

統計的システム論に関する一考察

片岡 信二

目次

はしがき

一 システムの定義

二 確率とエントロピー

三 統計的システム論

四 統計的システム論と所得分布曲線

はしがき

筆者は、さきに提出した小論⁽¹⁾において、多数の行動主体の集団の統計的、確率的記述方法の一試案について述べたが、本論文ではさらにこれを一般化した形で展開したいと思う。ここでわれわれの準拠する基本的な考え方はつぎのようなものである。

統計的システム論に関する一考察

物質の物理的性質を説明する理論に統計力学がある。これは物質を構成する粒子（原子、分子）の個々の運動を記述する運動方程式を解いて、全体の性質を説明するという方向を諦め、逆に粒子が非常に多数であるということを利用して、粒子の集団の統計的、確率的法則を単純化された形で導き出すという考え方でつくられている。そしてこれは、物質の巨視的性質を現象論的に記述する理論体系である熱力学の諸法則を、実に明快に導出し、さらに熱力学では到達し得なかった現代物性論の基礎を築いたのである。⁽²⁾

さてこのような統計力学を行動主体の集団の行動理論として見直すことができないか、というのがわれわれの発想の原点である。すなわち、統計力学から完全に「物質」という要素を取り除いて、抽象的な「システム」というもので置き換え、可能な限り一般化、抽象化したとき、どのような理論体系が得られるかということを本論文で試みることにする。なおこの観点から都市交通に関する研究も最近行なわれており、⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾このような非正統的な考え方が必ずしも筆者の独善とばかりはいえないようである。

一 システムの定義

これまで「システム」に関する定義は実に多く提出されており、必ずしも定着してはいないが、本論では相互関連をもつ人ないものの集合体で、ある内部構造をもつものと定義し、さらにつぎのような性質をもつものとする。

(一) システムの内部構造はいくつかの確率変数と外部から与えられるパラメーターによって記述される。前者をミクロ状態変数、後者を外生パラメーターとよぶ。

(二) ミクロ状態変数のとることのできる値(実現値)は、外生パラメーターの一部によって変動を受けることがある。
(三) 内部構造にはミクロ状態変数のとることのできる値の組合わせによって記述される、有限個ないしは無限個のミクロ状態があり、それぞれにいくつかのミクロ状態関数が付随している。

(四) 一つのシステムは他のシステムと相互に影響を及ぼし合う。これを相互作用とよぶ。システムは他システムとの相互作用によってミクロ状態間の遷移を行なう。

(五) 以上のように定義したシステムをいくつか集めたシステム集団も一つのシステムであり、これについても同様なことが定義できる。

(六) 非常に多くのシステムからなるシステム集団によって一つのシステムが囲まれて相互作用を行なっているとき、前者を後者の環境システムとよぶ。

(七) ミクロ状態変数の確率分布が何等かの方法で与えられたとき、ミクロ状態関数の期待値をそのシステムのマクロ状態量、あるいは単に状態量とよぶ。

以上のような抽象的な定義を少し具体的にするために、サイコロを例にとろう。サイコロは正六面体という物理的な内部構造をもち、それは「目の数」というミクロ状態変数によって記述され、6個のミクロ状態をとる。いまこのサイコロを振って目の数だけの品物を獲得するというゲームがあると、実際に利得は(目の数) $\times$ (品物の単価)となり、このとき各試行の利得がミクロ状態関数であり、品物の価格が外生パラメーターである。また、各試行の利得

の期待値がマクロ状態量となる。

つぎにシステムの上記定義を数学的記号を用いて、もう少し精密化しておこう。

つぎのようなシステムを $\mathcal{S}$ とよぶ。

(一) $\mathcal{S}$ には n 個のミクロ状態変数 $u_1, u_2, \dots, u_n$ があり、 u_r ($r=1, 2, \dots, n$) のとることのできる値は、 $u_r^1, u_r^2, \dots, u_r^{t_r}$ の t_r 個であるとする。なお以下の議論においては、話を単純化するためにミクロ状態変数のとることのできる値は不連続で、個数は有限であるとして話を進めてゆき、必要な段階で連続なモデルに変えることにする。

