

産業連關の理論に關する一研究

荒 憲 治 郎

I 産業部門の連結と行列乗數

- (1) 投入・產出表
- (2) 行列乗數の性質
- (3) 體系の完全連結性

II 資本の構造と行列加速度

- (1) 資本蓄積の巨視分析
- (2) 資本の構造と行列加速度
- (3) 行列乗數と行列加速度の結合體系
- (4) 動學的安定條件

III 變動過程の部門分析

- (1) 經濟成長の構造模型

産業連關の理論に關する一研究

- (2) ポットル・ネックと景氣の崩潰
- (3) 遊休生産能力と景氣の回復
- (4) 模型の擴張—殘された問題

序 説

ケインズの「一般理論」が公刊せられて以來、國民經濟の全體としての運動を國民所得の消長によつて分析せんとする立場、即ち所得分析の方法は廣く一般的な承認をうけ、此の二十年間に目覺ましい理論的成果を蓄積してきた。

多くの人々が認めているように、凡ゆる二重計算を相殺して得られる純計としての國民所得概念は、經濟の總過程において結局どれだけの國民純生産物が生産されたかということを明示する意味では、確かに國民經濟活動の綜合的指標たり得るものである。而も、複雑な産業交流の事情を抜きにした純計を取扱うことの故に、極めて operational であるという利點を享受している。 $S(Y) = I(Y)$ によつてケインズ體系の精髓を傳えんとする立場は、その可否を別にしても、單純平明さにおいて他の如何なる理論もその比ではない。浩瀚なシェリングの靜學分析をはじめ、ヒックス・ハンセン・ハロッドなどの經濟變動分析に關する最近の夥しい業績は、その内容に多くの差異はあつても、國民所得を中心とする分析であることでは軌を一にしているのである。

しかし、かかる巨視的な所得分析には、國民經濟の構造的側面の無視という點に關し、分析の最初から本質的制約が存在している。一體吾々は、發展産業と衰退産業を相互に平均した國民所得の成長率より、國民經濟の構造に關し

て如何なる知識を得ることが出来るであらうか。又、一口に資本形式と言ってもそれは質的に異なる多くの産業部門において行われるのであつて、所得分析では、それらを凡て同質的數量として集計してこそ始めて意義をもつのである。しかし、資本形成がどの産業部門にどれ程行われるかによりその國民經濟に及ぼす効果も自から異り、延いては國民所得の水準にも發言權をもつに至るであらう。

此の論稿の目的は、所得分析では殆んど省みられることのなかつた經濟構造の問題を、産業部門の相互依存關係という側面から分析することである。勿論、經濟學は、特に *anaitic engine* に關しては日進月歩を遂げているのであるから、長い間經濟學者の關心であつた經濟構造の分析も、單なる過去への復歸では無意味である。殊に、所得分析で磨きあげられてきた乗數の理論と加速度原理は、變動過程の有效な分析用具として武器庫に收められたのであり、今日では、これを忘却の彼方に追ひやることは殆ど不可能である。吾々は以下において、所得分析の理論的成果を利用しつつ、最近漸くにして研究の緒についた産業連關の理論の若干問題について、分析を進めたいと思う。⁽¹⁾

(1) 吾々の分析の基礎となるのは、レオンチフェの二巻の著書

W. Leontief. *The Structure of American Economy*, 1919—1939, 1951.

” *Studies in the Structure of the American Economy*, 1953.

である。前著は經濟構造の靜學分析が主要内容であり、後著において始めて、資本蓄積の動學分析がとりあげられた。しかしレオンチフェの主たる關心は、一般均衡理論のシェーマを數量的計測が可能となるように鍛えあげることであり、經濟理論という觀點からは、吾々の要求をみたす所は甚だ少いのである。そして、この方向に決定的一步を踏み出したのは、グッドウィ

ンとナツプマンであつた。

R. Goodwin, "The Multiplier as Matrix," *Econ. Journal*, 1949, Dec., pp. 537—555.

J. Chipman, "The Multi-Sector Multiplier," *Econometrica*, 1950, Oct., pp. 355—374.

しかし、そこでは未だ、資本蓄積の問題は不問のまゝに残されており、單に行列乗數の理論が展開されているにすぎない。

Ⅰ 産業部門の連結と行列乗數

(1) 投入・産出表

今、 n 個の産業部門が存在すると假定しよう。勿論、いかなる部門を構成すべきかはその時々の問題提出の性質に依存する。例えばマルクスの場合には生産手段生産部門と消費資料生産部門の二部門構成が問題であり、ベームハインクの場合には生産の時間的配列に従う直線進行的産業構造の模型が分析の對象となる。ここでは、これら n 個の部門は、集計の手續きにより n 個よりも少い部門に統合することが、無意味な結論に導く程に異質的であることを指摘すれば充分であらう。⁽¹⁾

これら n 個の産業部門の間には、財貨又は役の需要供給をめぐつて、種々の關係が存在する。今、ある時點の物價體系で計測された第 i 部門の生産量を y_i 、第 i 部門より第 j 部門への流量、flowとして考えられた供給量を y_{ij} 、第 i 部門の生産量の中、これら n 個の部門のいずれかの貯藏量、stockと考えられる部分又はこの體系の外部に販賣される部分（以下では簡單に第 i 部門に對する最終財需要と呼ぶ）を z_i とで示す。ここに體系の外部とは、例えば輸出の如く、

再生産過程からは脱漏し、その産出量が再びこの體系の産業部門の投入量とはならない部分を謂う。若し、勞働力の再生産が直接吾々の關心とならなければ、勞働者家計の消費支出項目は體系外部への販賣量と看做される。

以上の記號の約束の下で、定義的に次式の成立することは自明であらう。

$$(1.1) \quad y_i = y_{i1} + y_{i2} + \dots + y_{in} + \xi_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

即ち、各産業部門の産出量は、體系内部の産業部門に配分されるか、又は體系外部の部門（體系内部へのストックを含む）へ販賣されるかのいずれかである。簡單のために、四個の部門について行列表示をすれば次の如くである。

$$(1.2) \quad \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

右邊第一項の正方向行列は、屢々、投入・産出表、Input-Output-Tableとも呼ばれる。この行列を縦列にみれば、それは各産業部門の費用構造を示し、横行にみれば、各産業部門の産出量が如何に配分されているかの關係を示す。

所で、凡ての産業部門が悉く體系外部に對して最終財需要を持つと考えることは、恐らく非現實的であらう。例えば、國民所得計算において、使用者費用項目と看做される原材料供給部門などは、その最終財需要を零と考えるのが適當である。又、各産業部門の産出量が悉く體系内部の部門に流量として投入されると考えるのも非現實的である。従つて次のように假定する。

$$(1) \quad \xi_i \geq 0; \sum_{i=1}^n \xi_i > 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

次に、凡ての産業部門が體系の内部から投入量を需要し且つ體系の内部の他の部門にその産出量を配分すると想定しよう。但し、全部門が正の需給關係で連結されていると想定することは明かに非現實的であるから、吾々は次のように假定する。

$$(2) \quad y_{ij} \geq 0; \sum_{i=1}^n y_{ij} > 0; \sum_{j=1}^n y_{ij} > 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

勿論、各産業部門の産出量は正值である。最後に吾々は、ワルラス＝レオンチェフの假定に従つて、均衡の下では第 i 部門より第 j 部門への供給量が第 j 部門の産出量と一次同次の比例關係をもつものとして假定しよう。⁽²⁾ 即ち、

$$(3) \quad y_{ij} = a_{ij} y_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

勿論、この比例關係は、技術水準の變動によつて變化する。又、吾々はここではこの係數を價值表示によつて取扱つてゐるから、相對價格の變動によつて、たとへ實質量の結合關係は不變であつても、容易にその價值表示は變化する。現行價格體系の表示によるこの係數 a_{ij} は、第 j 部門の第 i 部門に對する限界支出性向と呼ぶことが出来るであらう。勿論これらの係數は非負である。

以上の假定を (1.2) 式に適用し、需給均衡方程式を作るならば、次式が得られる。

$$(1.3) \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix}$$

(1.2) 式と (1.3) 式との本質的相違は、前者は觀察値 observables と考えられる事後的恒等關係を示すのに對し、

後者は均衡の時においてのみ實現する函数表 schedule としての事前的均衡條件式である、ということである。

以下の分析の操作を容易にするために、吾々は記號を次の如く定めよう。

$$y \equiv \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \quad \xi \equiv \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}; \quad A \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad E \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

そのベクトルのエレメントが同時に凡てが零ならざる非負ベクトルを『IV0』で示す。吾々の場合には明かに『IV0』である。行列Aについても、それが列ベクトルより成るものと看做すならば、假定(2)によつて『IV0』である。但しこの場合の0は零行列である。かくして、(1.3)式は次のように略記される。

$$(1.4) \quad y = Ay + \xi \quad \text{or} \quad (E - A)y = \xi$$

以下の分析の第一の課題は、この最後の方程式の解の性質を吟味することである^(c)。

(2) 行列乗數の性質

先ず、假定(1)によつて、『IV0』である。従つて、もしn個の部門が凡て一次獨立であり且つ矛盾がないものとすれば、代數學の周知の定理に従つて、行列 $(E - A)$ は正則である。即ち、

$$(1.5) \quad \det(E - A) \equiv |E - A| \equiv \Delta \neq 0$$

が成立する。その行列積が丁度單位行列Eとなる逆行列 $(E - A)^{-1}$ を(1.4)式の左側から乗するならば、 $(E - A)^{-1}(E - A)y = Ey = y$ なる故、

$$(1.6) \quad y = (E - A)^{-1} \xi \equiv B\xi$$

を得る。これが吾々の體系の一般解である。

一見して明白なように、(1.6) 式は巨視的所得分析における周知の「新支出の繼續的注入の乗數效果」と著しい類似性をもつてゐる。即ち最も單純なケインズ模型では、 $(E - A)^{-1}$ は貯蓄性向の逆數たる投資乗數、 ξ は國民所得、とは外生投資と看做すことを得る。従つて、 $(E - A)^{-1}$ を「列乗數 matrix multiplier」と呼ぶことが出来るであらう。但し、多部門分析の吾々の場合では、乗數は單なるスカーラー量とは異り、 n 次元のマトリックスとして規定されてゐることに注意しなければならなく。

(1.6) 式を詳細に展開すると、次の如くである。

$$(1.7) \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D_{11}}{D} & \frac{D_{12}}{D} & \cdots & \frac{D_{1n}}{D} \\ \frac{D_{21}}{D} & \frac{D_{22}}{D} & \cdots & \frac{D_{2n}}{D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{D_{n1}}{D} & \frac{D_{n2}}{D} & \cdots & \frac{D_{nn}}{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

ここに、 D_{ij} は「の第 i 行第 j 列エレメントの餘因數を示す。明かに

$$(1.8) \quad \frac{d y_i}{d \xi_j} = \frac{D_{ij}}{D} \equiv b_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

である。従つて b_{ij} は、第 j 部門に對する最終財需要の一單位の變動が結局において第 i 部門の生産量にどれ程の變動

を齎すかを、測定する乗数である。産業部門が非負の関係で連結されているという明白な事實によつて、この乗数が非負であることは、ア・プリオリに結論し得るであらう。もし $b_{ji} = 0$ ならば、第 j 部に對する最終財需要の如何なる變動も、第 i 部門の生産活動には何等の影響をもたないこととなる。

さて、行列 A を縦列にみて、その第 i 列のエレメントの總和を α_i で示すならば、

$$(1.9) \quad \alpha_i \equiv a_{1i} + a_{2i} + \dots + a_{ni} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

である。これは、第 i 部門がその産出量を一單位生産するために必要な投入量の合計を示しているから、第 i 部門の限界支出性向と看衡することが出来るであらう。同様に、行列乗數 $(E-A)^{-1}$ の i 列について、その第 i 列の元素の總和を求めるならば、

$$(1.10) \quad \beta_i \equiv b_{1i} + b_{2i} + \dots + b_{ni} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

である。これは、第 i 部門の産出量に對する最終財需要の一單位の變動が、これら n 個の産業部門の産出量に及ぼす効果を合計したものである。簡單のために、これを第 i 部門の總乗數、效果と名付けよう。

これだけのことを前提して、今、次のような行列運算を考える。

$$(1.11) \quad (1, 1, \dots, 1)(E-A) = (1-a_1, 1-a_2, \dots, 1-a_n)$$

左邊の行ベクトルは、行列 $(E-A)$ の各列ベクトルにつらつ、そのエレメントの總和を求める集計ベクトルである。前提により $(E-A)$ は正則であるから、 $(E-A)(E-A)^{-1} = E$ を考慮しつつ兩邊の右側から逆行列 $(E-A)^{-1}$ を乗ずると、

(1.12) $(1, 1, \dots, 1) = (1 - a_1, 1 - a_2, \dots, 1 - a_n)(E - A)^{-1}$
を得る。 $(E - A)^{-1} B$ を考慮し、これを詳細に展開すると次の如くである。

$$(1.13) \quad \begin{aligned} 1 &= (1 - a_1)b_{11} + (1 - a_2)b_{21} + \dots + (1 - a_n)b_{n1} \\ 1 &= (1 - a_1)b_{12} + (1 - a_2)b_{22} + \dots + (1 - a_n)b_{n2} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$1 = (1 - a_1)b_{1n} + (1 - a_2)b_{2n} + \dots + (1 - a_n)b_{nn}$$

