

可変ボラティリティを持つデリバティブ モデルの価格理論

藤 田 岳 彦

§1. イントロダクション

Black and Scholes ([1]) は、株価に対するヨーロッパオプションの価格を理論的に導出するという基本的な仕事を成し遂げ、それは、現在に至っても非常に重要な結果であり、実際の市場でもその公式は、広く使用されている。しかし、彼らの結果は、ボラティリティ（収益率の標準偏差）が一定という仮定の下に導かれており、実証研究によれば、必ずしも実際のデータと合致しない面もある。特に、為替や金利のモデルには、不向きであるといわれている。そこで、ボラティリティが変動するモデル（可変ボラティリティモデル）や、ボラティリティ自身が確率過程であるようなモデル（確率ボラティリティモデル）の解析が、重要な問題となる。

本論文では、まず、ボラティリティが平方根で与えられる $C \cdot I \cdot R$ モデルを取り上げ、ゼロクーポン債の価格の計算、一般のペイオフを持つヨーロッパオプションの価格の導出、また、 $C \cdot I \cdot R$ モデルを少し別な角度から見直しある下方境界を持つモデルへの応用について論じる。

次にボラティリティ自身が平方根過程となる確率ボラティリティモデル（Heston モデル）を考え、特性関数を通して、ヨーロッパオプションの価格の計算を実行する。 $C \cdot I \cdot R$ モデルも Heston モデルもその生成作

要素の係数が1次式であるという著しい特徴（アファインモデル）をもっており、そのため、ラプラス変換やフーリエ変換のテクニックが使えるのである。

最後にC・I・Rモデルを拡張して、筆者が提唱する上下にターゲットゾーンを持つあるモデルについて論じる。それは、既に集団遺伝学に於いて使われていたモデルであるが、金融工学的には、介入を表現するモデルとして、ちょうど良いと思われる。このモデルは、アファインモデルではなく、それゆえ、解析しにくい面もあり、実際、金利モデルにおいては、closed form solution は持たない。そこで、汎用性のある摂動法による近似解法についてもふれておいた。

本論文の執筆にあたり、三浦教授に有益な助言をたくさん頂いた。この場を借りて御礼を申し上げたい。

§2. C・I・R モデルについて

2.1 モデルの導入と推移確率密度

金利 $r(t)$ が、次の確率微分方程式

$$dr(t) = (a - br(t))dt + c\sqrt{r(t)} \cdot dB(t) \quad (a, b, c \text{ は正の実数})$$

を満たすとする。このとき、 $r(t)$ は、C・I・Rモデル（[2]）に従うといわれる。

すると、 $r(t)$ の生成作用素 L は、

$$L = (a - bx) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} c^2 x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{となる。}$$

よって、 $f(t, x) = E_x[g(r(t))]$ は、

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Lf, f(0, x) = g(x) \quad \text{を満たす。}$$

まず, $r(t)$ の推移確率密度 $p(t, x, y)$ の具体的な表現を求める.

ここで, $g(x) = e^{-\lambda x}$ とおくと,

$$\begin{aligned} f(t, x) &= E_x[e^{-\lambda r(t)}] \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda y} p(t, x, y) dy \end{aligned}$$

つまり, この $f(t, x)$ は, $r(t)$ の推移確率密度 $p(t, x, y)$ のラプラス変換になっている.

これから, まず,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Lf, f(0, x) = e^{-\lambda x} \quad \text{を具体的に解く.}$$

解を, $f(t, x, \lambda) = e^{C(t, \lambda) + D(t, \lambda)x - \lambda x}$, $C(0, \lambda) = D(0, \lambda) = 0$ と仮定して, 解を求める.

すると, $C(t, \lambda), D(t, \lambda)$ の方程式は,

$$\begin{aligned} C'(t, \lambda) &= a(D(t, \lambda) - \lambda) \\ D'(t, \lambda) &= -b(D(t, \lambda) - \lambda) + \frac{1}{2} c^2 (D(t, \lambda) - \lambda)^2 \end{aligned}$$

これらを解くと,

$$\begin{aligned} D(t, \lambda) - \lambda &= \frac{-e^{-bt}\lambda}{1 + \frac{1}{2} c^2 \frac{1 - e^{-bt}}{b} \lambda} \\ C(t, \lambda) &= -\frac{2a}{c^2} \log \left(1 + \frac{c^2}{2} \frac{1 - e^{-bt}}{b} \lambda \right) \end{aligned}$$

よって,

$$f(t, x, \lambda) = \left(1 + \frac{c^2}{2} \frac{1 - e^{-bt}}{b} \lambda \right)^{-\frac{2a}{c^2}} e^{\frac{-e^{-bt}\lambda}{\left(1 + \frac{c^2}{2} \frac{1 - e^{-bt}}{b} \lambda \right)}} x$$

$$= e^{\frac{e^{-bt}}{\frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b}} x} \left(1 + \frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b} \lambda\right)^{-\frac{2a}{c^2}} \frac{e^{-bt} \frac{1}{\frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b}} x \frac{1}{1 + \frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b} \lambda}}{1 + \frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b} \lambda}$$

ここで, $\mathcal{L}f(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda y} f(u) du$ とすると,

$$\frac{e^{-\frac{a^2}{4\lambda}}}{\lambda} = \mathcal{L}J_0(a\sqrt{x})$$

(cf. 岩波数学公式 II, J_0 は, 0 次の Bessel 関数) より,

$$\frac{e^{\frac{-e^{-bt}\lambda}{\left(1 + \frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b}\right) x}}}{1 + \frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b} \lambda} = \frac{1}{\frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b}} \mathcal{L} \left(e^{\frac{-\frac{u}{\frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b}}}} I_0 \left(2 \frac{\sqrt{x} e^{-bt}}{\frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b}} \sqrt{u} \right) \right)$$

(ここで, $I_0(t) = J_0(\sqrt{-1} t)$, I_0 は, 変形 Bessel 関数)

また, $\mathcal{L}(u^{a-1}) = \Gamma(\alpha) \lambda^{-a}$ より

$$\left(1 + \frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b} \lambda\right)^{-\frac{2a}{c^2}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2a}{c^2} - 1\right)} \frac{1}{\left(\frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b}\right)^{\frac{2a}{c^2} - 1}} \mathcal{L} \left(e^{\frac{-\frac{u}{\frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b}}}} \frac{2a}{c^2} u^{\frac{2a}{c^2} - 2} \right)$$