(二) ミクロ状態変数ベクトル

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

(三) $1 \leq i_1 \leq t_1, \dots, 1 \leq i_n \leq t_n$ となるすべての順列 $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ の集合を I として、ミクロ状態ベクトル

$$u^i = (u_{i_1}^{i_1}, u_{i_2}^{i_2}, \dots, u_{i_n}^{i_n}) \quad i \in I$$

と定義する。

(四) s 個の外生パラメーター $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ から、外生パラメーター・ベクトルを

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$$

とする。 λ のなかには $u^i(\lambda)$ となってミクロ状態変数を変えるものもある。

(五) m 個のミクロ状態関数 $f_k(u, \lambda)$ ($k=1, 2, \dots, m$) があり、ベクトル

$$f(u, \lambda) = (f_1(u, \lambda), f_2(u, \lambda), \dots, f_m(u, \lambda))$$

を定義する。

(六) ミクロ状態変数ベクトル u が u^i という値をとる確率を

$$\begin{aligned}\pi_i &\equiv \text{Prob}(u_1 = u_1^i, u_2 = u_2^i, \dots, u_n = u_n^i) \\ &\equiv \text{Prob}(u = u^i) \quad i \in I\end{aligned}$$

と表わす。以下の議論で π_i が u^i や λ によってどのように実際に表現されるかが問題となる。

二 確率とエントロピー

近年エントロピーなる用語が物理学以外の他方面で用いられるようになったが、その生い立ちは、一八六五年頃熱力学の創始者クラウジウス (R. J. E. Clausius) がギリシア語の *τρεπτή* (変化) から造ったときに始まる。クラウジウスは熱力学の第二法則を定式化する過程で見出し、その後ボルツマン (L. Boltzmann)、プランク (M. Planck)、ギブス (J. W. Gibbs) 等による統計力学において確率論との関係が明らかにされ、さらに近年シャノン (C. E. Shannon) によって情報理論⁽⁸⁾の中に導入された概念である。本論ではこの概念の発展過程を詳述することはできないが、議論を進める過程において時折ふれてゆくことにする。

さてシステム $\mathcal{S}$ と同等な N 個のシステムの集団を $\mathcal{E}$ とし、 $\mathcal{E}$ はさらに環境システムの影響を受けて、いろいろ複雑な内部構造のミクロ状態の遷移を行なっているとしよう。このとき、相互作用をしはじめてから十分時間の経過した後のある時刻をとって $\mathcal{E}$ のなかの各システム $\mathcal{S}$ をしらべたところ、 n_i 個のシステムがミクロ状態 i にあるとき、シス

テム $\mathcal{G}$ のアプリオリのミクロ状態の確率 π_i は

$$\pi_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i}{N}$$

と与えられる。⁽⁹⁾そこで $\mathcal{G}$ のなかの N 個のシステムを $n_1, n_2, \dots, n_i, \dots$ と、各ミクロ状態に落ちる数に分けると、 $\mathcal{G}$ にとってそのようなミクロ状態の起こる確率は、

$$W = \frac{N!}{\prod_i n_i!} \quad (2.1)$$

ただし、

$$\sum_i n_i = N \quad (2.2)$$

となるような W に比例する。ボルツマン・プランクは熱力学と統計力学の接点に位置する量としてエントロピーをとり上げ、これを

$$\text{エントロピー} \propto \log W \quad (2.3)$$

という関係式を発見し、これから有名なエネルギー分布則を見出した。本論文では後述のシャノンによる情報理論のエントロピーの表現形式を用いるため、 $\mathcal{G}$ のなかの一システム当たりのエントロピーを

$$\Theta = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log W}{N} \quad (2.4)$$

と定義することにした。

(2.1) と (2.4) から

$$\theta = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \frac{N!}{\prod_i n_i!} \quad (2.5)$$