先に規定したように、 a_i は第 i 部門の限界支出性向である。所で、各産業部門の限界支出性向が一を超えないと假定することは、恐らく現実的な想定であろう。勿論、價格の急激な變動のために、一時的には産出量以上の投入量を支出することがあり得る。しかし、或る均衡状態の下で、一單位の産出量を生産するために、その價值以上の投入量を豫定することは、明かに非現実的な想定である。簡單のために、差當り凡ての部門の限界支出性向が一より小であると假定しよう。更に、これらの中で最大なるものを $\bar{a}$ 、最小なるものを a で示すこととする。即ち、

$$(1.14) \quad \bar{a} \equiv \max_i a_i; \quad a \equiv \min_i a_i$$

かくして、次の不等式の成立は明かである。

$$(1.15) \quad (1, 1, \dots, 1) \geq (1 - \bar{a}, 1 - \bar{a}, \dots, 1 - \bar{a})(E - A)^{-1}$$

$$(1.16) \quad (1, 1, \dots, 1) \leq (1 - a, 1 - a, \dots, 1 - a)(E - A)^{-1}$$

今、 $s_i \equiv 1 - a_i$ (従つて $s_i \equiv 1 - \bar{a}$; $s_i \equiv 1 - a$) とし、これを第 i 部門の減漏係數と名付ける。もしそれが家計部門ならば、周知の貯蓄係數である。かくして、右の二式の右邊は、

$$(1.17) \quad (1-\alpha, 1-\alpha, \dots, 1-\alpha) (E-A)^{-1} \equiv \{1-\alpha\} (1, 1, \dots, 1) B \equiv_s (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

(1.18) $(1-\alpha, 1-\alpha, \dots, 1-\alpha) (E-A)^{-1} \equiv \{1-\alpha\} (1, 1, \dots, 1) B \equiv_s (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$
 の形で示すことが出来る。但し、 $\{ \}$ はスカラー量を示す。従つて、次式が得られる。

$$(1.19) \quad {}_s(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \geq (1, 1, \dots, 1) \geq {}_s(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

或いは更に形を改め、

$$(1.20) \quad \frac{1}{s} (1, 1, \dots, 1) \leq (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \leq \frac{1}{s} (1, 1, \dots, 1)$$

を得る。これより、

$$(1.21) \quad \frac{1}{1-\alpha} \equiv \frac{1}{s} B \leq \frac{1}{s} \equiv \frac{1}{1-\alpha}$$

が成立する。 $\alpha \equiv \alpha$ なる場合は、明かに全産業部門の限界支出性向が凡て等しい時であり、そしてその時に限り不等號は凡て脱落する。従つて、この場合には、

$$(1.22) \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_n$$

である。かくて次の命題を得る。

命題 1.1 「凡ての産業部門の限界支出性向が等しい場合、如何なる部門に對するかを問はず、最終財需要のいずれの變動も、經濟體系に及ぼす總乗數效果は凡て等しい。」

更に、 α_i が凡て一より小なる場合には、

$$(1.23) \quad \beta \equiv \frac{1}{1-\alpha} \equiv \frac{1}{s} > 1$$

であるから、次の命題の成立も明かである。

命題 (1.2) 「凡ての産業部門の限界支出性向が一より小なる場合、最終財需要の變動が惹き起す經濟體系への總乗數効果は、凡て一より大である。」

所で、前に指摘したように、 α_i はそれが家計部門ならば限界消費性向であり、 $1-\alpha_i \equiv s_i$ は貯蓄係數、 $\frac{1}{s_i} \equiv \frac{1}{1-\alpha_i}$ はケインズによつて投資乘數と呼ばれた。これとのアナロジーにおいて吾々は、第*i*部門の減漏係數 s_i の逆數を、一般に第*i*部門の投資乘數と呼ぶこととする。かくして、(1.21)式より、吾々は次の命題をもつことが出来る。

命題 (1.3) 「凡ての産業部門の限界支出性向が一より小なる場合、最終財需要の變動が惹き起す經濟體系への總乗數効果は、最大なる投資乘數よりは大ではなく最小なる投資乘數よりは小ではない。」

今、第*n*部門についてのみその限界支出性向が一より小であり、他の部門のそれは凡て一なる場合を考えよう。明かに、次式が成立する。

$$(1.24) \quad (1, 1, \dots, 1)(E-A)y = (0, 0, \dots, 0, 1-\alpha_n)y = (1, 1, \dots, 1)\xi$$

これを具體的に展開すると

$$(1.25) \quad (1-\alpha_n)y_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n \quad \therefore y_n = \frac{1}{1-\alpha_n} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \right)$$

となる。これより、最終財需要のいずれの變動も、第*n*部門についてその乗數効果は凡て等しいことが知られる。ケインズは、産業部門の支出性向について明示的な分析を與えなかつたけれども、第*n*部門を家計部門、 α_n を限界消費性向、 y_n を國民所得と看做せば、(1.25)式は正に最も單純なケインジアン模型を示しているのである。即ち、 ξ_i は

外生投資支出、政府支出、輸出入バランス等によつて構成され、それらの變動が及ぼす國民所得水準への効果は凡て等しいのである。従つて、ケインジヤンの國民所得分析が、吾々の構造分析の一つの特殊な場合にすぎないことが理解される。實際、巨視的分析において、外生的投資が如何なる部門に對して行はれるかの質的相違を無視し得るのは、乗數がただ家計部門の消費性向によつてのみ展開出來るとする前提に立つてゐるからに外ならな⁽⁴⁾。

(3) 體系の完全連結性

吾々は會つて他の機會に、假定(1)(2)(3)の下では、行列乗數を

$$(1.26) \quad (E-A)^{-1} = E + A + A^2 + \dots \equiv B$$

と⁽⁵⁾う無限級數の和に展開し得ることを證明した。所で、行列 A は0のエレメントを含むかも知れないけれども、いづれにしても $A \geq 0$ であるから、明かに $A^2 \geq 0$ ($\infty > 0$)である。従つて、行列乗數は、(1.26)式によつて $(E-A)^{-1} \geq 0$ である。若し、等號が排除されれば $(E-A)^{-1} > 0$ となるならば、 $\xi \geq 0$ なる限り、確定的に、

$$(1.27) \quad y = (E-A)^{-1} \xi > 0$$

が成立し、凡ての産業部門の產出量は正值をとるであらう。然るに、行列乗數に等號が残り、 $(E-A)^{-1} \geq 0$ ならば、 $\xi \geq 0$ の時には、或る産業部門の產出量の中には0となるものが現はれるかも知れない。これは、凡ての産業部門の產出量が正值であるという吾々の前提に矛盾する。

かくして、吾々のここでの問題は、如何なる場合に等號が排除され、如何なる場合に等號が現はれるかを分析することである。以下において簡單のために、行列乗數から等號の排除される場合 $(E-A)^{-1} > 0$ を、體系が完全に連結

completely couple しつゝると呼び、等號の存在する場合 $(E-I-A)^{-1}V=0$ を、體系が不完全に連結 *incompletely couple* しつゝると名付ける。⁽²⁰⁾

先ず、四部門構造の場合について、最も簡単な次のような行列を考える。

$$(1.28) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これは、凡ての産業部門が連鎖のように循環的に連結している場合であつて、かかる行列を循環行列 *cyclic matrix*、循環行列によつて表現される經濟體系を循環的構造の體系と呼ぶこととする。

今、 $a_{ii} \neq 0$ なる時、第 i 部門は第 j 部門の第一次供給部門であると名付けるならば、吾々の例では、第一部門は第二部門の、第二部門は第三部門の、第三部門は第四部門の、第四部門は第一部門のそれぞれ第一次供給部門である。更に、

$$(1.29) \quad A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{12}a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{23}a_{34} \\ a_{34}a_{41} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{41}a_{12} & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{12}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{23}^{(2)} \\ a_{34}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{41}^{(2)} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を考え、 A^2 におけるエレメントを新たに $a_{ij}^{(2)}$ なる記號で示す。前と同様に、 $a_{ii}^{(2)} \neq 0$ にして且つ $a_{ii}^{(2)} \neq 0$ なる時、第 i

部門は第 j 部門の第二次供給部門であると名付けよう。右の例では、第一部門は第三部門の、第二部門は第四部門の、第三部門は第一部門の、第四部門は第二部門のそれぞれ第二次供給部門である。全く同様にして、 A の三乗を展開すれば、

$$(1.30) \quad A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{12}a_{23}a_{31} \\ a_{23}a_{31}a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{31}a_{12}a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{12}a_{23}a_{31} & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14}^{(3)} \\ a_{21}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32}^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43}^{(3)} & 0 \end{bmatrix}$$

を得る。第一部門は第四部門の、第二部門は第一部門の、第三部門は第二部門の、第四部門は第三部門のそれぞれ第三次供給部門を形成していることは纏説を要しないであろう。然るに、これらの行列より、

$$(1.31) \quad E + A + A^2 + A^3 > 0$$

が成立する。これは四部門構造の場合についてであるが、同様の展開を一般に n 部門構造の場合について追跡してみると、

$$(1.32) \quad E + A + A^2 + \dots + A^{n-1} > 0$$

の成立が容易に確められる。

所で、上述の循環行列の他に更に正のエレメントを添加して得られる凡ゆる行列についても、(1.32)式の成立することは當然であるから、吾々は次の命題を導出することが出来るであろう。

命題 (1.4) 「經濟體系が循環的構造の體系であるか、又はその他に正のエレメントを持つ體系であるならば、その體系は完全に連結した體系であり、それが n 部門構造ならば、少くとも第 (シー) 次までには、相互に完全な供給部門となる。」

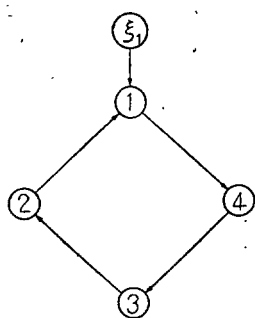


Fig. 1

今、循環的構造の體系の具體的意味を知るために、第一圖を考えよう。ここに、矢印は財貨の購入に對して支拂われる貨幣の流れを示し、簡單化のために、第一部門に對してのみ最終財需要が存在するものと前提されている。この圖式より、 ξ_1 から出發した矢印は、 $① \rightarrow ④ \rightarrow ② \rightarrow ①$ という系路で、體系内の凡ての部門を通過して再び元の部門に回歸することが知られるであろう。而も、このシェーマの下では、最終財需要が如何なる産業部門に對して存在するかは無關係である。即ち、どの産業部門に對して生起するかを問はず、如何なる最終財需要の變動も、必ず全産業部門に波及効果を持つに至る。實際、行列乗數が正マトリックスであるということは、かかる事實を指しているのである。

然らば、循環的構造ではない産業體系について、なお完全に連結している場合は存在し得るであろうか。この問題を検討するために、吾々は四部門構造に關する次のような行列を考えてみよう。

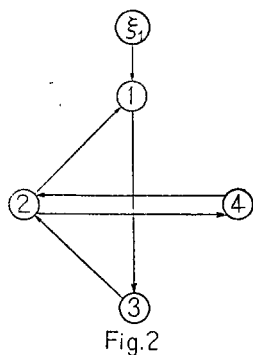
$$(1.33) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

この行列は、産業部門をどのように再編成し且つ記號の改訂を行つても、(1.28)式で示されるような循環行列には決してならない。然るに、簡単な行列演算によつて、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \end{pmatrix}; A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ * & * & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから(但し*の記號は正の数値)、この場合にも明かに、

$$(1.34) \quad E + A + A^2 + A^3 > 0$$



が成立する。即ち、體系は完全連結である。従つて、循環的構造を包接することは、單に經濟體系の完全連結性に對する充分條件にすぎないことが知られよう。再びこの關係を圖示すると、第二圖の如くである。明かに、第一部門に對する最終需要 ξ_1 から出發した矢印は、 $\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{3} \rightarrow \textcircled{2} \rightarrow \textcircled{4} \rightarrow \textcircled{2} \rightarrow \textcircled{1}$ という系路を辿つて、再び第一部門に還流してゐる。しかも圖式から明白なように、かかる事情は ξ_1 のみに限られない。例えば、第四部門に對して最終財需要 ξ_4 が生起するとすれば、 $\textcircled{4} \rightarrow \textcircled{2} \rightarrow \textcircled{1} \rightarrow \textcircled{3} \rightarrow \textcircled{2} \rightarrow \textcircled{4}$ という波及の系路を辿りながら、凡ての産業部門に影響を與えるであらう。事情は ξ_2 及び ξ_3 についても同様である。かくして、逆行列 $(E-A)^{-1}B$ の各元素は、生起するかも知れない各最終財需要の一單位の變動が、凡ての時間の經過後において究極的に達せられる各産業部門への乗數效果を示しているのである。

さて、連結が不完全なる場合について考えてみよう。このために、次のような行列

$$(1.35) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

を假定する。今、第一部門と第二部門によつて第一の部分體系、第三部門と第四部門によつて第二の部分體系を構成するものと看做すならば、部分行列 A_{11} 及び A_{22} はそれぞれ循環行列であるから、各部分體系は明かに完全に連結している。簡単に、完全に連結している部分體系をブロックと名付けよう。然るに、吾々の例では、第一ブロックは第二ブロックに對して一方的な供給ブロックを形成していることが知られる。即ち、第二ブロックに所屬する如何なる産業部門も、第一ブロックのどの部門に對しても第一次供給部門ではない。