よって

$$f(t, x, \lambda) = e^{\frac{-e^{-bt}}{\frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b}} x} \left(\frac{1}{\frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b}} \right)^{\frac{2a}{c^2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2a}{c^2} - 1\right)} \mathcal{L} \left(e^{\frac{-\frac{u}{\frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b}}}} I_0 \left(2 \frac{\sqrt{x} e^{-bt}}{\frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b}} \sqrt{u} \right) \right) \mathcal{L} \left(e^{\frac{-\frac{u}{\frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b}}}} \frac{2a}{c^2} u^{\frac{2a}{c^2} - 2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{-\frac{e^{-bt}}{\frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b}} x} \left(\frac{1}{\frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b}} \right)^{\frac{2a}{c^2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2a}{c^2}-1\right)} \\
 &\mathcal{L} \left(e^{-\frac{u}{\frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b}}} I_0 \left(2 \frac{\sqrt{x e^{-bt}}}{\frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b}} \sqrt{u} \right) e^{-\frac{u}{\frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b}}} u^{\frac{2a}{c^2}-2} \right)
 \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
 &e^{-\frac{u}{\frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b}}} I_0 \left(2 \frac{\sqrt{x e^{-bt}}}{\frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b}} \sqrt{u} \right) e^{-\frac{u}{\frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b}}} u^{\frac{2a}{c^2}-2} \\
 &= e^{-\frac{u}{\frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b}}} \int_0^u (u-s)^{\frac{2a}{c^2}-2} I_0 \left(2 \frac{\sqrt{x e^{-bt}}}{\frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b}} \sqrt{s} \right) ds \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \frac{(x e^{-bt})^n}{\left(\frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b} \right)^{2n}} \int_0^1 (1-s)^{\frac{2a}{c^2}-2} s^n ds \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \frac{(x e^{-bt})^n}{\left(\frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b} \right)^{2n}} \frac{\Gamma\left(\frac{2a}{c^2}-2\right) \Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{2a}{c^2}+n\right)} \\
 &= \Gamma\left(\frac{2a}{c^2}-1\right) \left(\frac{\sqrt{x e^{-bt}} u}{\frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b}} \right)^{1-\frac{2a}{c^2}} I_{\frac{2a}{c^2}-1} \left(\frac{2\sqrt{x e^{-bt}} u}{\frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b}} \right)
 \end{aligned}$$

(ここで, I_0 , I_ν のべき級数展開

$$I_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{\Gamma(n+1)}$$

$$I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu}}{\Gamma(n+\nu+1)}$$

を用いた.)

よって

$$\begin{aligned} f(t, x, \lambda) &= \mathcal{L} e^{-\frac{e^{-bt}}{c^2 \frac{1-e^{-bt}}{b}} x} \left(\frac{1}{\frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b}} \right)^{\frac{2a}{c^2}} \left(\frac{\sqrt{xe^{-bt}u}}{\frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b}} \right)^{1-\frac{2a}{c^2}} \\ I_{\frac{2a}{c^2}-1} \left(\frac{2\sqrt{xe^{-bt}u}}{\frac{c^2}{2} \frac{1-e^{-bt}}{b}} \right) e^{-\frac{u}{c^2 \frac{1-e^{-bt}}{b}} \frac{2a}{c^2}-1} \\ &= \mathcal{L} \frac{2b}{c^2(1-e^{-bt})} e^{\frac{2b}{c^2(1-e^{-bt})} (e^{-bt}x+u)} \left(e^{-\frac{1}{2}bt} \sqrt{\frac{x}{u}} \right)^{1-\frac{2a}{c^2}} I_{\frac{2a}{c^2}-1} \left(\frac{4b\sqrt{xe^{-bt}u}}{c^2(1-e^{-bt})} \right) \end{aligned}$$

つまり

$$\boxed{p(t, x, y) = \frac{2b}{c^2(1-e^{-bt})} e^{\frac{2b}{c^2(1-e^{-bt})} (e^{-bt}x+y)} \left(e^{-\frac{1}{2}bt} \sqrt{\frac{x}{y}} \right)^{1-\frac{2a}{c^2}}}$$

$$\boxed{I_{\frac{2a}{c^2}-1} \left(\frac{4b\sqrt{xe^{-bt}y}}{c^2(1-e^{-bt})} \right)}$$

2.2 C・I・R モデル上のゼロ・クーポン債の価格

時刻 $t(<T)$ で $r(t)=x$ の時、満期が T 、ペイオフ 1 のゼロ・クーポン債 (割引債) の価格を $f(t, x, T)$ とする。

すると,

$$\begin{aligned} f(t, x, T) &= E_{(t,x)}[e^{-\int_t^T r(s)ds}] = E[e^{-\int_t^T r(s)ds} | r(t) = x], \\ f(T, x, T) &= 1 \end{aligned}$$

が成立する. すると, ファインマン・カッツ公式より, f は,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + Lf - xf = 0$$

$f(T, x, T) = 1$ の解である.

$f(t, x, T) = e^{H_1(T-t) + H_2(T-t)x}$, $H_1(0) = H_2(0) = 0$ と置いて解を求める.

すると,

$$H_1'(T-t) = aH_2(T-t)$$

$$H_2'(T-t) = -bH_2(T-t) + \frac{1}{2}c^2H_2(T-t) - 1$$

となり, まず, 第2式を解いて,

$$H_2(T-t) = -\frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(b+\gamma)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \quad (\text{ここで, } \gamma = \sqrt{b^2 + 2c^2} \text{ とおいた})$$

つぎに第1式より,

$$e^{H_1(T-t)} = \{(b+\gamma)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma\}^{-\frac{2a}{c^2}} (2\gamma)^{\frac{2a}{c^2}} e^{-\frac{2a}{-b+\gamma}(T-t)}$$

よって

$$\boxed{\text{ゼロ・クーポン債の価格} = f(t, x, T)}$$

$$= \{(b+\gamma)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma\}^{-\frac{2a}{c^2}} (2\gamma)^{\frac{2a}{c^2}} e^{-\frac{2a}{-b+\gamma}(T-t)} e^{-\frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(b+\gamma)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}x}$$

2.3 C・I・R モデル上の一般のペイオフを持つオプション価格式

時刻 $t(<T)$ で $r(t)=x$ の時, 行使時点 T , ペイオフ f のオプション価格を $C(t, x)=C_f(t, x)$ とする. すると,

$C(t, x) = E_{(t, x)}[f(r(T)e^{-\int_t^T r(s)ds}]$ であり, ファインマン・カッツ公式より, $\frac{\partial C}{\partial t} + LC - xC = 0$, $C(T, x) = f(x)$ を満たす.

以下, この偏微分方程式を解く. まず, ペイオフ $f(x)$ を $e^{-\lambda x}$ とし, 解を

求める.

$C(t, x) = e^{E(T-t, \lambda) + F(T-t, \lambda)x - \lambda x} \cdot E(0, x) = F(0, x) = 0$ と仮定する.

すると, E, F の満たす方程式は,

$$E' = a(H - \lambda)$$

$$F' = \frac{1}{2} c^2 (F - \lambda) - b(F - \lambda) - 1$$

となる.