となるがスターリングの公式の第一近似を用いると、正整数 x の大きな値に対して

$$\log x! = x \log x - x$$

であるから、これを適用して、

$$\theta = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} (N \log N - N) - \sum_i \left(n_i \log n_i - n_i \right) \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(- \sum_i \frac{n_i}{N} \log \frac{n_i}{N} \right) = - \sum_i \pi_i \log \pi_i \quad (2.6)$$

となる。これはシャノンが提出した情報理論における「いくつかのミクロ状態を持つ情報源の情報量」として定義されているものである。これはそのシステムがどの状態にあるか不確かなほど、すなわち不確性が大きければ大きいほど、システムの情報量は大きくなるという性質をもっている。ところで、システムのエントロピーは、未知のシステム集団の状態が、一番起こりやすい状態であるとき、(サイコロを五個振って全部同じ目が出るなどというのは起こり難い状態であって、いろいろな目が適当に入り混って、特徴のない目の組合わせというのは起こりやすい状態である) エントロピーは最大となる。したがって情報理論と統計力学では同じことを表と裏から見ているに過ぎない。そこで、われわれは非常に多くのシステムの集団において到達される状態というのは、もっとも確からしい状態、一番

平凡な状態なのであるという、エントロピー最大原理を基本法則に置くことにしよう。そして、エントロピーが最大になっている状態をそのシステムの均衡状態とよぶことにする。

三 統計的システム論

すでに定義されたシステム⑤に関するいくつかの記号を用いて、以下本題である統計的システム論を展開してゆく。⁽¹⁰⁾

マイクロ状態関数 $f_k(u, \lambda)$ の状態確率 π_k による期待値

$$E[f_k(u, \lambda)] = \sum_{i \in I} \pi_i f_k(u_i, \lambda) = \varphi_k \quad (3.1)$$

と定義する。またベクトル φ を

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$$

とし、これをマクロ状態量ベクトルないしは単に状態量ベクトルとよぶことにする。これは外生パラメーター λ の関数であることはいうまでもない。

さて環境システムのなかに置かれたシステム⑤に対して状態量 φ_k ($k=1, 2, \dots, m$) が与えられた値になるように制約をつけながら、しかももっとも起こりやすい状態、すなわちエントロピー最大となるような状態確率 π_k を求める問題を考えてみよう。これは

$$\sum_{i \in I} \pi_i = 1 \quad (3.2)$$

$$\sum_{i \in I} \pi_i f_k(u^i, \lambda) = q_k \quad (3.3)$$

$$\pi_i \geq 0 \quad (3.4)$$

の条件のもとで

$$\text{maximize } \theta = - \sum_{i \in I} \pi_i \log \pi_i \quad (3.5)$$

とすることができよう。ところで容易にわかるように、 θ は π_i に関する凹関数であり、条件式は線形であるから、この非線形計画問題は唯一つの最適解をもつことがわかる。そこで (3.2) と (3.3) のラグランジュ乗数を $\beta_0^*, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ としてラグランジュ関数

$$L = - \sum_i \pi_i \left[\log \pi_i + \beta_0^* + \sum_{k=1}^m \beta_k f_k(u^i, \lambda) \right] \quad (3.6)$$

をつくり、 π_i で偏微分すると

$$\frac{\partial L}{\partial \pi_i} = - \left[\log \pi_i + 1 + \beta_0^* + \sum_{k=1}^m \beta_k f_k(u^i, \lambda) \right] = 0$$

となる。 π_i の最適解を p_i 、 $\beta_0 = 1 + \beta_0^*$ とする。

$$p_i = \exp \left[- \left\{ \beta_0 + \sum_k \beta_k f_k(u^i, \lambda) \right\} \right] = \exp(-\beta_0) \exp(-\beta_j^*(u^i, \lambda)) \quad (3.7)$$