所で、吾々は、このようにブロック間の連結が一方的である場合には、産業體系は必ず連結が不完全であることを知る。即ち、簡単な行列演算によつて、

$$\begin{aligned} A^2 &= AA = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} + A_{12} & A_{22} \\ 0 & A_{22} & A_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A_{11}^{(2)} & A_{12}^{(2)} \\ 0 & A_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \\ A^3 &= A^2 A = \begin{pmatrix} A_{11}^{(2)} & A_{12}^{(2)} \\ 0 & A_{22}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^{(2)} & A_{11} & A_{11}^{(2)} & A_{12}^{(2)} + A_{12}^{(2)} & A_{22}^{(2)} \\ 0 & A_{22}^{(2)} & A_{22}^{(2)} & A_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A_{11}^{(3)} & A_{12}^{(3)} \\ 0 & A_{22}^{(3)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり、一般的に A の t 乗については

$$A^t = A^{t-1}A = \begin{bmatrix} A_{11}^{(t-1)} & A_{12}^{(t-1)} \\ 0 & A_{22}^{(t-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(t-1)}A_{11} & A_{11}^{(t-1)}A_{12} \\ 0 & A_{22}^{(t-1)}A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(t)} & A_{12}^{(t)} \\ 0 & A_{22}^{(t)} \end{bmatrix}$$

が成立する。然るに、(1.26) 式に従つて行列乗数を計算するならば、

$$(1.36) \quad (E-A)^{-1} \equiv B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}$$

を得る。かくして、行列乗数の中には必ず 0 の元素が含まれることとなる。

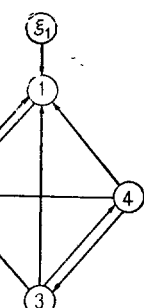


Fig. 3

今、この體系を再び圖示するならば、第三圖の如くである。ここでは、任意の

産業部門から出發した矢印が、凡ての産業部門を経由して再び元の産業部門に還流する可能性は全く閉されている。蓋し、これは、第二ブロックは第一ブロックから唯だ一方的にのみ財貨及び用役を購入するだけであり、第一ブロックより第二ブロックに向う矢印が存在しないからである。もし、 ξ_3 又は ξ_4 が生起するならば、確かにその効果は凡ての部門に及ぶであろう。しかし、第二ブロックから第一ブロックに投ぜられた衝撃は、唯だ第一ブロックにおいて循環的に効果を波及するだけであり、再び第一ブロックから第二ブロックへその効果を波及することはない。勿論、 ξ_1 又は ξ_2 における如何なる變動も、第二ブロックの産業

部門には何等の變動も與えない。

以上の連結の不完全なるケースは、吾々が (12) 式で與えたような特定のタイプに限定されるものではないことに注意しなければならない。一般的には、 n 個の産業部門を適當に再編成して幾つかのブロックを作り、それらの中で少くとも一個のブロックが他の凡てのブロックに對して一方的供給ブロックを形成しているならば、上述の歸結はそのまま妥當するのである。⁽⁸⁾

所で、圖式的にみて容易に知られるように、産業體系が完全に連結しているということは、どのような産業部門から出發しても、凡ての産業部門を經由して再び元の部門に回歸する系路が必ず一個は存在すること、從つてブロック間の系路が直接的にか又は他のブロックを介して間接的にか必ず相互に連結されていることである。從つて、連結の不完全なる體系の存在は、産業體系が一方的供給ブロックとなるような部分體系を内包する時に現われることが明白となる。かくして、吾々は次の命題を得る。

命題 (1.5) 「産業體系が完全に連結しているための必要なる條件は、全部門をどのように再編成しても、他の凡ての産業部門に對して一方的な供給ブロックとなるような部分體系が存在しないことである。」

上述の圖表における矢印を貨幣の流れを示すものと考えれば、この命題は次のように表現することも出来る。

命題 (1.6) 「産業體系が完全に連結しているための必要なる條件は、任意の部門から支出される貨幣が、凡ての産業部門を經由し、その一部が必ず元の部門に還流するような系路が少くとも一個は存在することである。」

さて、吾々は、分析の出發點として、凡ての産業部門の產出量がプラスであることを前提してきた。然るに、體系

が連結不完全であるならば、少くとも形式的には産出量が0なる産業部門が出現するかも知れない。即ち、吾々は、最終財需要ベクトルについて、 $\xi_{IV} = 0$ なることを前提した。従つて、唯だ一個のエレメント、例えば ξ_1 のみが正で、他の凡てのエレメントが0なる場合を含んでいる。事態がかくの如きものとすれば、第一部門に對して直接的にも間接的にもその生産に参加しない部門では、明かに $b_{i1} = 0$ であるから、かかる産業部門の産出量は0とならざるを得ない。蓋し、この場合には、

$$(1.37) \quad y_i = b_{i1} \xi_1 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

であるからである。

かくして、行列乗數に0なるエレメントを持つ連結不完全なる體系が尙現實妥當な歸結を得るためには、他のブロックに對して一方的需要ブロックを形成する部分體系において、少くとも一個の産業部門が必ず體系外に對して最終財を供給する、ということが言われなければならないであらう。しかもこれは、充分に經濟的に意味のある假定である。蓋し、他のブロックより唯だ一方的に需要するだけであり、しかも最終財をも供給しない所のブロックは、その經濟體系全體からみれば、明かに再生産過程の外に立つものである、寧ろ最終財需要部門としての位置を占めるからである。レオンチェフ體系において、何故に政府部門が最終財需要部門として現われているかは、以上の理由によるのである。

さて、以上の分析は、ケインズの方法に従つて、乗數波及の効果但凡て同一期間内に終焉するという、所謂靜學的前提に立脚するものである。勿論、この前提は現實的ではないであらう。しかし、以下の分析では、行列乗數の動學

化は何等本質的役割を演ぜず、しかも、曾つて他の機會に動學的行列乘數の性質に關して若干の吟味を行つたので、重複を避けるためにも茲では立入らない。

(1) このような分析の進め方に對して、例えば都留教授は、それは「いまだ理論的抽象を行う前の素材的骨組でしかない。」として批判せられてゐる（都留重人「國民所得と再生産」二一〇頁）。しかし、解かんとする問題が具體的に決定されざる限り、吾々は理論的抽象を行うことが出来ないのだから、問題提示と共に直ちに適用可能な模型を用意しておくことは、限定された問題に對してのみしか通用しない模型を詳細に分析するのと同じ程度に、有意義であると考ええる。

(2) 但し、ワルラスは、彼の所謂 *coefficients de fabrication* が先驗的に決定されている、という假定を固守し續けた譯ではない。

L. Walras, *Éléments d'économie politique pure*. (手塚壽郎譯) 二四九頁。

この假定は、(1)大規模生産の利益、(2)相對價格變動による生産要素の代替可能性を排除している。しかし、多かれ少かれ技術的に固定された比例關係が變更されたとしても、かかる變動は、所謂 *Comparative analysis* によつて、充分に吾々の體系で處理することが出来る。唯だ問題なのは、生産係數の變動を內生的に分析することであるが、吾々はその一つの可能性を第三章において分析した。

(3) 吾々は、相對價格變動の問題を不問に附す。或いは、ヒックスの方法に倣つて、相對價格を不變と假定してもよい。唯だ、吾々は他の機會に、たとえ相對價格が變化したとしても、それが單に生産係數の價值表示を變更するに留るならば、以下の分析の妥當性を失うものではないことを證明しておいた。

拙稿「レオンチエフの動學體系」理論經濟學・一九五二年十一月。

(4) 或る基準時點において、生産量から投入量總額を差引いた額を、その産業部門の留保利潤と看做せば、凡ての産業部門の

總支出性向が等しいということは、利潤率が全産業部門について等しいことを意味する。この場合には、各産業部門の總乗數効果は等しい。又、留保利潤が凡て同時期に家計部門に配當されるものと假定すれば、明かに各産業部門の支出性向は一であり、ケインジヤンの乗數分析が可能となる。

(5) 拙稿「レオンチェフの動學體系」理論經濟學・一九五二年十一月、一八七頁。

今、行列 A に正則な變換を加へ、對角行列 A を作る。即ち、

$$(1) \dots\dots HAH^{-1}=A \quad \therefore A=H^{-1}AH$$

所で、對角行列 A のエレメントの絶對値凡て一より小なる時、そしてその時においてのみ、次の如きオペレーションが可能である。

$$(2) \dots\dots (E+A+A^2+\dots\dots)=H^{-1}(E+A+A^2+\dots\dots)H=H^{-1}(E-A)^{-1}H$$

更に、次の運算を考える。

$$(3) \dots\dots (E-A)=E-H^{-1}AH=H^{-1}(E-A)H$$

(3) 式を (2) 式の右側から邊々相乗するならば、

$$(4) \dots\dots (E+A+A^2+\dots\dots)(E-A)=H^{-1}(E-A)^{-1}HH^{-1}(E-A)H=E$$

となる。かくして、(4) 式の右側から逆行行列 $(E-A)^{-1}$ を邊々相乗して

$$(5) \dots\dots (E+A+A^2+\dots\dots)=(E-A)^{-1}$$

を得る。然るに、對角行列 A のエレメントは、行列 A の特性根に他ならない。従つて、(5) 式の如き展開が可能なのは、行列 A に固有な特性根が凡て單位圓の内部にある時、そしてその時にのみ限られることが明かとなる。

(6) この用語は、ソロウの分解可能、decomposable 及び分解不可能、indecomposable という呼稱に對應する。即ち、完全連

結な經濟體系とは、ソロウの意味での分解不可能な體系と同義である。

R. Solow, "On the Structure of Linear Models", *Econometrica*, 1952, Jan.

今、最終財需要が若干變動したとすれば、

$$dy = (E - A)^{-1} dy^e$$

を得る。ここで體系が完全に連結しているというのは、如何なるもの變動に對しても、ベクトル y の凡てのエレメントに變動が生ずることを意味し、體系が不完全連結であるとは、場合によつてはその產出量に變動を受けない産業部門が存在するかも知れない、という可能性を残すことである。

(7) この用語の利用は、國際貿易に關する森嶋氏の分析に従う。

森嶋通夫「國際貿易の比較動學的分析」經濟論叢・昭和二十五年十二月。

この概念は、或る産業部門の產出量に對する最終財需要の變動が、時間の經過を通じて他の産業部門に波及して行く過程を分析する場合に重要である。しかし、即時的乘數を假定するこの論文では立入らない。

(8) より一般的には、連結が不完全なるマトリックスは、次のように示すことが出来る。

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{ss} \end{bmatrix}$$

これは、體系が s 個のブロックに分けられている場合であり、對角線上の部分行列は凡て正平方行列である。若し、各ブロックが、他のブロックから全く獨立している時には、體系は明かに非連結であり、各ブロックは独自の運動法則に従う。

Ⅱ 資本の構造と行列加速度

(1) 資本蓄積の巨視分析

發展する國民經濟の變動過程を、國民貯蓄と國民投資の二つの巨視的總量の均衡・不均衡によつて分析しようとする立場は、ヴィクセルの累積過程の理論と共に長い歴史をもつてゐる。しかし、今日においても、この問題は現代經濟理論の最も重要なテーマとなつており、サムエルソン・ヒックス・ハンセン・ハロッド・ドマー等の多くの學者によつて活潑に論議されている。一般にマクロ・ダイナミックスと呼ばれるこの理論の基本的アイデアは、貯蓄を資本蓄積の供給源、投資をその需要面と看做すことにより、如何にして資本の需要と供給が均衡するか、均衡状態が崩れた場合に如何なる事態が生ずるか、という問題に焦點をおいて、發展過程の均衡條件を吟味するにある。

問題の把え方としては確かに單純明解なこれらの分析には、今日までの所、いまだ確定的な理論が提出されてゐる譯ではない。アンティノミー理論とタイム・ラグ理論の對立などはその一つである。しかし、均衡解の導出という點に關しては可成りの意見の一致がみられるのであつて、その中の代表的な一つの見解は、次の如き一組の方程式群によつて示すことが出来るであらう。即ち、

$$(2.1) \quad I(t) = v \Delta Y(t)$$

$$(2.2) \quad S(t) = s Y(t)$$

$$(2.3) \quad v \Delta Y(t) = s Y(t)$$

ここに $S \cdot I \cdot Y$ はそれぞれ貯蓄・投資・國民所得を示し、 v は加速度係數、 s は貯蓄性向を示している。 $Y(0)$ を Y の第 0 期における初期値として Y に關する一般解を求めると、

$$(2.4) \quad Y(t) = Y(0) \cdot \left(\frac{v}{v-s} \right)^t$$

を得る。もし、體系が均衡状態にあるものとすれば、國民所得の均衡發展率 g は明かに

$$(2.5) \quad \Delta Y(t)/Y(t) = \left(\frac{s}{v} \right) = g$$

である。これは (2.3) 式から直接に求めることも出来る⁽¹⁾。

さて、ここでの問題は、投資方程式 (2.1) の性質に關するものである。一般にこの方程式は、國民所得 Y と國民資本 K との間に資本方程式とも稱し得べき一定の函數關係

$$(2.6) \quad K(t) = vY(t)$$

を想定し、これより導出されたものである。即ち、兩邊の定差をとると、

$$(2.7) \quad I(t) \equiv \Delta K(t) = v \Delta Y(t)$$

を得る。この方程式は、 $Y(t)$ の水準を維持するためには、それを v 倍しただけの $K(t)$ が必要であるという關係、従つて、資本現在量が正に國民所得水準に適正な均衡状態にある時、 ΔY の變動に應じて、それを v 倍しただけの ΔK の需要を誘發するという關係を示している。勿論、たとえこの假設が認められたとしても、現實は、偶然の一致を除外すれば、不斷に資本の過剰と不足の間を動搖している。しかもアンテノミー理論の教義に従うと、このような事情こそ、資

