《研究ノート》

『個性』と『戦略』を含む ゲームの理論

片岡 信二

一 はしがき

ノイマン・モルゲンシュテルンのゲーム論以後、多くの人々によってその擴張ないし一般化がなされ、多大の成果が上っているが、その根柢にある考え、すなわち「或る利益表に對する人間の行動は、ミニ・マックス原理によって決定される。」という前提は變りないようである。これは、最も賢明な人間同志がゲームをする上の行動原理としては必然的なものであるが、も一つ行動する人間の「個性」(乃至は上手、下手)という要素をゲーム論に導入する必要があるのではなからうか。ゲームの一番簡単な形としてジャンケン为例にとってみよう。ミニ・マックス原理によれば石、紙、鉄はどれも出す確率は $\frac{1}{3}$ ずつで、永久に勝敗は決らない筈である。しかしながら實際の場合、ジャンケンにも上手下手があるということを時々経験することは周知のことである。(例えば、子供とジャンケンする時そのこと

が痛感される。)もし石↓紙↓鉄と手を開く方へ出して行く方が、閉ちる方向より出しやすいということがあれば、それに對して逆をつくような「戦略」を取ればよいわけである。

扱て、ゲームに於ける行動を大體二つに分けて「個性による行動」と「戦略による行動」と名づけよう。この定義は以下の理論を進めるため便宜的なものであって、この二つを完全に分離することは問題があると思うが、ここではこれ以上立入ることは出来ない。以下、これらの行動によるゲームの理論を展開してみたいと思う。

二 理論の定式化

ゲームという、人間の複雑な行動を分析するのであるから、これを定式化するには上にのべた本質を失わない程度にかなりの單純化を行う必要がある。以下ではゲームの種類及び状況を次のように考えよう。

(i) ゲームはA・B二人で行う。

(ii) 各人はそれぞれ(+)・(-)二つの手があり、Aが(+), Bが(+)
出すか、又はAが(-), Bが(-)を出した時はAが勝ち、両方の出す手が違つた時はBが勝つというように勝負の規則を定めておく、又利益はどちらも同じく1とする。さてゲームを行いながらn回まで来たとき、n回目にAが(+)でBが(+)を出す確率を $\frac{1}{3}$ 、Aが(+), Bが(-)を出す確率を $\frac{1}{3}$ 、Aが(-), Bが(+)
を出す確率を $\frac{1}{3}$ 、Aが(-), Bが(-)を出す確率を $\frac{1}{3}$ 、など、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{3}$ を定義する。更にAが(+)から(+)へ移り同時にBが(+)の次に又(+)

を出す確率を $\begin{matrix} A \\ + \\ + \\ + \end{matrix}$ 又 A が (+) から (-) へ移る確率を $\begin{matrix} A \\ + \\ + \\ + \end{matrix}$ とし、同じように 16 の遷移確率を定義する。(以下 A, B がびしるしは省略する。) これは個性及び戦略の両方を含んだ行動を表わすものと見做すことが出来る。(この分離は後に行う。) そこで $\begin{matrix} + \\ + \\ + \end{matrix}$ 回目二人の状態は n 回目の状態と遷移確率だけで決定されるとすると、ゲームは単純なマルコフの過程を形成する。この様なゲームはノイマン・モルゲンシュテルン、マッキンゼーに於いて「Information set」という考えの中に含まれているものであるが、(1) では更にこれを發展させることが出来る。簡単な確率論の考察によって、 $n+1$ 回目の状態は n 回目の状態と、次の線型な関係によって結びつけられる。