となる。 β はベクトル

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$$

であり、 $f(u^i, \lambda)$ は行ベクトル $f(u^i, \lambda)$ を転置して列ベクトルに直すことを意味する。また、 p_i が確率であることから (3.2) に代入すると、

$$\sum_{i \in I} p_i = \exp(-\beta^0) \sum_{i \in I} \exp[-\beta f'(u^i, \lambda)] = 1$$

となり

$$\exp(\beta^0) = Z = \sum_{i \in I} [-\beta f'(u^i, \lambda)] \quad (3.8)$$

とおくと、結局

$$p_i = \frac{1}{Z} \exp[-\beta f'(u^i, \lambda)] \quad (3.9)$$

が得られる。

(3.8) によって定義された Z を統計力学に従って分配関数とよぶことにすると、これから

$$-\frac{\partial}{\partial \beta_k} \log Z = -\frac{1}{Z} \sum_i [-f_k(u^i, \lambda)] \exp[-\beta f'(u^i, \lambda)] = \sum_i p_i f_k(u^i, \lambda) = \varphi_k \quad (k=1, 2, \dots, m) \quad (3.10)$$

となり、再びマクロ状態量 φ_k が得られる。この式は $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ が与えられたとき、均衡状態における m 個のランジュ乗数 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ を求めるための m 本の方程式を意味している。また $\phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ を用いる

と (3.10) 12

$$-\frac{\partial \log Z}{\partial \beta} = \varphi \quad (3.11)$$

と書くことが出来る。13)

$$\frac{\partial \log Z}{\partial \beta} = \left(\frac{\partial \log Z}{\partial \beta_1}, \dots, \frac{\partial \log Z}{\partial \beta_m} \right)$$

である。つぎに p_i に対して (3.9) を用いて、これを均衡状態におけるエントロピー S に代入すると

$$S = - \sum_i p_i \log p_i = - \sum_i \frac{1}{Z} \exp \{ -\beta f'(u^i, \lambda) \} [-\beta f'(u^i, \lambda) - \log Z] = \beta \varphi' + \log Z \quad (3.12)$$

と書き表わされる。

また最適値問題 (3.2) ~ (3.5) において、条件式のラグランジュ乗数 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ は均衡状態においては

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi_k} = \beta_k, \quad \text{また一般に} \quad \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \beta \quad (3.13)$$

という関係があることは、最適値問題でよく知られていることである。すなわち β_k は均衡状態において制約となつてゐるマクロ状態量 φ_k を一単位増加するときのエントロピーの増加分になっている。

さて全体系において導入された変数は β (m 個)、 φ (m 個)、 S (一個)、 Z (一個) であるが、このうち独立にきめられるのは m 個と外生パラメーター λ である。そこでいま β と λ とを独立変数にとり、つぎのような式の変形を行

なってみよう。まずベクトル ϕ の全微分をとって

$$d\phi' = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right)' d\beta + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \right)' d\lambda \quad (3.14)$$

に、

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right)'_{k,i} = \frac{\partial \phi_k}{\partial \beta_i}, \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \right)'_{k,j} = \frac{\partial \phi_k}{\partial \lambda_j} \quad (3.15)$$

となる行列であり、また $d\beta', d\lambda'$ は列ベクトルで

$$d\beta' = (d\beta_1, \dots, d\beta_m)',$$

$$d\lambda' = (d\lambda_1, \dots, d\lambda_n)'$$

である。

また $\log Z$ の全微分をとると

$$d \log Z = \frac{\partial \log Z}{\partial \beta} d\beta' + \frac{\partial \log Z}{\partial \lambda} d\lambda' \quad (3.16)$$

となる。これに (3.11) を代入すると、

$$d \log Z = -\phi d\beta' + \frac{\partial \log Z}{\partial \lambda} d\lambda' \quad (3.17)$$