本的な經濟擴張及び收縮の重要な説明原理とされているのである。

所で吾々は、巨視的分析が前提しているように、國民所得と國民資本との間に、(2.6)式で假定されている所の單一の資本係數で結ばれるような安定的函數關係を眞に想定することが出来るであらうか。この問に對しては、吾々は多くの疑念をもつ。實際、いまだ會つて、この問題に確信をもつて肯定した者はいないし、若干の實證的分析も決して満足なものではない。⁽²⁾しかしながらそれにも拘らず、尙理論上の問題が残る。即ち、かかる想定によつて、一體如何なる利害得失が得られるかを尋ねることである。

一見して明白なように、この分析に最も特質的なことは、 Y も K も共に巨視的總量であるということである。そしてこの理論は、この理由のために、operationality という點に關して決定的長所を持つ。實際、一個の資本方程式によつて資本理論の基本的内容を示さんとする意圖は、他の如何なる資本理論にもまさつて、操作可能な分析武器を提供したと言ひ得るであらう。この假定の下では、吾々は資本の時間構造とか各産業部門への配分という複雑な問題を迂回して、年々の國民所得水準に最適な全體としての資本蓄積量を容易に決定することが出来るのである。

しかし吾々は、この理論の分析上の妥當性には、非常に厳しい制約があることを忘れてはならない。即ち、上述の巨視的資本方程式は、資本の構造に關する問題には何等の發言權をもち得ないし、もしそれが可能であつたとしても、凡ての産業部門が全く同質的な資本構造をもつとの假定の上に立脚しているものと看做さざるを得ないのである。例えば、現實資本量が必要資本量を超過している場合を考えてみよう。ハロッドによれば、この場合には、經濟の總過程は一方的な收縮のプロセスを持続するものとされる。恐らくこの歸結は、凡ての産業部門において遊休生産設備が

存在する時には眞實であろう。しかしたとえ總額としての資本量に超過があつても、或る産業部門では full capacity が實現しており、時には設備不足の産業部門さえも存在するかも知れない。このような場合にも、依然として一般的收縮過程を結論し得るか。マージナル流の代表的企業によつて組立てられたマクロ分析の武器では、この問題に解決の光を投ずることは恐らく不可能であろう。同様の問題は、總量として資本設備の不足が存在する場合にも生ずる。

即ち、例え全體としては資本設備が不足であつても、尙ある産業部門の資本量が適正なるものを超えているという理由によつて、全體系が依然として收縮の過程を歩むという事態も可能であるかも知れないのである。一見して矛盾と思われるこのような事態は、單一の資本係數を前提とする巨視的分析では——例え係數の非線型を假定しても——殆ど解明不可能な問題である。かくして吾々は、巨視的分析の單なる彌縫的手段に訴えることなく、分析の最初から、資本の構造的異質性を解明し得るが如き分析武器を用意しなければならない。⁽³⁾

(2) 資本の構造と行列加速度⁽⁴⁾

一般に資本は、建物・工場・機械・車輛・船舶・什器・在庫品などの種々の項目から構成され、それぞれの生産目的に応じて各産業部門に配分されている。今、第 i 部門の第 t 時點における資本現存量（或る基準年次の物價體系で測定する）を $k_i(t)$ で示す。このうち、第 j 部門から購入した部分を $k_{ji}(t)$ で示すならば、明かに

$$(2.8) \quad k_i(t) = k_{1i}(t) + k_{2i}(t) + \dots + k_{ni}(t)$$

が成立する。勿論、 n 個の産業部門が悉く資本財供給部門として存在する譯ではなく、更に或る部門で必要な資本財も他の部門では不必要な場合もあるから、これらのエレメントの多くは 0 である。

今、縦列に各産業部門から購入した資本財を産業分類の順序に従つて配列し、この列を同じように産業分類の順序に應じて集めたマトリックス

$$(2.9) \quad K(t) \equiv \begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) & \cdots & k_{1n}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) & \cdots & k_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1}(t) & k_{n2}(t) & \cdots & k_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

を考えよう。或る部門で生産した資本財を同一の部門で利用することも可能であるから、 $k_{ii}(t)$ と考へべきである。第 t 期の行列と第 $(t-1)$ 期の行列の差の行列を $\Delta K(t)$ で示すと

$$(2.10) \quad \Delta K(t) \equiv K(t) - K(t-1)$$

である。そこで、この差行列のエレメントを $\Delta k_{ij}(t)$ で示すならば、これは第 t 期に第 i 部門から第 j 部門の資本ストックの増加分として供給された數量を示すこととなる。三部門構造の場合について具體的に展開すると

$$(2.10) \quad \Delta K(t) = K(t) - K(t-1) = \begin{bmatrix} \Delta k_{11}(t) & \Delta k_{12}(t) & \Delta k_{13}(t) \\ \Delta k_{21}(t) & \Delta k_{22}(t) & \Delta k_{23}(t) \\ \Delta k_{31}(t) & \Delta k_{32}(t) & \Delta k_{33}(t) \end{bmatrix}$$

である。勿論、この行列の各縦列のエレメントの合計は、第 t 期における各産業部門別資本形成を示している。

さて吾々の問題は、部門別に考えられた資本形成の運動法則を明かにすることである。このために、巨視的加速度原理との形式的アナロジーにおいて、一定の價格體系の下で、

$$(2.12) \quad k_j(t) = a_{ij} y_j(t) \quad (i, j=1, 2, \dots, n)$$

が成立するものと前提しよう。換言すると、第 j 部門は、その産出量 y_j を維持するのに、それに正の比例常數 a_{ij} を乗じただけの資本財を第 i 部門から供給されていることを必要とする、ということである。 a_{ij} を第 j 部門の部分的資本係數と呼ぶ。従つて今、

$$(2.13) \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} \equiv \gamma_j \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

とすれば、明かに

$$(2.14) \quad k_j(t) = \sum_{i=1}^n k_{ij}(t) = \sum_{i=1}^n a_{ij} y_j(t) \equiv \gamma_j y_j(t)$$

であるから、 γ_j を第 j 部門の總資本係數と名付けることが出来るであらう。蓋し、(2.14) 式の兩邊の定差をとると、

$$(2.15) \quad \Delta k_j(t) = \gamma_j \Delta y_j(t) \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

となり、これは巨視的動學における加速度原理と形式的に對應するからである。(2.12) 式の假定を (2.9) 式のマトリックスに適用すれば、

$$(2.16) \quad \begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) & \dots & k_{1n}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) & \dots & k_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1}(t) & k_{n2}(t) & \dots & k_{nn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & y_n(t) \end{bmatrix}$$

を得る。かくして、資本設備に過不足なき場合、各産業部門の産出量の一定水準又は一定増加量が與えられ、且つ資本係數の行列が與えられるならば、それに應じて必要とされる資本存在量又は資本増加量が決定せられることとな

る。以下では簡單のために、(2.16) 式の右邊第一項で示される行列を「行列加速度 Matrix Accelerator」と呼ぶ。

(3) 行列乗数と行列加速度の結合體系

さて、吾々は第一章において、各産業部門の產出量は、流量として體系内の部門に販賣されるか、又は體系外に供給されるかのいずれかであることを指摘した。體系外への供給量、即ち最終財需要を伴うこのような構造模型は、一般にレオンチエフの開放模型と呼ばれている。しかしここでは未だ資本蓄積への考慮がエクスピリットには行われていなかったたので、最終財需要の中に含まれている所の體系内の部門の資本ストックとなる部分が如何なる理論的意義を持つか、という問題には立入った検討を加えなかつた。これは、最も單純なケインズの靜學模型において、投資支出が政府支出及び貿易バランスと合計され自發的支出として處理されるのと軌を一にする。

そこで、資本蓄積過程の分析を吾々の體系に明示的に導入するために、各産業部門の產出量を次のように規定しよう。

$$(2.17) \quad y_i = \sum_{j=1}^n y_{ij} + \sum_{j=1}^n \Delta k_{ij} + \xi_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

即ち、各産業部門は、體系内の部門へ流量としての財貨 y_{ij} 又はストック量としての財貨 Δk_{ij} を供給し、又、若干の部門は體系外の部門へ ξ_i の財貨を販賣すると考えるのである。若しそれが、貯藏の不可能なサービス部門とか、又は紡績部門に對する原棉生産部門の如く、純粹に流量としての財貨又は用役を供給する部門であるならば、明かに $\Delta k_{ij} = 0$ である。従つて、行列加速度の多くのエレメントは0である。これに對して、流量としての財貨の中には、資本設備の減價償却の補填部分が含まれているから、建築部門のように純粹に資本ストックとなるような財貨のみを供給する

部門であつても、一般に $\sum \Delta y_i$ を期待すべきである。

簡單のために、凡ての産業部門における現實の資本構成が、各部門において必要とせられる資本構成と丁度一致している場合を考察しよう。これまでの前提により、この場合には

$$(2.18) \quad y_{ij} = a_{ij} y_j; \Delta k_{ij} = a_{ij} \Delta y_j$$

であるから、次の需給均衡方程式を得る。

$$(2.19) \quad y_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j(t) + \sum_{j=1}^n c_{ij} \Delta y_j(t) + \xi_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

三部門構造の場合につき行列記號で示すと、

$$(2.20) \quad \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta y_1(t) \\ \Delta y_2(t) \\ \Delta y_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \end{pmatrix}$$

又は簡單に

$$(2.21) \quad y(t) = Ay(t) + C\Delta y(t) + \xi(t) \quad \text{or} \quad (E - A)y(t) = C\Delta y(t) + \xi(t)$$

となる。一見してこれは、吾々が先に分析した巨視的分析における乗數と加速度原理の結合形態と著しい類似性をもっていることが知られよう。しかし吾々の場合は、これは單なるスカラー量の結合體系と本質的には異なる所の行列乗數と行列加速度の結合體系であることに注意しなければならない。

又 $y(t) \equiv y(t) - y(t-1)$ を考慮すれば、(2.21) 式は一階定差の動學方程式である。所で定差方程式の解法に

ついで克く知られてゐるように、この體系の完全解は、 $y(t) = 0$ と置いた場合の静學解と $\xi = 0$ と置いた場合の動學解の和として規定される。勿論、體系が動學的に安定ならば、時間の経過と共に動學解の部分は消滅し、體系はやがて靜學解の水準に收斂するであろう。この中、靜學解の性質については前章で詳しく分析したから、ここでは動學解の性質を吟味する。

先ず、 $\xi = 0$ と置いた場合の同次方程式

$$(2.22) \quad (E - A)y(t) = 0$$

において、特解を $y(t) = \lambda^t$ の形で求めつゝみる。明かに $y(t+1) = \lambda^{t+1} = \lambda y(t)$ なる故、(2.22) 式でタイムを 1 期間だけ前進させると

$$(2.23) \quad \lambda(E - A)y(t) = (\lambda - 1)Cy(t)$$

を得る。これは、 λ を未定常數として含むような λ に關する連立方程式である。三部門構造の場合について詳しく展開すると

$$(2.24) \quad \begin{pmatrix} \lambda(1 - a_{11}) - \lambda a_{12} - \lambda a_{13} \\ -\lambda a_{21} \quad \lambda(1 - a_{22}) - \lambda a_{23} \\ -\lambda a_{31} - \lambda a_{32} \quad \lambda(1 - a_{33}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda - 1)c_{11} & (\lambda - 1)c_{12} & (\lambda - 1)c_{13} \\ (\lambda - 1)c_{21} & (\lambda - 1)c_{22} & (\lambda - 1)c_{23} \\ (\lambda - 1)c_{31} & (\lambda - 1)c_{32} & (\lambda - 1)c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$$

である。

さて、(2.23) 式は λ に關する同次連立方程式であるから、この方程式が 0 以外の解を持つためには、その係數が

ら作られる行列式は0でなければならぬ。即ち、

$$(2.25) \quad \det[\lambda(E-A) - (\lambda-1)C] \equiv |\lambda(E-A) - (\lambda-1)C| = 0$$

である。これは λ に關する n 次の多項式であり、(2.23)式の特性行列式と呼ばれ、これより決定される λ を特性根と呼ぶ。もし、この多項式から決定される n 個の特性根 λ の絶對値について

$$(2.26) \quad \text{Max}_i |\lambda_i| < 1 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

が成立するならば、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda^t = 0$ なる故に動學的に安定であり、一個でも一より大なるものがあれば動學的に不安定である。吾々は、このような行列乗數と行列加速度の結合體系が如何なる時に安定の條件をみたすか、という問題を検討しよう。