まず, 第2式を解いて,

$$F(t, \lambda) = \frac{\alpha - \beta}{1 - \frac{\lambda + \alpha}{\lambda + \beta} e^{\frac{c^2}{2}(\alpha - \beta)t}} + \beta$$

(ここで, α, β は, u についての2次方程式 $\frac{1}{2} c^2 u^2 - bu - 1 = 0$ の2解)

次に, 第1式より,

$$E(t, \lambda) = \frac{2b}{c^2} t + \frac{2}{c^2} \log \frac{\alpha - \beta}{e^{\frac{c^2}{2} \alpha t} (\lambda + \alpha) - e^{\frac{c^2}{2} \beta t} (\lambda + \beta)}$$

よって, この時, $C(t, x) = C(t, x, \lambda)$ は,

$$C(t, x, \lambda) = e^{\frac{2b}{c^2} (T-t)} \left(\frac{\alpha - \beta}{e^{\frac{c^2}{2} \alpha (T-t)} (\lambda + \alpha) - e^{\frac{c^2}{2} \beta (T-t)} (\lambda + \beta)} \right)^{\frac{2}{c^2}} \\ e^{\left(\frac{\alpha - \beta}{1 - \frac{\lambda + \alpha}{\lambda + \beta} e^{\frac{c^2}{2} (\alpha - \beta) (T-t)}} + \beta \right) x}$$

ここで, 2.1節のラプラス変換公式を変形すると,

$$\frac{1}{(1 + A\lambda)^v} e^{\frac{-B\lambda}{1+A\lambda}} = \mathcal{L} \frac{1}{A} e^{\frac{1}{A}(B+u)} \left(\frac{\sqrt{B}}{u} \right)^{1-v} I_{v-1} \left(\frac{2\sqrt{Bu}}{A} \right) \\ (= \mathcal{L} \ h_{A,B}(u) \text{ とおく})$$

すると,

$$\frac{1}{(1+A(\lambda+b))^v} e^{\frac{-B(\lambda+b)}{1+A(\lambda+b)}} = \mathcal{L} e^{-bu} h_{A,B}(u)$$

$$\frac{1}{(1+C\lambda)^v} e^{\frac{D\lambda+E}{1+C\lambda}} = \frac{1}{\left(1-\frac{CE}{D}\right)^v} \frac{1}{\left(1+\frac{CD}{D-CE}\left(\lambda+\frac{E}{D}\right)\right)^v} e^{\frac{\frac{D^2}{D-CE}\left(\lambda+\frac{E}{D}\right)}{1+\frac{CD}{D-CE}\left(\lambda+\frac{E}{D}\right)}}$$

ここで,

$$C = \frac{e^{\frac{c^2}{2}\beta(T-t)} - e^{\frac{c^2}{2}\alpha(T-t)}}{\beta e^{\frac{c^2}{2}\beta(T-t)} - \alpha e^{\frac{c^2}{2}\alpha(T-t)}}, \quad D = \frac{\alpha e^{\frac{c^2}{2}\beta(T-t)} - \beta e^{\frac{c^2}{2}\alpha(T-t)}}{\beta e^{\frac{c^2}{2}\beta(T-t)} - \alpha e^{\frac{c^2}{2}\alpha(T-t)}},$$

$$E = \alpha\beta = -\frac{2}{c^2}, \quad F = \frac{\alpha - \beta}{\alpha e^{\frac{c^2}{2}\alpha(T-t)} - \beta e^{\frac{c^2}{2}\beta(T-t)}},$$

とおくと,

$$\begin{aligned} C(t, x, \lambda) &= e^{\frac{2b}{c^2}t} F^{\frac{2}{c^2}} \left(\frac{1}{1+C\lambda}\right)^{\frac{2}{c^2}} e^{\frac{D\lambda+E}{1+C\lambda}} \\ &= e^{\frac{2b}{c^2}t} F^{\frac{2}{c^2}} \frac{1}{\left(1-\frac{CE}{D}\right)^{\frac{2}{c^2}}} \mathcal{L} e^{-\frac{E}{D}u} h_{\frac{CD}{D-CE}, \frac{D^2}{D-CE}}(u) \\ &= e^{\frac{2b}{c^2}t} F^{\frac{2}{c^2}} \frac{1}{\left(1-\frac{CE}{D}\right)^{\frac{2}{c^2}}} \\ &\quad \mathcal{L} \frac{D-CE}{CD} e^{\frac{1}{CD}(D^2+(D-CE)u)} \left(\sqrt{\frac{D^2}{(D-CE)u}}\right)^{1-\frac{2}{c^2}} I_{\frac{2}{c^2}-1} \left(\frac{2\sqrt{(D-CE)u}}{C}\right) \\ &= \mathcal{L} e^{\frac{2b}{c^2}t} F^{\frac{2}{c^2}} \frac{1}{C} \left(\frac{Du}{D-CE}\right)^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{c^2}} e^{\frac{1}{CD}(D^2+(D-CE)u)} I_{\frac{2}{c^2}-1} \left(\frac{2\sqrt{(D-CE)u}}{C}\right) \end{aligned}$$

よって, λ は, 任意の正の実数より,

行使時点 T , ペイオフ f のオプション価格 $C_f(t, x)$ は,

$$C_f(t, x) = \int_0^{+\infty} f(u) e^{\frac{2b}{c^2}(T-t)} F^{\frac{2}{c^2}} \frac{1}{C} \left(\frac{Du}{D-CE} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{c^2}} e^{\frac{1}{CD}(D^2 + (D-CE)u)} I_{\frac{2}{c^2}-1} \left(\frac{2\sqrt{(D-CE)u}}{C} \right) du$$

ここで,

$$C = \frac{e^{\frac{c^2}{2}\beta(T-t)} - e^{\frac{c^2}{2}\alpha(T-t)}}{\beta e^{\frac{c^2}{2}\beta(T-t)} - \alpha e^{\frac{c^2}{2}\alpha(T-t)}}, \quad D = \frac{\alpha e^{\frac{c^2}{2}\beta(T-t)} - \beta e^{\frac{c^2}{2}\alpha(T-t)}}{\beta e^{\frac{c^2}{2}\beta(T-t)} - \alpha e^{\frac{c^2}{2}\alpha(T-t)}},$$

$$E = \alpha\beta = -\frac{2}{c^2}, \quad F = \frac{\alpha - \beta}{\alpha e^{\frac{c^2}{2}\alpha(T-t)} - \beta e^{\frac{c^2}{2}\beta(T-t)}},$$

(α, β は, u についての 2 次方程式 $\frac{1}{2}c^2u^2 - bu - 1 = 0$ の 2 解)

注意 Cox, Ingersoll, Ross は, [2] において, ゼロ・クーポン債におけるコールオプション, つまり, ペイオフが,

$$\max [P(T, r(T), s) - K, 0]$$

(ここで, P は, ゼロ・クーポン債の価格, $s(>T)$ は, ゼロ・クーポン債の満期, T は, オプションの行使時点)

で表される場合について, その価格式を求めている.

$$C(t, x, T; s, K) = E_{(t, x)} [\max (P(T, r(T), s) - K) e^{-\int_t^T r(s) ds}]$$

は,

$$C(t, x, T; s, K) = P(t, x, s) \chi^2 \left(2r^* \left[\frac{2}{B(t, T)c^2} + B(T, s) \right]; \frac{4a}{c^2}, \frac{2\phi^2 x e^{\gamma(T-t)}}{\frac{2}{B(t, T)c^2} + B(T, s)} \right)$$

$$-KP(t, x, T)\chi^2\left(2r^*\left[\frac{2}{B(t, T)c^2}\right]; \frac{4a}{c^2}, \frac{2\phi^2xe^{\gamma(T-t)}}{2B(t, T)c^2}\right) \text{となる.}$$