をうる。そこで (3.14)', (3.17) を用いて次のように変形する。

$$\begin{aligned}
\beta d\varphi' + \frac{\partial \log Z}{\partial \lambda} d\lambda' &= \beta \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right) d\beta + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right) d\lambda' \right\} + \frac{\partial \log Z}{\partial \lambda} d\lambda' = \beta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right) d\beta + \beta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right) d\lambda' + \varphi d\beta + d \log Z \\
&= \left(\frac{\partial(\beta \varphi')}{\partial \beta} \right) d\beta' + \left(\frac{\partial(\beta \varphi')}{\partial \lambda} \right) d\lambda' + d \log Z = d(\beta \varphi' + \log Z) = dS
\end{aligned}$$

すなわち、

$$dS = \beta \varphi' + \frac{\partial \log Z}{\partial \lambda} d\lambda' \quad (3 \cdot 18)$$

という関係が得られる。この左辺をもう少し変形するために、 λ の元素 λ_i での微分を考えると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log Z}{\partial \lambda_j} &= \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \lambda_j} = \frac{1}{Z} \sum_i \left\{ - \sum_k \beta_k \frac{\partial f_k^i}{\partial \lambda_j} \right\} \exp \left(- \sum_k \beta_k f_k(u^i, \lambda) \right) \\
&= \sum_i \left\{ - \sum_k \beta_k \frac{\partial f_k^i}{\partial \lambda_j} p_k \right\} = - \sum_k \beta_k \left\{ \sum_i \frac{\partial f_k^i}{\partial \lambda_j} p_k \right\} = - \sum_k \beta_k \frac{\partial f_k}{\partial \lambda_j}
\end{aligned}$$

となる。ここに $\bar{p}_k$ は平均値を現わす。したがって、

$$\frac{\partial \log Z}{\partial \lambda} d\lambda' = - \sum_k \beta_k \sum_j \frac{\partial f_k}{\partial \lambda_j} d\lambda_j = - \beta \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right) d\lambda' \quad (3 \cdot 19)$$

と書くことができる。ここに $\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)$ は

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)_{k,j} = \frac{\partial f_k}{\partial \lambda_j}$$

統計的システム論に関する一考察

という行列である。この行列を (F) で表わすと (3.18) は、

$$dS = \beta(d\phi' - (F)d\lambda) \quad (3.20)$$

と表わされることになる。

いま二組の (β, λ) の値 (β^1, λ^1) (β^2, λ^2) で指定されるシステムの状態を $\sum^1, \sum^2$ で表わし、(3.20) を $\sum^1$ から $\sum^2$ まで積分を行なうと、

$$S^2 - S^1 = \int_{\sum^1}^{\sum^2} \beta(d\phi' - (F)d\lambda) \quad (3.21)$$

となる。左辺は $\sum^2$ と $\sum^1$ の二つの状態におけるエントロピーの差であり、これは $\sum^1$ から $\sum^2$ へ行く途中の道筋には無関係の量である。したがって左辺も同じ性質を持つ量となり、数学的にいえば、

$$\partial Q = d\phi' - (F)d\lambda$$

と置いたとき、 ∂Q 自身は完全微分形とはならないが、 β をかけることによって完全微分形となる、ということになる（これは β が積分因子であることを示すものである）。

そこで (3.21) のシステム論的な意味をつけるのが重要な仕事となるが、それを行なう前に、物理学の簡単な例によってこの式の意味をまずつけてみよう。いまシステム⑥として多数の分子からなる気体を取り、これが熱浴（環境システム）のなかにあるとき、上記の諸量はどのような物理量に対応するかを述べよう。詳細は統計力学の教課書にあるので、変数、関数、記号の対応と結果だけを書くところの表のようになる。

シ ス テ ム ⑥	体積 V のなかの気体分子
ミクロ状態変数 n (=ミクロ状態関数)	分子の運動エネルギー
外生パラメーター λ	体積 V
ラグランジュ乗数 β	気体を囲む熱浴の温度 T の逆数 $\frac{1}{T}$
マ ク ロ 状 態 量 φ	気体の内部エネルギー U
$\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right) = (F)$	気体の圧力 P
$(F)d\lambda'$	圧力に抗して気体になした仕事 $-PdV$
$\partial Q = d\varphi' - (F)d\lambda'$	dV, dT だけ変化したときの気体の得た熱エネルギー $\partial Q = dU + PdV$
$\beta \partial Q = dS$	同上のエントロピーの増加分 $\frac{\partial Q}{T} = dS$