(4) 動學的安定條件

この問題に立入るに先立ち、吾々は若干の豫備定理を用意しておかなければならない。

豫備定理(1)非負行列は他の凡ての特性根の絶對値よりも小ならざる正根 λ_1 をもち、 λ_1 に所屬する特性ベクトルは非負ベクトルである。⁽⁵⁾

豫備定理(2) λ_1 は各列の元素の和の最大値を越えず、最小値よりも小ではない。⁽⁶⁾

豫備定理(3)非負行列 $PQ = R$ に $\lim_{t \rightarrow \infty} P^t$

$$\begin{aligned} \min_j \sum_{i=1}^n p_{ij} &\equiv \underline{p}; \quad \min_j \sum_{i=1}^n q_{ij} \equiv \underline{q}; \quad \min_j \sum_{i=1}^n r_{ij} \equiv \underline{r}; \\ \max_j \sum_{i=1}^n p_{ij} &\equiv \bar{p}; \quad \max_j \sum_{i=1}^n q_{ij} \equiv \bar{q}; \quad \max_j \sum_{i=1}^n r_{ij} \equiv \bar{r}; \end{aligned}$$

で、これだけの準備の下で本題に入る。先ず、前章で明かにされたように、行列乗數によつて示される經濟體系が完全連結である時には、 $(E-A)^{-1}B > 0$ であり、不完全連結であるならば、 $(E-A)^{-1}B \geq 0$ であつた。そのずれの場合にも、體系が經濟的に有意味であるためには、正又は非負の乘數效果をもたなければならぬ。今、 $(E-A)^{-1}B$ を (2.25) 式の左側から乘じ、更に $(\lambda-1)$ で除すならば、

$$(2.27) \quad f(\lambda) = \left| \frac{\lambda}{\lambda-1} E - (E-A)^{-1}C \right| = 0$$

を得る。但し、 $|E| \neq 0$ なる故に、 $\lambda=1$ なる根は存在しない。簡單のために $\frac{\lambda}{\lambda-1} \equiv p$ と置き、更に $(E-A)^{-1}C \equiv BC \equiv F$ と置くならば、この行列式は次のように書改められる。

$$(2.28) \quad f(p) = |Ep - F| = 0$$

非負行列の積より得られる行列は、明かに非負行列である。従つて、もし行列乗數で示される經濟體系が完全連結であり、又、各産業部門は必ず資本設備を用いて生産に従事するという現實的妥當な假定の下では、 $(E-A)^{-1}B > 0$ にして且つ行列加速度 C の各列には必ず正のエLEMENT が存在するから、 $(E-A)^{-1}C \equiv BC \equiv F > 0$ となる。しかし、いづれにしても、一般に非負と考えられる行列 F に固有なる特性根の性質を吟味することが、吾々の問題である。

$$\text{今、 } p = \frac{\lambda}{\lambda-1} \text{ を變形して}$$

$$(2.29) \quad \lambda = \frac{p}{p-1}$$

としよう。そこで p に種々の數値を代入して λ の變動をみれば、吾々は第四圖のグラフをもつことが出来る。この圖表より、 $p=1$ ならば $\lambda=1$ となり、 $p < 0.5$ の範圍では λ は凡て安定の領域に屬し、 $p > 0.5$ の範圍では λ が不安定の

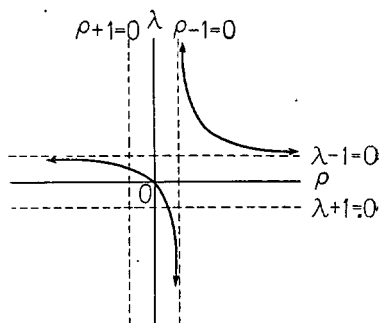


Fig. 4 $\rho = \frac{\lambda}{\lambda-1}$

領域に属することが明瞭となるであろう。かくして吾々の問題は、如何なる場合に ρ が 0.5 より小となるか、を尋ねることである。蓋し、この場合に限り、 λ の絶對値は凡て一より小であり、體系は動學的に安定となり得るからである。

先ず、豫備定理(1)及び(2)によつて、もし非負行列 F の各列のエレメントの合計が凡て 0.5 よりも小ならば、凡ての ρ の絶對値は 0.5 よりも小であり、従つて凡ての λ の絶對値は一より小である。これに對し、各列のエレメントの合計が凡て 0.5 よりも大ならば、少くとも一個の ρ については 0.5 よりも大であり、従つて一個の λ は一より大なる絶對値をもつ。然るに、

$$(2.30) \quad (1, 1, \dots, 1) B \equiv (1, 1, \dots, 1) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \equiv (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

$$(2.31) \quad (1, 1, \dots, 1) C \equiv (1, 1, \dots, 1) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \equiv (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$$

とすれば、既述のように、 β_i は第 i 部門の總乗數效果を示し、 γ_i は第 i 部門の總資本係數を示すこととなる。従つて、

$$(2.32) \quad (1, 1, \dots, 1)F \equiv (1, 1, \dots, 1) \left(\begin{array}{c} f_{11} \quad f_{12} \dots f_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ f_{n1} \quad f_{n2} \dots f_{nn} \end{array} \right) \equiv (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$$

と置けば、 $BC \equiv F$ なる故、豫備定理(3)により、

$$(2.33) \quad \beta \cdot \gamma \leq \phi \leq \beta \cdot \gamma$$

の成立することは明白であろう。ここに、 $\beta \cdot \gamma \cdot \phi$ はそれぞれの列和の中の最大なるものを示し、 $\beta \cdot \gamma \cdot \phi$ はその最小なるものを示している。かくして、行列乗数と行列加速度との結合より得られる行列について、その各列のエレメントの合計は、最大なる總乗數效果 β と最大なる總資本係數 γ との積よりも大ではなく、最小なる總乗數效果 β と最小なる總資本係數 γ との積よりも小ではない、ということが明かとなる。

所で吾々は、前章において、命題^{(1), (3)}の成立を明かにした。これによれば、

$$(2.34) \quad (1, 1, \dots, 1)A \equiv (1, 1, \dots, 1) \left(\begin{array}{c} a_{11} \quad a_{12} \dots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{n1} \quad a_{n2} \dots a_{nn} \end{array} \right) \equiv (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

を各産業部門の總支出性向をエレメントとした行ベクトルとした場合に、

$$(2.35) \quad \frac{1}{1-a} \leq \beta \leq \frac{1}{1-a}$$

が成立する。ここに、 $\bar{\alpha}$ は凡ての産業部門の總支出性向の中の最大なるものであり、 α はその最小なるものである。そこで、この關係を (2.35) 式に代入すると、

$$(2.36) \quad \frac{1}{1-\bar{\alpha}} \cdot \gamma \leq \rho \leq \frac{1}{1-\alpha} \cdot \gamma$$

が得られる。かくして吾々は、行列 F の性質を、各産業部門の總支出性向と總資本係數の大きさによつて分析することが出来る。

今、(2.36) 式の特性方程式で決定される n 個の特性根 ρ の中で、他のいずれの根よりもその絶對値の小ならざる正根を ρ_1 としよう。行列 F は非負行列であるから、豫備定理 (1) によつて、かかる ρ_1 は必ず存在する。然るに豫備定理 (2) によつて、 ρ_1 は非負行列 F の各列和の最大値と最小値の間に存在するから、 $\phi \leq \rho_1 \leq \phi$ である。かくして (2.36) 式より、

$$(2.37) \quad \frac{1}{1-\bar{\alpha}} \cdot \gamma \leq \rho_1 \leq \frac{1}{1-\alpha} \cdot \gamma$$

を得る。然らば、如何なる場合に ρ_1 は 0.5 より小、従つて λ の絶對値は一より小となり得るか。

現實にそうであるように、吾々は凡ての部門の總支出性向 α_i が一より小なる正數であると前提しているのであるから、

$$(2.38) \quad \frac{1}{1-\bar{\alpha}} \cdot \gamma < 0.5$$

なる場合には、 $\rho_1 < 0.5$ であり、従つて凡ての λ の絶對値が一より小であることは明白である。即ち、この場合には、

體系は確定的に安定である。これに對して、

$$(2.39) \quad \frac{1}{1-\alpha} \cdot \gamma > 0.5$$

なる場合には、明かに $0 < \gamma < 0.5$ であり、従つて少なくとも一個の λ については、その絶対値が一より大なるものが存在する。かくて、體系は確定的に不安定である。前章の規定に従つて、 $\frac{1}{1-\alpha} \equiv \frac{1}{s_i}$ を條 i 部門の投資乗數と名付けるならば、吾々は次の命題を得る。

命題 (2.1) 「凡ての産業部門の限界支出性向が一より小なる場合、最大なる資本係數と最大なる投資乗數との積が 0.5 よりも小であれば、行列乗數と行列加速度の結合體系は充分に安定である。」

最小なる投資乗數さえも一より小とはなり得ないことを省るならば、(2.39) 式より次の命題の成立も直ちに明らかであらう。⁽⁸⁾

命題 (2.2) 「凡ての産業部門の限界支出性向が一より小なる場合、總資本係數の最小値が 0.5 よりも大であれば、行列乗數と行列加速度の結合體系は確定的に不安定である。」

さて、興味ある一つの問題にふれよう。一階定差方程式に對象を限定する限り、(2.4) 式で示される巨視的動學模型では、 $\sqrt{s_i}$ ならば決して振動解は現われない。しかし吾々の體系は、同じように一階定差方程式の體系を取扱つており、しかも $\sqrt{s_i}$ (但し s_i は最大なる減漏係數を示す) であつても、事情によつては振動解を持ち得るのである。一般に、行列 F は對稱行列 ($s_i = s_i$) ではないから、代數學の周知の定理に従つて、凡ての根が實根であるという保證は存在しない。このことだけからしても、多部門模型 (但し三部門以上) が振動解を持つ可能性は強いであらう。しか

し、たとえ虚數部をもつ根が存在しなくても、定差方程式體系では、負根の存在が振動解を示すこととなる。今、吾々の經濟體系が安定であると假定しよう。豫備定理(1)によつて、行列 F は他の凡ての根の絶対値よりも小ならざる正根 ρ_1 を持つてであらう。假定により $0.5 < \rho_1 < 1$ であるから、第四圖より明白なように、 $0 > \lambda_1 \equiv \frac{\rho_1}{\rho_1 - 1} > -1$ であり、且つ λ_1 の絶対値は他の凡ての ρ より決定される λ の絶対値よりも小ではない。即ち、體系が安定ならば、絶対値が他の根よりも小ならざる負根が存在することとなり、體系は必ず振動的経路を示すに至る。かくして吾々は、次の命題を得る。⁽⁹⁾

命題(2.3) 「若し行列乗數と行列加速度の結合體系が動學的に安定ならば、各産業部門の產出量の時間経路は必ず振動的である。」

一般的には、第四圖より容易に觀察されるように、 ρ が一より小ならば、 λ の中には必ず負のものが存在することとなる。かくして次の命題を得る。

命題(2.4) 「若し行列乗數と行列加速度の結合より得られる行列の各列和が一より小であるならば、各産業部門の產出量の時間経路は必ず振動的である。」

(1) 若し、ドマーが假定しているように、投資函數及び貯蓄函數をそれぞれ

$$(1) \dots\dots I(t) = v \frac{d}{dt} Y(t)$$

$$(2) \dots\dots S(t) = s Y(t)$$

で示すならば、 $I(t) = S(t)$ より Y に關する一般解を求めると

$$(3) \dots\dots\dots Y(t) = Y(0)e^{vt}$$

となる。ここに $Y^{(0)}$ は第 0 期における國民所得水準、 v は自然對數の底である。これを t について微分すると $\frac{d}{dt} Y(t) \equiv Y(t)$

$$\equiv \frac{1}{v} \cdot Y(t)^{\frac{1}{v}} \text{ であるから、}$$

$$(4) \dots\dots\dots \frac{Y(t)}{Y(t)} = \frac{1}{v} \equiv g$$

となり、吾々が定差方程式體系に關して得たのと全く類似の結果に到達する。

所でヒックスは、ハロッドの論評において、定差體系 (23) 式より $\frac{1}{v} \equiv \frac{1}{s}$ (但し、ヒックスの記號では v は c である) を導出し、「若し s が v と比較して小さければ、これ (g) は、近似的には $\frac{s}{v}$ に等しい。」という容認し難い結論を導いてゐるが、これは完全な誤りである。

J. R. Hicks, "Mr. Harrod's Dynamic Theory," in *Readings in Business Cycles and National Income*, 1953, p. 254.

(2) 例えば、一八七九年—一九二五年のアメリカ合衆國については、

$$K = 3.44Y - 3.264.$$

(但し、單位は、一九二九年を不變價格とせる十億ドル)、一九一三年—一九三五年の日本經濟については、

$$K = 4.49Y - 1.725$$

(但し、單位は、一九二八年—一九三二年を不變價格とせる十億圓) が導出されている。

W. Fellner, "The Capital-Output Ratio in Dynamic Economics," in *Money, Trade, and Economic Growth*, 1951, p. 133

伊東政吉「資本蓄積(一)」『日本經濟の分析』所收、一三五頁。

年次のズレを暫らくおいても、アメリカと日本の資本係數の大小關係を如何に説明すべきであらうか。そしてこれに Platt-

able な説明を與えても、統計データの少しばかりの加工によつて、大小關係は簡単に逆轉する。國富推計に關係した者なら誰でも知つてゐる通りに、これらは、餘程大膽でなければ、科學的分析の資料とは看做し得ないであろう。