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \begin{matrix} \{ \\ + \\ + \end{matrix} &= \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ + \\ + \end{matrix} \} + \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ + \\ - \end{matrix} \} + \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ - \\ + \end{matrix} \} \\ \begin{matrix} \{ \\ + \\ - \end{matrix} &+ \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ - \\ + \end{matrix} \} \\ \begin{matrix} \{ \\ - \\ + \end{matrix} &+ \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ - \\ - \end{matrix} \} \end{aligned} \right\} + \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ + \\ + \end{matrix} \} + \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ + \\ - \end{matrix} \} + \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ - \\ + \end{matrix} \} + \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ - \\ - \end{matrix} \} \\ \left. \begin{aligned} \begin{matrix} \{ \\ + \\ + \end{matrix} &= \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ + \\ + \end{matrix} \} + \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ + \\ - \end{matrix} \} + \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ - \\ + \end{matrix} \} + \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ - \\ - \end{matrix} \} \\ \begin{matrix} \{ \\ + \\ - \end{matrix} &+ \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ - \\ + \end{matrix} \} \\ \begin{matrix} \{ \\ - \\ + \end{matrix} &+ \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ - \\ - \end{matrix} \} \end{aligned} \right\} + \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ + \\ + \end{matrix} \} + \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ + \\ - \end{matrix} \} + \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ - \\ + \end{matrix} \} + \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ - \\ - \end{matrix} \} \\ \left. \begin{aligned} \begin{matrix} \{ \\ + \\ + \end{matrix} &= \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ + \\ + \end{matrix} \} + \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ + \\ - \end{matrix} \} + \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ - \\ + \end{matrix} \} + \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ - \\ - \end{matrix} \} \\ \begin{matrix} \{ \\ + \\ - \end{matrix} &+ \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ - \\ + \end{matrix} \} \\ \begin{matrix} \{ \\ - \\ + \end{matrix} &+ \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ - \\ - \end{matrix} \} \end{aligned} \right\} + \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ + \\ + \end{matrix} \} + \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ + \\ - \end{matrix} \} + \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ - \\ + \end{matrix} \} + \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ - \\ - \end{matrix} \} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \begin{matrix} \{ \\ + \\ + \end{matrix} &= \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ + \\ + \end{matrix} \} + \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ + \\ - \end{matrix} \} + \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ - \\ + \end{matrix} \} + \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ - \\ - \end{matrix} \} \\ \begin{matrix} \{ \\ + \\ - \end{matrix} &+ \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ - \\ + \end{matrix} \} \\ \begin{matrix} \{ \\ - \\ + \end{matrix} &+ \varphi_n \begin{matrix} \{ \\ - \\ - \end{matrix} \} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \tag{2}$$

或いは $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を四元ベクトルとして (1) の右邊の係数のマトリックス (遷移マトリックス) を K とすれば (1) は

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{n+1} = K \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_n \tag{2}$$

という形に書ける。ゲームをはじめる時の状態を $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とすると、(2) から

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_n = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} K^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{3}$$

となり、 n 回目の状態は最初の状態が與えられれば定まることになる。これを解くには、 K をシルベスターの定義によって展開し、 n の充分大きな値に對しては最大固有値 (この場合は 1) に對應する項のみを取ればよい。

三 遷移マトリックスの成分についての考察

吾々はここで今一度、このゲームの特色について考えてみよう。以上のようなゲームにどの程度「個性」と「戦略」を入れることが出来るであろうか。最も簡単な場合は、A・B 両方も「個性」のみで行動し相手の手に何等無關心の場合でこれはあまり意味はないが、その時の計算には遷移成分は

$$\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} = (aa)(bb) \quad (a, a, b, b = + \text{ 又は } -)$$

$$S^{\text{pure}} = \frac{12}{18}$$

となり、これは第一次の純粹戦略と同じ勝率である。

四 結 論

以上の議論によって純粹戦略と混合戦略を比較すると同じ次數の場合には純粹戦略が勝率のないことがわかる。又異なる次數の間の優劣を比較すると、二次の純粹戦略は常に優れているが、二次の混合戦略は一次の純粹戦略よりよい場合と悪い場合とがある。しかし純粹戦略は相手に知られる(ここでは考えない)恐れがある故、同じ勝率を得る爲ならば適當な二次の混合戦略を用いた方がよい場合があることを示した。

この種のゲームに於て、相手にこちらの出し方を知られない爲には、なるべくこちらの手を at random に出せばよいわけだ、純粹戦略との中間のどこに持って来たらよいかということとは、結局、こちらの「戦略」(こちらの手の時系列)の含む「Information」(情報量)をなるべく小さくして、しかも勝率を最大にするような「戦略」を決定するという問題になるがこれについての考察は後の機会に述べたいと思う。

以上と同様に時間的に経過するゲーム乃至計畫論の問題は最近 R. Bellman, L. S. Shapley によって別な觀點から發展されてきているが、これについても別の機会にゆずりたいと思う。この小論は先に O・R 委員会で行った報告をまとめたものである。

文 献

- 註 1 V. Neuman, O. Morgenstern
 "Theory of Games and Economic Behavior" p. 78 J.
 C. C. McKinsey
 "Introduction to the Theory of Games" p. 119
 註 2 例へば Trazer, Cairns "Elementary Matrices"
 (1940)
 註 3 R. Bellman, Proc. National Academy of Science
 Vol 38 (1952) 716
 " " " " Vol 39 (1953) 298
 " " " " Vol 39 (1953) 947
 R. Bellman *Econometrica* Vol 21 (1954) No. 1.
 註 4 L. S. Shapley Proc. Nat. Acad. Sci. Vol. 40. (1954)
 註 5 片岡信二「オペンレシヨシリサーチ」日本科学技術連
 盟第1巻2號(一九五四)
 " " 「動的計畫論」O・R資料23號