さて右のような、統計力学ないしは熱力学における変数や状態量の解釈を統計的システム論に並行的に用いることができる。とすればどのようなかを示してみよう。以下()で囲んだ物理用語は抽象的な意味で用いていることを意味する。

φ (内部エネルギー)、 β (温度の逆数)、

S (エントロピー)、 (F) (変位 λ に対する抵抗力)、

λ (変位)

$d\varphi, d\beta, d\lambda$ なる (温度変化) と (変位) によるシステムの

(内部エネルギー) の増加分。

$(F)d\lambda'$ システムの (抵抗力) に抗して $d\lambda'$ だけ (変位) する

ことによってシステムに外から与えられた (エネルギー)。

$\partial Q = d\varphi' - (F)d\lambda'$ (温度変化)、(変位) によってシステムの

状態に変化が起こりシステムが (熱) として吸収した (エ

ネルギー)。

以上のように考えてみると、

$$\int_{S^1} dS = S^2 - S^1 = \int_{S^1} p dQ$$

は熱力学の第二法則を一般化したものと形式的に同等となり、統計的システム論における（熱機関）というものであることができるが、これら抽象的熱力学についてはいずれ稿をあらためて述べることにする。

四 統計的システム論と所得分布曲線

最後にわれわれは、個人をシステム⑤と考えて所得分布曲線を求めることに、統計的システム論を適用してみよう（個人の集団をシステムとしても同じことである）。すなわち、⑤が所得水準 u^1 となる確率 π_1 をもっとも確からしい値に定めようとするのが本節の仕事であるが、ここで一つ問題がある。所得分布曲線についてはすでに古くからバレット（V. F. D. Pareto）やジブラ（R. Gibrat）の研究があり、とくにジブラ分布がよく成り立つことが経験法則として知られている。⁽¹¹⁾したがって、もっとも確からしい分布がジブラ分布になるように統計的システム論における条件を逆に設定するという方向で問題を考えた方がより生産的である。

さてシステム⑤のミクロ状態関数 $f_1(u^1)$ 、 $f_2(u^2)$ を所得水準 u_i に対して、

$$f_1(u^1) = \log u^1 \quad (4.1)$$

$$f_2(u^2) = (\log u^2)^2 \quad (4.2)$$

ととる。もちろんこれは後でジブラ分布を導出するための技巧ではあるが、あえてスペキュレートすれば、ベルヌイ

(D. Bernoulli) も示しているように⁽¹⁷⁾、所得 u の価値を決めるものは金額そのものではなく、その効用である。ベルヌイは効用関数として $\log u$ を提示しているのでこれを用い、システム $\mathcal{G}$ は外界とこのような効用を交換し合つて均衡状態にあると考えることができる。

こうすることによつてマイクロ状態量 $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ は

$$\varphi_1 = \sum_i \pi_i \log u_i^*, \quad \varphi_2 = \sum_i \pi_i (\log u_i^*)^2 \quad (4.3)$$

となり、上の条件式のもとでエントロピー最大とする確率 π_i は (3.7) により、

$$p_i = \exp | -\beta_0 - \beta_1 (\log u_i^*) - \beta_2 (\log u_i^*)^2 | = \frac{1}{Z} \exp | -\beta_1 (\log u_i^*) - \beta_2 (\log u_i^*)^2 | \quad (4.4)$$

$$Z = \sum_i \exp | -\beta_1 (\log u_i^*) - \beta_2 (\log u_i^*)^2 | \quad (4.5)$$

となる。 $\log u = x$ と置くと

$$\exp (-\beta_1 x - \beta_2 x^2) = \exp \left(\frac{\beta_1^2}{4\beta_2} \right) \sqrt{\frac{\pi}{\beta_2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (4.6)$$