(3) ハロッドの模型 (C) II に従いながら、農業部門と非農業部門の分割を行おうとする試みが行われている。

大川一司「資本の形成過程と農業」經濟研究第四卷第一號。

これも構造分析の一つの接近方法なのだが、最初から歴史的に限定された目的にしか役立たず、しかも、 $G \cdot G_{10} \cdot G_{12}$ の相互關係によつて經濟變動の種々相を分析しようとするハロッドの意圖と如何なる關係を有するかが明かではない。特に、ハロッドの模型に囚はれている限り、資本の構成という問題には、何等積極的な展開を期待することは出来ない。

(4) ベームの輪環圖やハイエクの梯型的生産構造圖式にみられるように、オーストリア資本學說に固有な生産構造や資本構造の理論を、現代の所得分析の手法に如何にして結びつけるか、という問題は、吾々の大きな理論的關心であつた。吾々の所論は、この問題に對する一つの解決方法である。しかも、直線進行的なベーム II ハイエクの生産構造に對して、吾々のシエーマはより一般的な複線回歸の生産構造を前提しており、同時に、資本構造の問題を全面的に採り上げている。

(5) これは、「フロベニウスの定理」として知られている。

芳賀半次郎「國際貿易の安定條件」經濟學論集・第二十卷第三號。

(6) 豫備定理 (1) により、 λ_1 は特性方程式 $f(\lambda) = |E\lambda - A| = 0$ (但し $A \in V_0$) の根であり、 λ_1 に固有な特性ベクトル $x^{(1)}$ (但し、 $x^{(1)} = \{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}\}$) は非負のエレメント ($x_{1i} \geq 0$) から成つてゐる。従つて、縮約方程式 $\lambda_1 x^{(1)} = A x^{(1)}$ を展開し、邊々相加えるならば、

$$(1) \dots \dots \lambda_1 \sum_{j=1}^n x_{1j} = \sum_{j=1}^n a_{1j} x_{1j}$$

を得る。今、 $\alpha = \max_{j=1}^n a_{1j}$, $\alpha = \min_{j=1}^n a_{1j}$ とし、且つ $x^{(1)} \in V_0$ を考慮すれば、明かに次式が成立する。

産業連關の理論に關する一研究

$$(2) \dots\dots\dots \bar{a} \geq \lambda \geq a$$

勿論、凡ての列和が等しい時には、この不等號は消える。

(7) 一般に、非負行列 $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}$ の積行列

$$B \equiv A^{(1)} \cdot A^{(2)} \cdot \dots \cdot A^{(n)}$$

を考えると、 $\bar{a}^{(1)} = \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} \equiv \min_k \sum_{j=1}^n a_{kj}^{(1)} \leq \lambda \leq \bar{a}^{(n)}$

$$\bar{b} = \max_k \sum_{j=1}^n b_{kj} \leq \bar{a}^{(1)} \cdot \bar{a}^{(2)} \cdot \dots \cdot \bar{a}^{(n)} \leq \lambda \leq \min_k \sum_{j=1}^n b_{kj} \leq a^{(1)} \cdot a^{(2)} \cdot \dots \cdot a^{(n)}$$

である。命題(1)も、この定理を利用すれば直ちに導出することが出来る。

(8) 以上の諸命題は、動學的安定又は不安定の充分條件であつて、必要條件ではない。吾々の經濟體系が安定であるための必要にして充分なる條件は、行列 $(0.5E - F)$ の首座小行列式が凡て正となること、即ち、

$$0.5 - f_{ii} > 0, \quad \begin{vmatrix} 0.5 - f_{ii} & -f_{ij} \\ -f_{ji} & 0.5 - f_{jj} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} 0.5 - f_{ii} & -f_{ij} & -f_{ik} \\ -f_{ji} & 0.5 - f_{jj} & -f_{jk} \\ -f_{ki} & -f_{kj} & 0.5 - f_{kk} \end{vmatrix} > 0, \dots,$$

が成立することである(但し、 $|E - A| \neq 0, |C| \neq 0$)

この命題は、「メツラーの定理」を用いることにより、簡単に證明することが出来る。メツラーは、非負行列 F の特性根が凡て單位圓の中にあるための必要にして充分なる條件は、行列 $(E - F)$ の首座小行列式が凡て正となることを證明した。

L. Metzler, "A Multi-Region Theory of Income and Trade," *Econometrica*, 1950, Oct., p. 339.

所で吾々の場合にも、 F は非負行列であり、且つ他の根よりも絶対値小ならざる正根は、0.5 よりも小さいことが安定の必要且つ充分なる條件であるから、0.5 を半徑とするガウス平面上の圓内に F の特性根が凡て存在することが、安定の完全條件を形

成する（もし、 -0.5 よりも小さい根があれば、豫備定理(1)によつて、 0.5 よりも大なる根が存在する）。これは「メツラーの定理」によつて、 $(0.5E - N)$ 又は $(E - 2N)$ の首座小行列式が凡て正となることである。

(9) 實はこの命題の成立が、吾々の分析の對象を、(2.21)式の如き一階定差體系から、例えば次章(3.19)式で示される如き二階定差體系に移行させる理由なのである。通常、一般的收縮の過程は、體系が動學的に安定なる場合と考えられる。このような場合に、體系が靜學的水準を中心に、每期、正・負の振動を示すと考えるのは、明かに現實的ではない。ヒックスが分析しているように、下降過程は靜學的水準への單調な收斂過程と看做さるべきである。

III 變動過程の部門分析

(1) 經濟成長の構造模型

さて吾々はこれまで、行列乗數と行列加速度の結合體系の安定條件について吟味してきた。今、この結合體系が不安定であると假定しよう。即ち、(2.25)式で示される特性方程式

$$f(\lambda) \equiv | \lambda(E - A) - (\lambda - 1)C | = 0$$

で決定される λ の中に、絶対値が一より大なる根 λ_1 が存在するものと假定する。又、同じことであるが、(2.28)式で示される ρ に關する特性方程式

$$f(\rho) \equiv | E\rho - (E - A)^{-1}C | \equiv | E\rho - F | = 0$$

の中に、 0.5 よりも大なる根 ρ_1 が存在するものと假定するのである。然らば、經濟體系は何時まで發散的時間經路を維

持し得るであらうか。

まず、(2.21) の式の完全解を求めてみよう。簡単のために、 $\xi(t) \equiv \xi \equiv \xi$ とすれば、これは形式的に次のように書かれる。

$$(3.1) \quad \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \lambda_1^{t-1} \\ a_2 \lambda_2^{t-1} \\ \vdots \\ a_n \lambda_n^{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

茲に、 λ_i は特性方程式 (2.25) 式で決定される根であり、重根が存在しないものと假定されている。 a_i は初期條件で決定される任意常數、 h_{ij} は λ_j を特性方程式に代入した場合の第 j 行第 i 列エレメントの餘因數を示し、右邊第二項は行列乘數の靜學的水準を示している。

今、條件を更に強めて、 λ_1 を絶対値最大なる正根としよう。 ρ について言えば、 λ_1 を規定する ρ_1 は一より大である。この場合には、時間の経過と共に、 λ_1 が全經濟體系の運動を支配するに至る。更に、簡單化のため、體系を完全連結のものと考える。即ち $F \succ 0$ である。かくて、各産業部門の長期均衡成長率は、時間を充分大にとれば、

$$(3.2) \quad g_i \equiv \frac{\Delta y_i(t)}{y_i(t)} = \frac{h_{i1} a_1 (\lambda_1^{t-1} - \lambda_1^{t-1-1})}{h_{i1} a_1 \lambda_1^{t-1}} = 1 - \frac{1}{\lambda_1} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

或いは同じことであるが、

$$(3.3) \quad g_i = 1 - \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\rho_1} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

によつて示すことが出来る。前章の豫備定理(1)によつて、 $F_i > 0$ ならば、

$$(3.4) \quad h_i > 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

であるから、初期條件で決定される任意常数が0でなければ、凡ての産業部門は同一の發展率で同一の方向に成長してゆくことが知られる。

さて、ここで興味のある一つの問題にふれよう。前提により、 λ_1 は絶対値最大なる正根であるから、(2.37)式の關係を(3.3)式に適用する。即ち、 $1-\alpha \equiv s; 1-\alpha \equiv s$ と置きて(2.37)式の各々の逆數をとれば、明かに不等號は逆になり次式が得られる。

$$(3.5) \quad \frac{s}{\gamma} \leq \gamma = \frac{1}{\rho_1} \leq \frac{s}{\gamma}$$

この不等式により、長期均衡成長率 γ は、一方では $\frac{s}{\gamma} \leq \gamma$ であり、他方では $\gamma \leq \frac{s}{\gamma}$ なることが知られる。かくして吾々は、次の命題を歸結することが出来る。

命題(3.1) 「凡ての部門の限界支出性向が一より小なる經濟體系において、 λ_1 が絶対値最大なる正根とすれば、この

體系の長期成長率は最小なる減漏係數(s)と最大なる資本係數(γ)の比率よりも小ではなく、最大なる減漏係數(s)と最小なる資本係數(γ)の比率よりも大ではなく。」

明かなように $s \equiv s; \gamma \equiv \gamma$ の時には不等號は消滅する。即ち、 $s\gamma \equiv s$ である。かくして次の命題を得る。

命題(3.2) 「若し凡ての産業部門の限界支出性向が等しく且つ資本係數も等しければ、この體系の長期均衡成長率は減漏係數と資本係數の比率に等しく。」

この最後の命題より、吾々は容易にハロッド流の巨視的模型における周知の公式の(1)との形式的同類性を類推することが出来るであらう。實際、ハロッド流のマクロ分析は、凡ての産業部門の限界支出性向が等しく、且つ資本係數も凡て等しい場合を容易に連想せしめる如き分析であると言えるであらう。(1)

さて、凡ての産業部門がこの長期均衡成長率の軌道を進むならば、吾々は、規則的に發展する擴張再生産の圖式を得るのである。かかる前提の下では、單に各産業部門の產出量のみならず、各産業部門間の取引量及び資本蓄積量も、共に同一の成長率で發展するであらう。(2)勿論、現實は、定常と考えられている最終財需要が不斷に變動し、更に、コンスタントと假定されている投入係數や資本係數も技術的革新や價格變動によつて變化する。しかし、これらの與件や構造パラメーターの變動は、比較靜學・比較動學の問題として處理されるのであつて、その限りでは、吾々の模型分析の意義を奪うものではない。

多部門分析に立脚せる以上の成長模型は、各産業部門の現存資本量が現在の成長率を維持するのに適當な必要資本量と一致している限り、ad infinitumに成長の軌道を維持し續ける。従つて、この成長率を妨碍する他律的要因が現われない間は、各産業部門の一般的擴張の方向を一般的收縮の方向に逆轉せしめる理由は存在しないと云はねばならない。しかし、例えばハロッドによつて注意されたように、人口・資源・技術水準の如き與件が許容し得る自然的成長率が各産業部門の現實の成長率よりも低位にあるならば、何時かはそれらの成長率に頭打ちが到來するであらう。一般にボトル・ネックと呼ばれるかかる現象が、最初にどの産業部門に現われるかといふことは、吾々の直接的關心事ではない。最初に消費財部門に現われるか、投資財部門に現われるか、又は原料供給部門に現われるかは、

各産業部門に配分された利用可能資源の大きさとその成長率に依存するのである。更に、生産隘路の原因についても一般的命題を樹てゐることは困難である。蓋し、それが資源の涸渇によるか、労働力の不足によるか、又は輸入原料の隘路によるかは、その時々々の具體的事情がこれを決定するからである。いずれにしても、ここで吾々にとつて重要な認識は、或る部門に生じた生産隘路が、その部門の産出量を原料とする他の部門の生産隘路を誘發し、それが再び自己部門に回歸するという仕方であれば循環的にその影響を傳播し合いながら、全面的なボトル・ネックを招來するであろうということである。

(2) ボトル・ネックと景氣の崩潰

今、第 t 期において全面的なボトル・ネックが到來したと考へよう。勿論、かかる時點が到來するまでには、部分的生産隘路が全面的となるに要する経過時間や、産業部門間の利用資源の移動などの事情が考慮される必要がある。いずれにしても、全面的生産隘路の時點が到來するならば、各産業部門は、最早從來の成長率を維持し得なくなる。この關係を記號的に

$$(3.6) \quad y(t+1) - y(t) \equiv \Delta y(t+1) = 0$$

で示すことにする（より正確には、各産業部門に配分された労働・資源・技術水準などの許容し得る自然的成長率の中で最も小なるものを y とすれば、 $\Delta y(t+1) = \bar{y}(t) \neq 0$ である⁽⁸⁾）。もし經濟の現實がかかるものであるとすれば、第 t 期に實現された生産水準を今後そのまま維持し續けるか、又は、各産業部門の自然的成長率の中の最小なるものに規整されながら進行するであろう。吾々は、少くとも一階定差の吾々の模型の下では、全面的生産隘路に到達した經濟體系が、成長

の方向を逆轉して一般的收縮の方向に向きを変へる必然性を歸結することが出来ない。

しかしながら、現代の景氣變動理論では、全面的ボトル・ネックに續く下方轉換は殆ど必然的であると結論されているから、吾々も構造分析に立脚しながら、下方轉換の一つの *plausible* な分析を與えようと思う。

前提に従い、行列 A 及び C によつて決定される特性根の中には、經濟體系を全面的に擴張せしめる根が存在する。そしてこれは、行列乘數及び行列加速度が不變なる限り維持されるであろう。しかしながら、何等かの原因によつて構造パラメーターの變動が生起するならば、この前提は崩潰する。凡ての特性根は新しい行列の下で計算されるのであつて、經濟體系はこれまでとは違つた新しいレヂームを運行することとなる。もしこのレヂームが動學的に安定ならば、經濟體系は全面的ボトル・ネックの緊張を破つて、一般的收縮の過程に方向轉換する。