ここで、 $\chi^2(u, v, w)$ は、非中心 χ^2 分布 ([6] 参照)

$$B(t, s) = \frac{(b+\gamma)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}{c^2(e^{\gamma(T-t)}-1)}, P(T, r(T), s) = A(T, s)e^{-B(T, s)r(T)}$$

$$\phi = \frac{2\gamma}{c^2(e^{\gamma(T-t)}-1)}, \quad r^* = \left\lceil \log\left(\frac{A(T, s)}{K}\right) \right\rceil / B(T, s).$$

ただし、Cox, Ingersoll, Ross [2] では、結果のみで途中式は何も書かれておらずその導き方は、まだ筆者には、確認できていない。筆者の出した価格式 (2.3 節) に (2.2 節) の結果を代入して計算を続行すれば良さそうであるが、非常に複雑な計算になってしまう。

[2.4] 下方ターゲットゾーンを持つ通貨オプション・株価オプション

C・I・R モデルの特徴の 1 つに $r(t)$ が、0 に近づくと、ドリフト項 $a-br(t)$ の影響で正の方向に引き戻されることが挙げられる。この作用により、 $r(t)$ は、決して 0 に到達することは無い。つまり、0 は、到達不能境界 (Inaccessible boundary) である。よってこれを少し修正することにより下方ターゲットゾーンを持つ通貨モデル・株価モデルを作ることができる。つまり、ターゲットゾーンに近づくと政府や日銀の介入があり、決してそこを越えないようになっているモデルである。

まず、通貨モデルを考える。

$X(t)$: 時刻 t における為替レート

とし、 $X(t)$ は、次の確率微分方程式を満たすものとする。

$$dX(t) = (a-bX(t))dt + c\sqrt{X(t)-l} dB(t)$$

ここで、 l は、下方ターゲットゾーンで、 $X(t)$ は、決して l に到達するこ

とは無い。すると、2.2節と同様にして $X(t)$ の推移確率密度

$p_X(t, x, y)$ は,

$$p_X(t, x, y) =$$

$$\frac{2b}{c^2(1-e^{-bt})} e^{\frac{2b}{c^2(1-e^{-bt})}(e^{-bt}(x-l)+(y-l))} \left(e^{-\frac{1}{2}bt} \sqrt{\frac{x-l}{y-l}} \right)^{1-\frac{2a}{c^2}} \\ I_{\frac{2a}{c^2}-1} \left(\frac{4b\sqrt{(x-l)e^{-bt}(y-l)}}{c^2(1-e^{-bt})} \right)$$

となる。

これを用いて行使価格 $K(>l)$, 行使時点 T のコールオプション価格 $C_X(t, x, T, K)$ は, 安全利子を r (定数) として

$$C_X(t, x, T, K) = e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (y-K) p_X(t, x, y) dy$$

で得られる。

次に株価モデルを考える。リスク中立測度のもとでは, 株価過程 $S(t)$ の従う確率微分方程式のドリフトは, 安全利子を r (定数) とすると, $rS(t)$ となるので,

$$dS(t) = rS(t)dt + c\sqrt{S(t)-l} dB(t)$$

を株価 $S(t)$ の満たす確率微分方程式としてとる。

すると, 前と同様に, 株価は, l に近づけば介入があり, 決して l に到達しない, つまり, l より下には下がらないモデルと考えられる。

この場合の推移確率密度 $p_S(t, x, y)$ は次のようになる。

$$p_S(t, x, y) = \frac{2}{c^2 t} e^{\frac{2}{c^2 t}(x+y-2l)} \left(\sqrt{\frac{x-l}{y-l}} \right)^{1-\frac{2r}{c^2}} I_{\frac{2r}{c^2}-1} \left(\frac{4\sqrt{(x-l)(y-l)}}{c^2 t} \right)$$

これを用いて行使価格 $K(>l)$, 行使時点 T のコールオプション価格 $C_S(t, x, T, K)$ は,

$$C_S(t, x, T, K) = e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (y-K) p_S(t, x, y) dy$$

で得られる.

§ 3. Heston モデルについて

3.1 準備 (反転公式)

まず, 準備として反転公式を述べ, その証明を与える. この反転公式は, 一般には, あまりよく知られていない形と思われる.

X を実確率変数, $\varphi_X(t) = E(e^{\sqrt{-1}tX})$ をその特性関数, $f_X(x)$ をその確率密度関数とする.

補題 3.1

$E(X)$ が存在し, $\frac{\varphi_X(t)}{t} \in L_1(1, +\infty) \cap L_1(-\infty, -1)$ の時,

$$\int_a^{+\infty} f_X(x) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-\sqrt{-1}at}}{\sqrt{-1}t} \right) \varphi_X(t) dt$$

証明

$$\begin{aligned} \int_a^b f_X(x) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ibt} - e^{-iat}}{-it} \varphi_X(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ibt}}{-it} \varphi_X(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iat}}{it} \varphi_X(t) dt \end{aligned}$$

まず, $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ibt}}{-it} \varphi_X(t) dt = \frac{1}{2}$ を示す.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ibt}}{-it} \varphi_X(0) dt &= \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ibt}}{-it} 1 dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{\cos bt - i \sin bt}{-it} \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin bt}{t} dt \quad \textcircled{1} \\ &= 2 \int_0^\infty \frac{\sin bt}{t} dt \xrightarrow{(b \rightarrow +\infty)} 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{また } \frac{e^{-ibt}}{-it} \varphi_X(t) &= \frac{\cos bt - i \sin bt}{-it} \left(\overset{\text{Re}\varphi_X(t)}{\parallel} g(t) + i \overset{\text{Im}\varphi_X(t)}{\parallel} h(t) \right) \\
 &= \underbrace{\left(g(t) \frac{\sin bt}{t} - \frac{\cos bt}{t} h(t) \right)}_{\text{偶関数}} + i \underbrace{\left(\frac{\cos bt}{t} g(t) + \frac{\sin bt}{t} h(t) \right)}_{\text{奇関数}} \quad (2)
 \end{aligned}$$

← $\int_{-N}^N$ で積分すれば 0

$$\begin{aligned}
 \therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ibt}}{-it} \varphi_X(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re} \left(\frac{e^{-ibt}}{-it} \varphi_X(t) \right) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re} \left(\frac{e^{-ibt}}{-it} \varphi_X(0) \right) dt + \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ibt}}{-it} (\varphi_X(t) - \varphi_X(0)) dt \\
 &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{-1}bt}}{-\sqrt{-1}t} (\varphi_X(t) - \varphi_X(0)) dt \\
 &= \int_{-1}^{+1} \frac{e^{-\sqrt{-1}bt}}{-\sqrt{-1}t} (\varphi_X(t) - \varphi_X(0)) dt + \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{-\sqrt{-1}bt}}{-\sqrt{-1}t} (\varphi_X(t) - \varphi_X(0)) dt \\
 &\quad + \int_{+1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{-1}bt}}{-\sqrt{-1}t} (\varphi_X(t) - \varphi_X(0)) dt
 \end{aligned}$$

よって, 定理の仮定, リーマン・ルベグの補題,

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{\sin bt}{t} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_b^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = 0 \text{ より,}$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{-1}bt}}{-\sqrt{-1}t} (\varphi_X(t) - \varphi_X(0)) dt = 0$$