より、

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{2\beta_2}, \quad \beta_1 = -\frac{m}{\sigma^2} \\ m &= -\frac{\beta_1}{2\beta_2}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2\sigma^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

となる。そこで x ($i=1, 2, \dots$) が (4.5) において一様に、しかも十分密に並ぶように、ミクロ状態変数 u ($i=1, 2, \dots$) が分布しているとすると、 o を u の密度を表わす定数として、(4.5) の和を積分で近似して、

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta_1 x - \beta_2 x^2) o dx = o \exp\left(\frac{\beta_1^2}{4\beta_2}\right) \sqrt{\frac{\pi}{\beta_2}} \quad (4.8)$$

となり、 x が x と $x+dx$ の間にある確率は

$$p(x)dx = \frac{1}{Z} \exp(-\beta_1 x - \beta_2 x^2) o dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \quad (4.9)$$

となる。ここで $x = \log z$ と置けばジブラの対数正規分布が得られる。なおマクロ状態量 φ_1 , φ_2 と m , σ^2 , β_1 , β_2 との関係は

$$\varphi_1 = m, \quad \varphi_2 = \sigma^2 + m^2, \quad \beta_1 = \frac{\varphi_1}{\varphi_1^2 - \varphi_2}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2(\mu_2 - \mu_1^2)} \quad (4.10)$$

である。

すでに述べたように、この問題の興味は、ジブラ分布を導出することよりも、(4.3) のような制約でエントロピーの最大化を行なって得られたものが、経験法則に合致しているということがわかったとき、(4.7)、(4.10) で所得の対数の平均 m 、分散 σ^2 と関係づけられた β_1 , β_2 がそれぞれ異なるシステムと比較して、上では導入しなかった外生パラメーターとして物価その他の要因を考慮したとき、システム⑥の分布がどのように変るかを理論的に探る手掛りを与えるのではないかと考えられるのである。

- (1) 片岡信二『経済現象における最大原理』一橋論叢、三二巻三号、一九五四。
- (2) たとえば、伏見康治編『量子統計力学』共立出版、一九四八年。
- (3) A. G. Wilson, "The Use of the Concept of Entropy in System Modelling," *Operations Research Quarterly*, vol. 21, 1970, pp. 247-265, (England).
- (4) D. G. Cough, "Application of the Principle of Maximizing Entropy in the Formulation of Hypothesis," *Canadian Operations Research Society Journal*, vol. 2, 1964, pp. 53-70.
- (5) A. G. Wilson, "Calibration and Testing of the SELNEC Transport Model," *Regional Studies*, vol. 3, 1969, pp. 337-350, (England).
- (6) R. E. Murphy, Jr., *Adaptive Processes in Economic Systems*, Academic Press, 1965. (小野勝草訳「経済シメナと適応過程」コロナ社)
- (7) 清水義夫「不確実性と経済均衡」春秋社、一九六八。
- (8) C. E. Shannon, W. Weaver, *The Mathematical Theory of Communication* The University of Illinois Press, 1948.
- (9) 一つのシステム⑤を今度は十分長い時間追跡して調べ、ミクロ状態 i にあった時間の総和を n_i とするととき

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n_i}{T} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i}{N} = \pi_i$$
- (10) ここでつぎのものを参考にした。

統計的システム論に関する一考察

E. T. Jaynes, "Information Theory and Statistical Mechanics," Physical Review, vol. 106, pp. 620-630.

A. I. Khinchin, *Mathematical Foundation of Statistical Mechanics*, translated by G. Gamov, Dover Publication, Inc., New York, 1949

(11) 高橋長太郎「所得分布の変動様式」岩波書店、一九五五。

(21) D. E. Farrar, *The Investment Decision Under Uncertainty*, Prentice-Hall, Inc., 1962, p. 22.

(昭和四七年十二月一六日 受理)