する特性ベクトルを示すと、

$$y_{11}=0.4,\ y_{21}=0.2$$

となり、フロベニウスの定理の確證を與えることが知れる。尙、〔注意〕で示したように、四部門から二部門に統合することが唯一の統合方法でないということ、從って、吾々の定理〔二〕が產業部門統合の Eindeutlichkeit を與えるものではない、ということは、更にこの四部門體系を一部門にもまとめることが出來る（蓋し行列 A の列和が凡て等しいから）という事情を省るならば、容易に理解されるであろう。一部門にする時には、明かに $P=[1,1,1]$ であり、$B=[0.7]$ である。

（1）一橋論叢第三二卷第六號。尙、この際、そこで展開された數字例（p. 754—p. 755）が計算違いであったので、訂正しておきたいと思う。

（2）以上の如き定差體系の問題については、次の論文を參照されたい。

拙稿「レオンチエフの動學體系」理論經濟學 1952 年、11 月。

（3）拙稿「產業連關の理論に關する一研究」經濟學研究I（一橋大學・研究年報）153 頁。

（4）以上の證明の過程で、體系の indecomposability を前提してきたが、これは、一般性を失うことなしに、容易に排除することが出來る。

（1955. Feb. 1）

執筆者紹介

小原敬士	一橋大學教授
地田知平	一橋大學助教授
青木外志夫	一橋大學特別研究生
松元亘	一橋大學助教授
渡邊金一	一橋大學講師
關恒義	一橋大學講師
荒憲治郎	一橋大學講師