また, $\frac{e^{-\sqrt{-1}at}}{\sqrt{-1}t} \varphi_X(t)$ は, 偶関数だから,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{-1}at}}{\sqrt{-1}t} \varphi_X(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re} \frac{e^{-\sqrt{-1}at}}{\sqrt{-1}t} \varphi_X(t) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \text{Re} \frac{e^{-\sqrt{-1}at}}{\sqrt{-1}t} \varphi_X(t) dt
 \end{aligned}$$

よって

$$\int_a^{+\infty} f_X(x) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \text{Re} \left(\frac{e^{-\sqrt{-1}at}}{\sqrt{-1}t} \right) \varphi_X(t) dt \quad (\text{証明終})$$

3.2 Heston モデルにおける株価オプションの価格式

$S(t)$: 株価

$\sqrt{v(t)}$: $S(t)$ のボラティリティ

とし、 $(S(t), \sqrt{v(t)})$ が以下の S. D. E (確率微分方程式 Stochastic Differential Equation) を満たすと仮定する.

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sqrt{v(t)} S(t)dz_1(t) \quad \text{---①}$$

$$d\sqrt{v(t)} = -\beta\sqrt{v(t)}dt + \delta dz_2(t) \quad \text{---②}$$

(ここで μ, β, δ は定数, $z_1(t), z_2(t)$ はブラウン運動で covariance が $\rho(dz_1(t)dz_2(t)) = \rho dt$ を仮定) (ρ は定数)

①を見れば分かるように、幾何的ブラウン運動 (対数正規過程) との違いは

$$\begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ \left(\frac{dS}{S} = \mu + \sigma dz_1 \right) \end{array}$$

dz_1 の係数 (ボラティリティ) が定数でなく確率過程であることで、本モデルを Heston モデル ([4]) と呼ぶ.

②より $\sqrt{v(t)}$ は Ornstein-Uhlenbeck 過程 (ガウス過程であり、マルコフ過程でもある) に従っている.

②より

$$\begin{aligned} dv(t) &= d(\sqrt{v(t)})^2 = 2\sqrt{v(t)} d\sqrt{v(t)} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot d\sqrt{v(t)} d\sqrt{v(t)} \\ &= 2\sqrt{v(t)} (-\beta\sqrt{v(t)}dt + \delta dz_2(t)) + \delta^2 dt \\ &= (\delta^2 - 2\beta v(t))dt + 2\delta\sqrt{v(t)} dz_2(t) \end{aligned}$$

これは、 $v(t)$ が Cox Ingersoll and Ross モデル (平方根モデル) に従っていることを示している.

$$dv(t) = m[\theta - v(t)]dt + \sigma\sqrt{v(t)} dz_2(t) \quad \text{---③}$$

$$(m, \theta, \sigma \text{ は定数, } m = 2\beta \quad m\theta = \delta^2 \quad \sigma = 2\delta)$$

ここで Black Scholes 型偏微分方程式を作る。

①かつ③において

$$\left. \begin{aligned} dz_1(t) &= dB_1(t) \\ dz_2(t) &= \rho dB_1(t) + \sqrt{1-\rho^2} dB_2(t) \end{aligned} \right| \because dz_1(t)dz_2(t) = \rho dt \text{ より}$$

(ここで B_1, B_2 は 2 つの独立なブラウン運動)

であることに注意して,

$$\textcircled{1}\text{かつ}\textcircled{3} \iff dS(t) = \mu S_1(t)dt + \sqrt{v(t)} S(t)dB_1(t)$$

$$dv(t) = m[\theta - v(t)]dt + \rho\sigma\sqrt{v(t)} dB_1(t) + \sqrt{1-\rho^2}\sigma\sqrt{v(t)} dB_2(t)$$

$$\mu_1 = \mu (\text{定数}) \quad \sigma_1 = \sqrt{y}$$

$$\mu_2 = \frac{m[\theta - y]}{y} \quad \sigma_{21} = \frac{\rho\sigma}{\sqrt{y}} \quad \sigma_{22} = \frac{\sqrt{1-\rho^2}\sigma}{\sqrt{y}}$$

$$F_t + rx F_x + [m[\theta - y] - \rho\sigma(\mu - r) - \sqrt{1-\rho^2}\sigma\lambda] F_y$$

$$+ \frac{1}{2} y x^2 F_{xx} + \rho\sigma xy F_{xy} + \frac{1}{2} \sigma^2 y F_{yy} - rF = 0 \quad \text{---}\textcircled{4}$$

ここで λ に対する自然な仮定 (λ はボラティリティのリスクの価格)

$\lambda(S, v, t) = \lambda v$ (λ は定数) をおく。つまり,

$$F_y \text{ の係数} = m[\theta - y] - \rho\sigma(\mu - r) - \sqrt{1-\rho^2}\sigma\lambda y \text{ となる。}$$

以下, ヨーロッパ型コールオプションのみを考える。

つまり, 境界条件として, 次のようなものを考える。

K (定数) を行使価格, T (定数) を満期として,

$$F(S, v, T) = \max(S - K, 0) \quad \text{---}\textcircled{5}$$

以後, P. D. E (Partial Differential Equation) ④かつ⑤を考える。

$$\text{Black-Scholes の類推より, } \boxed{F(S, v, t) = SP_1 - K \cdot e^{-r(T-t)} P_2} \quad \text{---}\textcircled{6}$$

とおき, P_1, P_2 の満たす P. D. E を考える。

また, Black-Scholes と同様に $u = \log x$ という変換を考えると,

$$\begin{aligned}
 F_x &= \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x} F_u & F_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} F_u \right) \\
 &= -\frac{1}{x^2} F_u + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} F_u = -\frac{1}{x^2} F_u + \frac{1}{x} \frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} F_u + \frac{1}{x^2} F_{uu}
 \end{aligned}$$

∴ ④ ⇔

$$\begin{aligned}
 &F_t + rF_u + \left[m(\theta - y) - \rho\sigma(\mu - r) - \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \sigma \cdot \lambda \cdot y \right] F_y + \frac{1}{2} y (-F_u + F_{uu}) \\
 &\quad \parallel + \rho\sigma y F_{uy} + \frac{1}{2} \sigma^2 y F_{yy} - rF = 0 \\
 &F_t + \left(r - \frac{1}{2} y \right) F_u + \left\{ [m\theta - \rho\sigma(\mu - r)] - \left[m + \lambda\sigma\sqrt{1 - \rho^2} \right] y \right\} F_y \\
 &\quad + \frac{1}{2} y F_{uu} + \rho\sigma y F_{uy} + \frac{1}{2} \sigma^2 y F_{yy} - rF = 0 \quad \text{---⑦}
 \end{aligned}$$