さて、(3.5) 式が維持されるような全面的生産隘路が實現したとしよう。明かにかかる狀況の下では、如何なる産業部門も、他の産業部門の收縮という犠牲を拂うに非されば、その產出量を擴張しようにも擴張し得ないであろう。然るに、各産業部門には、構造パラメーターが不變なる限り、從來の長期成長率を維持しようとする潜在的エネルギーが不斷に存在しているから、例えば勞賃の引上げという形で、他の産業部門から生産諸要素を吸収し、自己部門の生産量を擴張しようとする努力するであろう。ハイエクによれば、好景氣過程におけるかかる生産要素の移動は、所謂迂回生産過程の延長という形で消費財産業部門から投資財産業部門に對して生ずるものとされているが、吾々の場合には、それがどのような部門に生起するかは問題ではない。一般に第 *i* 部門がかかる犠牲産業であるものと假定する。如何なる事態が推移するか。

今、第 i 期にかかる事態が生ずるならば、第 j 部門は第 i 期以後には最早從來の生産水準をさえも維持し得なくなるであろう。従つて、

$$(3.7) \quad dy_i(t+1) \equiv y_i(t+1) - y_i(t) < 0$$

が成立する。所で、加速度原理が依然として作用し續けるならば、

$$(3.8) \quad \Delta k_j(t+1) \equiv k_j(t+1) - k_j(t) = \sum_{i=1}^n a_{ij} dy_i(t+1) \equiv y_j dy_j(t+1) < 0$$

となり、負の資本蓄積が計算されることとなる。若し資本蓄積量が正の方向と全く對稱的に負の方向にも變動し得るならば、事態は至極簡單であろう。即ち、第 j 部門の現存資本量は、必要資本量の水準を維持しながら次第に減少してゆく。これは在庫品の場合には妥當する。しかし多く固定資本設備については眞實ではない。例えば改良された土壤のように、一旦建設されるならば殆んど無視し得る程度においてしかその價値を減じ得ないものもある。一般に建物資本と呼ばれる資本設備は、多かれ少かれこの種のタイプに屬している。更に、機械資本と呼ばれるその他の多くの資本設備は、精々の所、使用に基付く減價償却に對應した限度である價値を減じてゆくに過ぎない。

かくして、第 i 部門が第 j 部門の固定資本財供給部門であるならば、一般に

$$(3.9) \quad a_{ij} > 0 \quad \text{for} \quad dy_j(t) \geq 0$$

$$(3.10) \quad a_{ij} = 0 \quad \text{for} \quad dy_j(t) < 0$$

を前提しなければならない。即ち、固定資本に關する加速度原理は、ヒックスの指摘するように、上昇過程においては作用するけれども、一度び下降過程に轉ずるならばその機能を停止する。⁽⁶⁾

吾々は第一章において、流量と考えられている投入係數 a_{ij} の中には、その價值を凡て產出量の中に移轉する減價償却部分も含まれていることを指摘した。實際、減價償却部分の補填投資は change-induce であるより level-induce であるとするのが現實的である。従つて、第 i 部門が第 j 部門の資本財供給部門であるならば、 $y_{ij}(t) = a_{ij} y_j(t)$ は、第 i 期 第 i 部門が第 j 部門の資本設備の減耗部分に對して行ふ資本供給量を示すこととなる。所で、

$$(3.11) \quad a_{ij} y_j(t) + e_{ij} \Delta y_j(t) > 0$$

とすれば、必要な減價償却量が資本係數で計算された負の投資量よりも多いこととなり、減價償却部分の補填投資を凡て中止してしまえば、第 j 部門の資本存在量は必要量よりも不足するであらう。これに對してもし、

$$(3.12) \quad a_{ij} y_j(t) + e_{ij} \Delta y_j(t) < 0$$

なる場合、たとえ減價償却部分の再投資を中斷しても、尙必要な負の投資が存在することとなる。同様の類推によつて、

$$(3.13) \quad a_{ij} y_j(t) + e_{ij} \Delta y_j(t) = 0$$

の場合には、減價償却部分の再投資の中止が正に必要とされる負の投資と一致する。

これらのケースの中、吾々にとつて重要なのは第二及び第三の場合である。即ち、第 j 部門の產出量が負の發展率をもつ場合、もしも (3.11) 式及び (3.12) 式で示される事態が発生するならば、減價償却部分の再投資の中止、従つて a_{ij} は 0 とならなければならない。

そこで、記號を次のように定めよう。

$$\text{If } e_{ij} \longrightarrow 0, \text{ then } C \longrightarrow C^*$$

If $a_{ij} \rightarrow 0$, then $A \rightarrow A^*$.

即ち、行列 C 中の任意の正のエレメント a_{ij} を 0 に變換した場合の行列を C^* で示し、行列 A 中の任意の正のエレメント a_{ij} を 0 に變換した場合の行列を A^* で示すこととする。勿論これは、複數個のエレメントを同時に變換した場合を含んでいる。一般的には $0 \leq C^*, A \leq A^*$ である。

さて、これだけの準備の下に本題に入る。今、第 i 期において第 j 部門の產出量が一期前のそれよりも減少し、 A が A^* に、 C が C^* に變換されたとしよう。この場合の構造方程式は明かに

$$(3.14) \quad y(i) = A^*y(i) + C^*Ay(i) + \varepsilon$$

によつて示される。吾々は、(3.1) 式で示したのと全く同様の手續きによつて、この方程式の一般解を求めることが出来るであらう。ここで、前章における特性方程式と區別するために、(3.13) 式の特性方程式を

$$(3.15) \quad f(\lambda^*) \equiv |\lambda^*(E - A^*) - (A^* - I)C^*| = 0$$

$$(3.16) \quad f(p^*) \equiv \left| \frac{\lambda^*}{\lambda^* - 1} E - (E - A^*)^{-1} C^* \right| \equiv |E p^* - F^*| = 0$$

で示すならば、これらはそれぞれ λ^* 及び p^* に關する n 次の方程式である。

若し、この特性方程式で決定せられる λ^* の中に依然として一より大なる根 λ_1^* が存在するならば、體系は收縮の過程に向うことはないであらう。勿論、 λ_1 と λ_1^* は異り得るし、従つて體系の成長率も異り得る。しかし、全面的ボットル・ネックが上昇限界線を劃している限り、それに續く諸歸結は吾々が以上に分析してきた事態を繰返すだけである。

これに對して、變換された行列の下で規整される體系が動學的に安定ならば、如何なる事態が推移するであらうか。

明かに凡ての特性根 λ^* の絶對値は一より小であるから、他の事情にして不變なる限り、體系は下方に轉換しなければならぬ。勿論、在庫品の如き流動資本の場合には、たとえ產出量水準が下落しても、負の方向に加速度原理が作用する餘地は殘されている。従つて、即時的に行列加速度の凡てのエレメントが0に變換されることはないであらう。しかし、若干の固定資本設備については、明かに減耗部分の補填投資の積立てを超える遊休設備の累積は殆んど必然的であり、所謂 *idle capacity* は自己累積的に膨脹してゆく。

かくして吾々は、何故に全面的ボトル・ネックの緊張が崩潰して一般的收縮過程に轉換するかという問題について、一つの可能的分析を與えた。逆説的ではあるが、上昇限界線を破つてその產出量を擴張せしめようとする各産業部門の努力が、經濟體系を收縮の過程に導くのである。若し、與件が許容し得る限りの自然的成長率に各産業部門が満足しているならば、吾々の模型の下では、上昇限界線より下方轉換に至る必然的理由は存しないように思われる。蓋し、その時には、現存資本量と必要資本量は常に一致しているのであつて、これまでの長期成長率を改訂せしめるような構造パラメーターの變動は生じ得ないからである。

所で、擴張のレヂームから收縮のレヂームに變換された經濟體系は、命題^(2, 3)によつて、必ず振動的であることに注意しよう。前提によつて、 $\Delta y(t) \geq 0$ なる場合には常に $\dot{y}(t) > 0$ であるとすれば、下降過程の途次において、或いは再び C^* が C に、 A^* が A に變換される可能性が存在するかも知れない。蓋し、體系は必ず振動的なのであるから、たとえ收縮の過程においても、或る時期よりも高い產出量水準の實現が次期において可能となるからである。しかもこの可能性は、他の凡ての特性根の絶對値よりも小ならざる負根の存在によつて強められる。

しかしながら、かかる事態は生起しそうにない。何故ならば、下方轉換の動因は、遊休資本設備の出現による資本係數の消滅にあつたのであるから、たとえ收縮過程の途次において $\nabla \nabla \nabla$ が實現しても、若し過剰な資本設備が存在するならば、消滅したエレメントを再び正に還元する誘因が存在しないからである。このことを示すために、吾々は遊休資本設備の大きさについて検討しなければならない。

(3) 遊休生産能力と景氣の回復

吾々は前章第二節で、資本の構造を示す行列について關説した。今、

$$(3.17) \quad \bar{k}_{ij}(t) \equiv k_{ij}(t) - c_{ij} y_j(t)$$

と書けば、これは第 j 部門の現存資本量の中で第 i 部門より購入した部分が必要量を超過している部分を示している。従つて、行列

$$(3.18) \quad \bar{K}(t) \equiv \begin{bmatrix} \bar{k}_{11}(t) & \bar{k}_{12}(t) & \cdots & \bar{k}_{1n}(t) \\ \bar{k}_{21}(t) & \bar{k}_{22}(t) & \cdots & \bar{k}_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{k}_{n1}(t) & \bar{k}_{n2}(t) & \cdots & \bar{k}_{nn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) & \cdots & k_{1n}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) & \cdots & k_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1}(t) & k_{n2}(t) & \cdots & k_{nn}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_2(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y_n(t) \end{bmatrix}$$

は、各産業部門の遊休資本量をエレメントとする行列である。もし凡ての部門に遊休設備が存在しなければ、この行列は明かに零行列である。

既述のように、固定資本設備についての固有な性質は、加速度原理の非加逆性ということであつた。従つて、その産出量水準の下落が大きくて、減價償却部分の補填投資の中止によつてもなお現實資本量を必要資本量の水準に適應

せしめ得なければ、產出量水準の下落が続く限り、累積的に遊休生産能力を増加させるであらう。然らば、かかる下降過程は何時まで繼續するのであるか。

明白なように、各産様部門の產出量が正值である限り、資本設備の減耗は不可避免的である。従つて、下降過程において減耗部分の補填が行われなければ、各産業部門の資本存在量は各時點の產出量水準に應じて次第に減少するであらう。そこで、第 i 部門を資本財供給部門とし、第 j 部門に對する減耗部分の補填に相當する係數を a_{ij} で示すならば、第 t 期に下方轉換を示し加速度原理の作用を休止した第 j 部門の θ 期後における資本存在量は、遊休生産能力が存在する限り、

$$(3.19) \quad k_{ij}(t+\theta) = k_{ij}(t) - \sum_{\tau=1}^{\theta} a_{ij} y_j(t+\tau)$$

によつて示される。しかし、このような過程は永久的には存続し得ない。蓋し、各産業部門の產出量の動學的部分が0の水準に近接することはあつても、決して靜學的水準を割つて負の水準を示すことはないという明白な理由のために、資本設備の減耗部分の累積は、やがて遊休生産能力を消滅させるに至るからである。かくしてこの時點に到達すると、今まで休止していた減耗補填のための再投資は復活し、加速度原理は蘇生する。即ち $k_{ij} \rightarrow 0$ と共に、 $0 \rightarrow a_{ij}$ 及び $0 \rightarrow c_{ij}$ が自動的に現われて來るのである。

さてここで注意すべきことは、たとえ上昇過程における資本蓄積の速度が各産業部門において均齊であつても、下降過程ではかかる保證は存在しないということである。それは景氣轉換點において各産業部門に現存する資本設備の大きさとその構成及び減價償却の程度に依存して決定される。従つて、或る産業部門では既に遊休設備が存在してい

ないにも拘らず、他の部門には未だ遊休生産能力が存在しているかも知れない。更に同じ産業部門内においても、或る資本財項目に關しては既に加速度原理の作用が始つており、他の資本財項目には遊休生産能力が依然として持續していることも考えられるのである。かくて、屢々巨視的所得分析で假定されているような凡ての産業部門について集計した遊休生産能力の概念や平均的に考えられた減價償却率の概念は、上述の構造的異質性に基づく多くの重要な問題を、少くとも解析的な問題としては分析の最初から無縁なものとして遮斷するに等しいといわねばならない。

いずれにしても、一般的收縮の過程において、經濟體系を再び上昇過程に導くような構造パラメーターの變換、例えば C^* を C^{**} に、 A^* を A^{**} にするような變換が自動的に生ずるならば、たとえ未だ遊休生産能力をかかえている産業部門が存在していても、擴張のエネルギーは再び保持されるであろう。遊休生産能力を持つ産業部門が、他の産業部門における投資活動の復活によつて生産擴張の繁榮を共に享受し得るという事實——そしてこれは景氣上昇の初期段階では普遍的に認められる事實である——は、マクロ的分析の理論的武器によつては充分には取扱ふことの出来ない問題群の一つである。蓋し、既に指摘したように、巨視的資本方程式では加速度係數は唯だ一個のみに限られており、遊休生産能力が消盡する時にのみプラスに變換されるものと考えられているからである。

かくして、一旦上方轉換を経験した經濟體系は、部分的に點在していた遊休生産能力をも順次に解消させるであろう。そして、 A^{**} を A^* に、 C^{**} を C^* に變換することによつて、吾々が先に分析した均齋に發展する一般的擴張の段階に再び突入するのである。同じく上昇過程と言つてもその各局面において加速度係數が異なる數値をとるといふ非線型性の問題は、吾々の構造構型では、言わば内部的必然性によつて容易に説明し得られるのである。何故に景氣の上昇や下降

が加速度的であるか、という累積過程の分析は、構造パラメーターの逐次的點滅の現象を媒介することなしには、充分に解明し得られるものではない。

尙、吾々が分析の手段として採用した非線型問題の解析方法について一言しよう。經濟變動の各局面をそれぞれ異なる線型方程式によつて分析し、これらの方程式を piecewise に積み重ねてゆくことにより一つの完結した經濟變動の模型を彫琢しようとする方法は、レオンチェフによつて Multi-phase theory と名付けられたものである。體系を一つの局面から他の局面へ切換えるのに必要な構造パラメーターの變換が自動的に行われ、しかもその變換が經濟的必然性の理由によつて正當に説明し得られるならば、この方法は經濟分析の有效な武器としての價值を發揮するよう思われる。非線型問題に對する巨視的分析の最近の發達⁽⁸⁾や、産業交流の動學分析に對するレオンチェフ⁽⁹⁾・ジュスク・レーゲンの貢獻⁽⁹⁾は、明かにこのことを示している。しかし本稿は、景氣變動理論の全面的分析を目的とするのではないから、この問題への立入つた研究は他の機會に譲られなければならない。

(4) 模型の擴張—殘された問題

以上において吾々は、構造分析に立脚した經濟變動理論の plausible な輪廓をスケッチした。勿論、上述の模型が産業交流の動態現象の分析にとつて適切であるか否かは、實證的研究によつて檢定されなければならない。しかし實證の問題を離れても、理論的に尙幾つかの問題がある。

第一に、吾々はケインズの手法に倣つて、即時的乗數の前提の下に分析を進めてきた。しかし現實は、乗數波及の過程においてさへタイム・ラグの存在が認められるのであり、特にボトル・ネックの各産業部門間への波及過程の

正確な分析のためにも、この問題への立入った説明が必要である。

第二に、吾々は今期の必要資本量が今期の産出量水準と對應するものと假定した。しかし企業者期待の在り方や資本財の生産には建設期間を必要とするという理由によつて、今期の必要資本量はタイム・ラグをもつた産出量水準に對應する、と考えるのがより現實であるだろう。

今、最も單純な場合として、それぞれのタイム・ラグが一期間であると假定しよう。この假定を吾々の模型(2.21)式に導入すれば、

$$(3.20) \quad y(t) = Ay(t-1) + Cy(t-1) + \xi \quad \text{or}$$

$$(3.21) \quad y(t) = (A + C)y(t-1) - Cy(t-2) + \xi$$

という二階定差方程式の構造模型を得る。一見して明かなように、行列及びベクトルを凡てスカラーと考えるならば、これはヒックスが景氣循環分析で用いた基本方程式と對應している。

若し吾々がこの模型の解明に成功するならば、産業交流の動態現象に對して、ヒックスが國民所得の消長運動について與え得た分析と同じ程度に、可成りの光明を投ずるものと思われる。しかし、(3.19)式の特性方程式

$$(3.22) \quad f(\lambda) \equiv |\lambda^2 E - \lambda(A + C) + C| = 0 \quad \text{or}$$

$$(3.23) \quad f(\lambda) \equiv \left| \frac{\lambda}{\lambda-1} (\lambda E - A) - C \right| = \left| \frac{\lambda}{\lambda-1} E - (\lambda E - A) - C \right| = 0$$

を展開してみれば容易に知れるように、この行列式の性質を解明するのに必要な數學的換作は、現在までの所、まだ充分ではない。⁽¹⁰⁾ 實際、吾々が一階定差系の構造模型の下で分析を進めてきたのは、前章第一節のマクロ的體系とのア

ナロジーにおいて巨視分析と構造分析の本質的相違を指摘することに主眼がおかれていたが、加えて、數學的操作の困難なることが吾々の分析を一階定差體系に局限せしめたのである。吾々の今後の課題も、この模型の性質の解明に向けられねばならぬ。

(1) 更に、時間を充分大にとれば、各産業部門の産出量の相對的比率は、近似的には

$$\frac{y_i(t)}{y_j(t)} \approx \frac{h_{ij} a_{ij}}{h_{ji} a_{ji}} = \frac{h_{ij}}{h_{ji}} \quad (i, j=1, 2, \dots, n)$$

によつて示される。

(2) 例えば、三部門構造について、次のような模型を考えよう。

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.5 \\ 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.30 & 0.45 & 0.30 \\ 0.75 & 0.60 & 0.90 \\ 0.45 & 0.45 & 0.30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dy_1(t) \\ dy_2(t) \\ dy_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$$

これより特性方程式を導けば、

$$f(\rho) \equiv |E\rho - (E-A)^{-1}C| = \frac{1}{(0.54)^3} \begin{vmatrix} \rho - 0.9555 & -1.0140 & -0.9510 \\ -0.7875 & \rho - 0.7200 & -0.8550 \\ -0.9570 & -0.9660 & \rho - 0.8940 \end{vmatrix}$$

$$\approx \begin{vmatrix} \rho - 5 & 0 & 0 \\ 0 & \rho + 0.24 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{vmatrix} = (\rho - 5)(\rho + 0.24)(\rho + 0) \cdot \rho = (\rho - 1.25)(\rho + 0.2)(\rho + 0) = 0$$

を得る。かくして完全解を求めるならば、

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16.7 & 0.3 & -0.2 \\ 4.1 & -0.1 & 0.1 \\ 4.9 & -0.7 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(1.25)^t \\ c_2(-0.2)^t \\ c_3(0)^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.74 & 1.01 & 1.05 \\ 0.55 & 1.36 & 0.55 \\ 1.04 & 0.96 & 1.73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

となる。 λ_2 及び λ_3 は僅かの時間の経過で殆んど無視することが出来るから、 λ_1 が全體系の運動を支配し、

$$g = 1 - \frac{1}{\lambda_1} = 0.2$$

がこの體系の長期成長率である。尚、 $\alpha = \beta = 0.3$, $\gamma = \tau = 1.5$ なる故、命題(2)により、 $\frac{s}{\gamma} = \frac{\alpha}{1-\gamma} = \frac{0.3}{1-1.5} = 0.2$ を得る。

ロビンソンは最近の著作で、規則的に進歩する経済の模型を、マルクス再生産表式とのアナロジーによつて、次のように展開している。

資 本 存 在 量				年 生 産 高				
	消費財 産 業	投資財 産 業	總 計	更 新	純投資	消 費 費	純所得	粗所得
第一年度	300	200	500	50	10	90	100	150
第二年度	306	204	510	51	10.2	91.8	102	153
第十年度	360	240	600	60	12	118	120	180

この表より、凡ての變数が二〇%の年率で成長しており、且つ、兩部門の資本係数が等しく10であることが知られよう。しかしこの模型は、國民所得項目で組立てられてゐるので、マルクスや吾々の場合とは根本的に異つてゐる。

J. Robinson, *The Lale of Interest and Other Essays*, 1952, p. 95

(3) 最小なる自然的成長率に依存する理由は、各産業部門の產出量が同時に他の部門の投入量となるために、產出量は最小な

る投入量によつて規整されるからである。

(4) F. Hayek, *Price and Production*, 1931.

(5) J. R. Hicks, *A Contribution to the Theory of Trade Cycle*, 1949, Chap. 4.

これは通常、加速度原理の非對象性 asymmetry として知られたものである。

(6) 資本不足の場合には、この行列が負のエレメントを持つものと考えられている。例えばハロッドによれば、現實成長率が保證された成長率の上方へ乖離すると、企業者は資本ストックの不足を察知し、この不足分を補うために投資を行う。そして、この投資は再び現實成長率を高め、更に資本の不足を招來するという仕方である。言はば遠心力的に經濟を擴張させるのである。確かに、同時にみると、上昇過程は資本不足と言ひ得るかも知れない。しかし異時的には、正に不足なる資本ストックを不斷に補つてゐるという意味では、たえず均衡してゐるのであり、この均衡化への努力が經濟擴張えのエネルギーとなつてゐるのである。現實成長率とは、正に異時的均衡方程式の解に他ならない。

(7) 如何なる時點においても、もし必ず

$$y(t) \geq (B-A)^{-1} \xi$$

$$(\leq 0)$$

とすれば、必要な資本存在量は、

$$K(t) \geq C(B-A)^{-1}(B\xi)$$

$$(\geq 0)$$

である。従つて、等號の場合が成立すれば、行列加速度は、自動的にCよりCに變換される。

(8) 安井琢麿、「自勵振動と景氣循環」理論經濟學、一九五二年十一月。

(9) W. Leontief, *Studies in the Structure of the American Economy*, Chap. 3. N. Georgescu-Roegen, *Activity Analysis of Production and Allocation*, 1951, Chap. 5.

しかし、レオンチエフの分析には疑問がある。彼は、吾々の場合とは異つて、その模型を、

$$(1) \dots\dots y(t) = Ay(t) + Cy(t) + \xi$$

という一階微分方程式で示してゐる。ここに $y(t) \equiv \frac{d}{dt}y(t)$ であり、且 $A \geq 0$, $C \geq 0$ である。この特性方程式は

$$(2) \dots\dots f(\lambda) \equiv |(E-A) - \lambda C| = |E - \lambda(E-A)^{-1}C| = 0$$

となる。若し、 n 個の特性根 λ_i の中に、實數部正なるものが一個でもあれば、この體系は發散體系である。簡單のために $\frac{1}{\lambda_1} \equiv \rho$ と置けば、 $\lambda_1 \neq 0$ なる故、(2)式は

$$(3) \dots\dots f(\rho) \equiv |E \frac{1}{\lambda_1} - (E-A)^{-1}C| \equiv |E\rho - F| = 0$$

と書ける。所で、レオンチエフが假定してゐるようによつて (Studies, p. 52)* $(E-A)^{-1}B \geq 0$ であれば $(E-A)^{-1}C \equiv EC \equiv F$ である。然るに、豫備定理によつて、非負行列は必ず正根をもつから、少くとも一個の根に就いては $\frac{1}{\lambda_1} \equiv \rho > 0$ である。即ち、體系は必ず發散解を示す。この限りでは、レオンチエフが經濟體系の長期的成長を前提してゐる立場 (Studies, p. 61) は正當化されるであらう。然るに、行列加速度 C の中の唯一個のエレメント c_{ij} が 0 に變換される場合について、彼が下方轉換の可能性を假定していることは、 $(E-A)^{-1}B \geq 0$, $C \geq 0$ なる限り不可能と言はなければならない。蓋し、變換された行列 C を C^* と示すと、 $(E-A)^{-1}C^* \equiv BC^* \equiv F^* \geq 0$ であるから、必ず實數部正なる根 λ_i^* が存在するからである。極端に言えば、行列 C の中にただ一個でも正のエレメントが存在する限り、體系が全面的下降運動を示すことはあり得ない。

(10) 但し、安定の充分條件は導出出来る。(3.21)式は簡單に次のように書改め得る。

$$f(\lambda) = \frac{\lambda E - (A + C)}{-C} : E = 0$$

然るに、たとえ負のエレメントを持つていても、その絶対値について考慮すれば、豫備定理(2)が適用出来るので、

$$(1, 1, \dots, 1)(A+C+C) \leq (1, 1, \dots, 1)$$

であり、且つこの行列が完全連結であれば、體系は充分に安定である。具體的に言えば、

$$a_i + 2r_i \leq 1$$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

なる場合である。

〔後 記〕

(一) 私は、この論文の若干の内容を、早稲田大學における理論經濟學會において報告した。しかし、以上の分析に對して、

$$y(C) = Ay(C) + CAy(C+1) + c$$

という模型の可能性も考えられる。私の模型では、今期の資本設備は、今期の產出量と對應しているが、この模型では、今期の資本設備は、次期の產出量に對應している。この場合の特性方程式は、明かに

$$K(\lambda) \equiv \left| \frac{1}{\lambda-1} E - (E-A)^{-1} C \right| = 0$$

となり、 $(E-A)^{-1} \geq 0$, $C \geq 0$, $(E-A)^{-1} C \geq 0$ なる限り、體系は確定的に發散的である。

生産期間の存在が認められる限り、資本設備が次期の產出量を制約することは事實である。しかし、そのことと、今期の投資決定が產出量に關する過去の information によつて行われるということとは別問題である。しかしいづれにしても、投資行為に關する見解については、供給面を強調する古典學派的接近と需要面にアクセントを置くケインジヤンの接近とがあり、從つて、模型の選擇も、この問題の解明が充分になされた後において決定されなければならない。私は、その一つの解決を、巨視的模型について與えておいた(「巨視的經濟變動の簡單な模型」理論經濟學所收)。

(二) 命題(1.5)に關して、私は、體系が完全連結ならば、凡ての産業部門が、少くとも(ロー)次の供給部門になることを知つた。