ここで, $SP_t = e^u P_t(u, y)$ とおいて⑦に代入

$$F_u = e^u P_u^1 + e^u P_u^1 \quad F_{uu} = e^u P_u^1 + 2e^u P_u^1 + e^u P_{uu}^1 \quad F_{uy} = e^u P_y^1 + e^u P_{uy}^1 \text{ より}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{7} &\iff P_t^1 + \left(r - \frac{1}{2} y \right) (P_u^1 + P_u^1) + \left\{ [m\theta - \rho\sigma(\mu - r)] - \left[m + \lambda\sigma\sqrt{1 - \rho^2} \right] y \right\} P_y^1 \\
 &\quad + \frac{1}{2} y (P^1 + 2P_u^1 + P_{uu}^1) \\
 &\quad + \rho\sigma y (P_y^1 + P_{uy}^1) + \frac{1}{2} \sigma^2 y P_{yy}^1 - rP^1 = 0 \\
 &\iff P_t^1 + \left(r + \frac{1}{2} y \right) P_u^1 + \left\{ \boxed{[m\theta - \rho\sigma(\mu - r)]} - \boxed{\left[m + \lambda\sigma\sqrt{1 - \rho^2} - \rho\sigma \right]} y \right\} P_y^1 \\
 &\quad \parallel \quad \parallel \quad \parallel \\
 &\quad u_1 \text{ とおく} \quad a \text{ とおく} \quad b_1 \text{ とおく} \\
 &\quad + \frac{1}{2} y P_{uu}^1 + \rho\sigma y P_{uy}^1 + \frac{1}{2} \sigma^2 y P_{yy}^1 = 0 \quad \text{---⑧}
 \end{aligned}$$

また, $K \times e^{-r(T-t)} P^2 = \text{Constant} \times e^r P^2$ より $e^r P^2$ を⑦に代入

$$F_t = r e^r P^2 + e^r P_t^2 \text{ より}$$

$$\textcircled{7} \iff P_t^2 + \left(r - \frac{1}{2} y \right) P_u^2 + \left\{ [m\theta - \rho\sigma(\mu - r)] - \left[m + \lambda\sigma\sqrt{1 - \rho^2} \right] y \right\} P_y^2$$

$$+\frac{1}{2}yP_{uu}^2+\sigma\rho yP_{uy}^2+\frac{1}{2}\sigma^2yP_{yy}^2=0 \quad \text{---⑨}$$

よって, $P^j(j=1, 2)$ は

$$P_t^j+(r+u_1y)P_u^j+(a-b_1y)P_y^j+\frac{1}{2}yP_{uu}^j+\sigma\rho yP_{uy}^j+\frac{1}{2}\sigma^2yP_{yy}^j=0 \quad \text{---⑩}$$

という P. D. E を満たしている.

ここで,

$$u_1=\frac{1}{2}, \quad u_2=-\frac{1}{2}, \quad a=m\theta-\rho\sigma(\mu-r), \quad b_1=m+\lambda\sigma\sqrt{1-\rho^2}-\rho\sigma, \\ b_2=m+\lambda\sigma\sqrt{1-\rho^2}$$

(すべて定数)

$$\text{また, } P^j(j=1, 2) \text{ の境界条件は, } \boxed{P^j(u, y, T)=1_{[\log K, \infty](u)}} \quad \text{---⑪}$$

つまり, $u \geq \log K$ なら 1

$u < \log K$ なら 0

$\therefore S \geq K \iff e^u \geq K \iff u \geq \log K$ となり, さらに上記の境界条件⑪を満たせば, ⑥は境界条件⑤を満たすことになり, 解の一意性により⑥は④から⑤の唯一解となる.

以下, 境界条件⑪のもとで,

P. D. E⑩を具体的に解く.

次のような補助的な S. D. E⑫を考える. この S. D. E もアフィンモデルであり, P_t 以外の係数がすべて y の 1 次式である.

S. D. E⑫

$$\left. \begin{aligned} du(t) &= (r+u_1v_{(t)})dt+\sqrt{v(t)}dz_1(t) \\ dv(t) &= (a-b_1v_{(t)})dt+\sigma\sqrt{v(t)}dz_2(t) \end{aligned} \right\} \quad \text{---⑫}$$

(ここで, z_1, z_2 はブラウン運動で, $dz_1(t)dz_2(t)=\rho dt$)

$$\text{つまり, } dz_1=dB_1, dz_2=\rho dB_1+\sqrt{1-\rho^2}dB_2 \quad \text{---⑬}$$

B_1, B_2 は 2 つの独立なブラウン運動)

⑬に注意して,

$$d\begin{pmatrix} u_i(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r+u_i v \\ a-b_i v \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sqrt{v} & 0 \\ \sigma\rho\sqrt{v} & \sigma\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_1(t) \\ dB_2(t) \end{pmatrix}$$

よって, $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ の生成作用素 L は,

$$Lf = (r+u_i v)f_u + (a-b_i v)f_v + \frac{1}{2}vf_{uu} + \sigma\rho vf_{uv} + \frac{1}{2}f_{vv} \text{ となる.}$$

$$f(u, v, t) = E[g(u(T), v(T)) | u(t) = u, v(t) = v] \text{ は,}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f + Lf = 0, f(u, v, T) = g(u, v) \text{ の解である.}$$

特に, $g(u, v) = 1_{[\log K, +\infty)}(u)$ ととると,

$$P^i(u, v, t) = P[u_i(T) \geq \log K | u_i(t) = u, v_i(T) = v]$$

つまり, $u_i(T)$ の分布が, 求まればよいが, §2 と同様なやりかたで $u_i(T)$ の特性関数が, 具体的に求めることができる.

$$f_i(u, v, t, \phi) = E[e^{\sqrt{-1}\phi u(T)} | u_i(t) = u, v_i(t) = v] \text{ は,}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f_i + Lf_i = 0; f_i(u, v, T, \phi) = e^{\sqrt{-1}\phi v} \text{ の解である.}$$

$$f_i(u, v, T, \phi) = e^{C_i(T-t) + D_i(T-t)v + \sqrt{-1}\phi v} C_i(0) = D_i(0) = 0 \text{ として解を求める.}$$

C, D の満たす常微分方程式は,

$$C_i'(T-t) = \sqrt{-1}r\phi + aD_i(T-t)$$

$$D_i'(T-t) = \sqrt{-1}u_i\phi - b_iD_i(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(D_i(T-t))^2 - \frac{1}{2}\phi^2$$

$$+ \sqrt{-1}\sigma\rho\phi D_i(T-t)$$

以下は, この常微分方程式を解く.

$T-t=s$ において

$$D_i'(s) = \frac{1}{2}(\sigma D_i(s) - \alpha_i)(\sigma D_i(s) - \beta_i)$$

$$\alpha_i = b_i' - \sqrt{-1}\rho\phi + d_i$$

$$\beta_i = b_i' - \sqrt{-1} \rho \phi - d_i, b_i' = \frac{b_i}{\sigma},$$

$$-\frac{1}{2} d_i^2 = \sqrt{-1} u_i \phi - \frac{1}{2} \phi^2 - \frac{1}{2} (\sqrt{-1} \rho \phi - b_i')^2$$

となり,

$$\frac{\sigma D_i(s) - \alpha_i}{\sigma D_i(s) - \beta_i} = C_i e^{\frac{\alpha_i - \beta_i}{2} \sigma s}$$

$$D_i(0) = 0 \text{ より } C_i = \frac{\alpha_i}{\beta_i}$$

$$\therefore \frac{\sigma D_i(s) - \alpha_i}{\sigma D_i(s) - \beta_i} \times \frac{\alpha_i}{\beta_i} \times e^{\frac{(\alpha_i - \beta_i)\sigma}{2} s} = \frac{\alpha_i}{\beta_i} \times e^{d_i \sigma s} = g_i \times e^{d_i \sigma s}$$

ここで $g_i = \frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{b_i' - \sqrt{-1} \rho \phi + d_i}{b_i' - \sqrt{-1} \rho \phi - d_i}$

$$\therefore \sigma D_i(s) - \alpha_i = \sigma g_i e^{d_i \sigma s} \times D_i(s) - g_i \beta_i \times e^{d_i \sigma s}$$

$$\therefore \sigma(1 - g_i e^{d_i \sigma s}) D_i(s) = \alpha_i(1 - e^{d_i \sigma s})$$

$$\therefore D_i(s) = \frac{\alpha_i}{\sigma} \times \frac{1 - e^{d_i \sigma s}}{1 - g_i e^{d_i \sigma s}}$$

$$= \frac{b_i' - \sqrt{-1} \rho \phi + d_i}{\sigma} \times \frac{1 - e^{d_i \sigma s}}{1 - g_i e^{d_i \sigma s}}$$

また, $C_i'(s) = \sqrt{-1} r \phi + a D_i(s)$ より

$$C_i(s) = \sqrt{-1} r \phi S + a \int D_i(s) ds + C$$

ここで,

$$D_i(s) = \frac{\alpha_i}{\sigma} \times \left(1 - \frac{(1 - g_i) e^{d_i \sigma s}}{1 - g_i e^{d_i \sigma s}} \right)$$

$$= \frac{\alpha_i}{\sigma} - \frac{\alpha_i}{\sigma^2} \times \frac{1 - g_i}{d_i g_i} \times \frac{\sigma d_i g_i e^{d_i \sigma s}}{1 - g_i e^{d_i \sigma s}}$$

$$\therefore \int D_i(s) ds = \frac{\alpha_i}{\sigma} s + \frac{\alpha_i}{\sigma^2} \frac{1 - g_i}{g_i} \log(1 - g_i e^{d_i \sigma s})$$

ここで,

$$\begin{aligned}
 \alpha_i \times \frac{1-g_i}{d_i g_i} &= \alpha_i \times \frac{1-\frac{\alpha_i}{\sigma}}{d_i \times \frac{\alpha_i}{\beta_i}} = \frac{\beta_i - \alpha_i}{d_i} = -2 \\
 &= \frac{\alpha_i}{\sigma} s - \frac{2}{\sigma^2} \log(1 - g_i e^{d_i \sigma S}) \\
 \therefore C(s) &= \sqrt{-1} r \phi s + \frac{a \alpha_i}{\sigma} s - \frac{2a}{\sigma^2} \log(1 - g_i e^{d_i \sigma s}) + C \\
 C(0) &= 0 \text{ より } \quad C = \frac{2a}{\sigma^2} \log(1 - g_i) \\
 C(s) &= \sqrt{-1} r \phi s + \frac{a \alpha_i}{\sigma} s - \frac{2a}{\sigma^2} \log \frac{1 - g_i e^{d_i \sigma s}}{1 - g_i}
 \end{aligned}$$

これで, 特性関数が explicit に求まった.

あとは, 反転公式 (cf 3.1 節) を用いればよい.

⑬より

$$\begin{aligned}
 P^i(u, v, t) &= P_r[u_i(T) \geq \log K | u_i(t) = u, v_i(t) = v] \\
 &= \int_{\log K}^{+\infty} h_{u_i(T)}(x) dx \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-\sqrt{-1}(\log K)t}}{\sqrt{-1}t} \right) \varphi_{u_i(T)}(t) dt \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-\sqrt{-1}(\log K)t}}{\sqrt{-1}t} \right) f_i(u, v, t, \phi) dt
 \end{aligned}$$

$(h_{u_i(T)}(x), \varphi_{u_i(T)}(t))$ は, それぞれ, $u_i(T)$ の確率密度関数, 特性関数

以上より,

時点 t で, 株価 $= S$, ヴォラティリティ $= v$,

行使価格 K , 行使時点 T のコールオプション価格 $F(S, v, t; T, K)$ は,

$$F(S, v, t; T, K) = SP_1 - Ke^{-r(T-t)}P_2$$

ここで $P_i = P_i(\log S, v, t) (i = 1, 2)$

§4 上下にターゲットゾーンを持つ通 貨オプション・金利オプション

4.1 モデルの説明

2.4 節では、下方に境界がある場合の確率過程を C・I・R モデルの変形として考えたが、本節では、上にも境界がある場合を考察する。

ここでは、 $a, b, c, e, f > 0, e < \frac{a}{b} < f$ としてつぎの為替レート $X(t)$

の満たす確率微分方程式を考える。

$$dX(t) = (a - bX(t))dt + c\sqrt{\left(\frac{X(t)}{e} - 1\right)\left(1 - \frac{X(t)}{f}\right)}dB(t)$$

さらに、境界 e, f を調べることにより、

$$\alpha = \frac{2ef(a-be)}{c^2(f-e)}, \quad \beta = \frac{2bef}{c^2} \text{ において,}$$

$\alpha \geq 1, \beta - \alpha \geq 1$ を仮定すると e, f は、entrance boundary となり、確率過程 $X(t)$ は、 $e < X(t) < f$ を満たす。つまり、確率過程 $X(t)$ が、境界 e, f に近づくと、反対方向に引き戻す力（介入）が働き、 (e, f) にとどまる。
 (e, f) を $X(t)$ のターゲットゾーンと呼ぶ。（ターゲットゾーンについては、[3], [8], [9] 参照）

Kimura は、論文 Diffusion models in population genetics (J. Appl. Prob. (1964) 177-232) に於いて集団遺伝学の 1 つのモデルとして、

$$dZ(t) = (a - bZ(t))dt + c\sqrt{Z(t)(1-Z(t))}dB(t) \text{ を考察し,}$$

その推移確率密度 $\tilde{p}(t, x, y)$ を

$$p(t, x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} X_i(y) e^{\left\{-i\left(m+\frac{\sigma^2}{2}(t-1)\right)\right\}}$$

$$X_i(y) = y^{B-1}(1-y)^{A-B-1} F(A+i-1, -i, A-B, 1-y)$$

$$F(A+i-1, -i, A-B, 1-x)$$

$$\frac{\Gamma(A-B+1)\Gamma(A+2i)\Gamma(A+i-1)}{i!\Gamma^2(A-B)\Gamma(B+i)\Gamma(A+2i-1)}$$

$$A = \frac{2b}{c^2}, \quad B = \frac{2a}{c^2}$$

$F(a, b, c, x)$ は、超幾何函数（岩波数学公式 III 参照）

と求めている。

$Y(t) = \frac{X(t)-e}{f-e}$ とスケール変換すると、

$$dY(t) = \left(\frac{a-be}{f-e} - bY(t) \right) dt + \frac{c}{\sqrt{ef}} \sqrt{Y(t)(1-Y(t))} dB(t) \text{ となるので,}$$

$X(t)$ の推移確率密度 $p(t, x, y)$ は

$$p(t, x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} X_i(Y) e^{\left\{-i\left(b+\frac{c^2}{2ef}(t-1)\right)\right\}}$$

$$X_i(Y) = Y^{a-1}(1-Y)^{\beta-a-1} F(\beta+i-1, -i, \beta-\alpha, 1-Y)$$

$$F(\beta+i-1, -i, \beta-\alpha, 1-X)$$

$$\frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta+2i)\Gamma(\beta+i-1)}{i!\Gamma^2(\beta-\alpha)\Gamma(a+i)\Gamma(\beta+2i-1)}$$

$$\beta = \frac{2bef}{c^2}, \quad \alpha = \frac{a-be}{c^2(f-e)}, \quad Y = \frac{y-e}{f-e}, \quad X = \frac{x-e}{f-e} \text{ とする.}$$

これを用いて行使価格 K ($e < K < f$)、行使時点 T のコールオプションの価格 $C(t, x, T, K)$ は、安全利子率を r として

$$C(t, x, T, K) = e^{-r(T-t)} \int_K^f (y-K) p(t, x, y) dy$$

で得られる。

また, $c=c'\sqrt{e}$ として, $f \rightarrow +\infty$ とすると,

$$dX(t) = (a - bX(t))dt + c'\sqrt{X(t) - e} dB(t) \text{ となり,}$$

2.4 節で扱ったモデルと一致する, つまり, 本節のモデルは, 前のモデルの一般化でもあることを注意しておく.

4.2 金利オプションと摂動法

本節では, 金利が (e, f) ターゲットゾーンを持つモデルについて考察を進める. この場合, アファインモデルではなく, 前のように特殊関数を用いても closed form solution は存在しない. よって近似解を求めるために摂動法を適用する.

$r(t)$ を金利とし, $r(t)$ は, 次の確率微分方程式に従うとする.

$$dr(t) = (a - br(t))dt + c\sqrt{\left(\frac{r(t)}{e} - 1\right)\left(1 - \frac{r(t)}{f}\right)}dB(t)$$

すると, 前節と同じ仮定を係数に課すると, $r(t)$ は, $e < r(t) < f$ を満たし (e, f) ターゲットゾーンを持つ確率過程となる.

ここでは, 金利に付随するヨーロッパコールオプションの価格を求めてみる. つまり, ペイオフを h , 行使時点を T として

$$C(t, x, T, h) = E\left[h(r(T))e^{-\int_t^T r(s)ds} \mid r(t) = x\right] \text{ を考える.}$$

(特に $h \equiv 1$ ととると, C は, ゼロクーポン債の価格となる.)

C は, $\frac{\partial C}{\partial t} + LC - xC = 0$, $C(T, x) = h(x)$ を満たしている.

上式を $\frac{\partial C}{\partial t} + LC = xC$ と変形すると,

$$C(t, x) = \int_e^f h(y)p(T-s, x, y)dy - \int_t^T ds \int_e^f yC(s, y)p(s-t, x, y)dy$$

が得られる. (両辺を t で微分してコルモゴロフ後向き方程式を使う) これを, C に関する積分方程式と見て解く.

$C(t, x)$ は、次のようにして得られる,

$$C(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t, x)$$

$$C_0(t, x) = \int_e^f h(y) p(T-s, x, y) dy$$

$$C_{n+1}(t, x) = - \int_t^T ds \int_e^f y C_n(s, y) p(s-t, x, y) dy \quad (n = 0, 1, \dots)$$

(略証)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + L\right) C_{n+1} = x C_n \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + L\right) C &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + L\right) C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial t} + L\right) C_n \\ &= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} x C_{n-1} \\ &= x C \end{aligned}$$

また, $t=T$ を代入すると,

$$C(T, x) = \int_e^f h(y) p(0, x, y) dy = \int_e^f h(y) \delta(x-y) dy = h(x) \text{ (証明終)}$$

(注意 1)

近似の度合いについての評価を行う.

$$\max_{e \leq y \leq f} h(y) = M, \quad \max_{e \leq y \leq f} C_n(t, y) = v_n(t) \text{ とする.}$$

すると,

$$\begin{aligned} |C_{n+1}(t, x)| &\leq \int_t^T ds \int_e^f y |C_n(s, y)| p(s-t, x, y) dy \\ &\leq M f \int_t^T v_n(s) ds \int_e^f p(s-t, x, y) dy = M f \int_t^T v_n(s) ds \end{aligned}$$

つまり,

$$v_{n+1}(t) \leq \int_t^T v_n(s) ds$$

以下、帰納的に $n \geq 0$ に対して、

$$v_n(t) \leq \frac{M}{n!} f^n(T-t)^n \text{ が得られる.}$$

$$|C(t, x) - \sum_{n=0}^N C_n(t, x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} C_n(t, x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{M}{n!} f^n(T-t)^n$$

ここで、 $x > 0$ で、

$$e^x - \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \leq \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} e^x \text{ に注意すると,}$$

$$|C(t, x) - \sum_{n=0}^N C_n(t, x)| \leq \frac{M f^{N+1} (T-t)^{N+1}}{(N+1)!} e^{f(T-t)}$$

よって、 N を十分大きくとると、 $\sum_{n=0}^N C_n(t, x)$ は、 $C(t, x)$ の良い近似である。

(注意 2)

この摂動法は、他のモデルに対しても有効である。

本節では、生成作用素が L と $L-x$ の場合で、

$L-x$ を L からの摂動とみて、解を求めた。他にも $L-c(x)$ や $L+L_1$ など L からの摂動とみなすやりかたも全く同様であるが、ただ、2階微分の項の摂動は、特異摂動となり少しやっかいである。

(注意 3)

本モデルでは、 $p(t, x, y)$ も固有関数の無限級数展開で与えられているが、各項に $\exp(-i(2b + (i-1)c^2/ef)t)$ の指数関数項が、かかっているの、項をたくさんとらなくても比較的良好な近似値が得られるはずである。

References

- [1] Black, F., and M. Scholes, (1973), "The Valuation of Options and Corporate Liabilities," J. of Political Economy, 81, 637-654.

- [2] Cox, J. C., J. E. Ingersol, and S. A. Ross, (1985) "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, 53, 385-408.
- [3] Froot, K. A., and M. Obstfeld, (1991), "Exchange-rate dynamics under stochastic regime shifts : A unified approach," *J. of International Economics*, 31, 203-229.
- [4] Heston, S. L., (1993), "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options," *The Review of Financial Studies*, 6, 327-343.
- [5] 岩波数学公式 II, III.
- [6] Johnson, N. L., S. Kotz, N. Balakrishnan, (1995), *Continuous Univariate Distributions*, Wiley Inter. Science.
- [7] Kimura, M., (1964), "Diffusion models in Population genetics," *J. of Appl. Prob.*, 1, 177-232.
- [8] Krugman, P. R., (1991), "Target zones and exchange rate dynamics," *Quarterly J. of Economics*, 106, 669-682.
- [9] Svenson, L. E. O., (1992), "Target zones and interest variability," *J. of International Economics*, 31, 27-54.