帰納函数論におけるある函数の簡単化

永島　孝

帰納函数論に標準型定理，枚挙定理というふたつの基本的な定理があって，そこでクリーニのT述語とよばれる原始帰納述語と，U函数とよばれる原始帰納函数がもちいられている．このTとUをなるべく簡単なものにかえることが上記の定理の改良のひとつの方向として考えられる．この考えに沿って，筆者はTとUに相当する函数を自然数の加算，減算，乗算，開平というごく簡単な函数だけから陽函数として合成した．この結果はすでに [N 75] に発表したので，技術的な詳細はそちらにゆずり，ここでは筆者の結果が帰納函数論のなかであるいは数学基礎論のなかでどのような位置を占めているかをあきらかにすることに重点をおき，そのために関連する諸問題や帰納函数論の歴史についても概説する．しかし，ここでは帰納函数論の全般にわたるsurvey をめざしてはいないので，重要な話題といえども筆者の結果にかかわりがないものについてはふれない．

I　帰納函数の起源

帰納函数という概念は任意の点における函数値を有限の手間で求めることのできるような函数——計算可能な函数——という概念の客観化と考えられ，その理論は数学基礎論の主要な一部門をなし，他方で

は電子計算機理論に応用されている．歴史的には，数学的帰納法で定められる函数としてゲーデルが原始帰納函数という概念を定義して有名な不完全性定理の証明にもちいたのが発端となり，クリーニ，テューリング，チャーチらの研究によって一般の帰納函数の概念に拡張されたのである．

数学理論の形式的体系を考える．その理論がすくなくとも自然数論を含んでいるものと仮定し，さらに，無矛盾[1]であると仮定する．この仮定のもとで，形式的体系においてAもその否定 $\neg A$ もともに証明可能でないような閉論理式[2]A を構成することができる，というのがゲーデルの不完全性定理である [G 31]．この定理の証明のためにゲーデルは算術化[3]というきわめて重要な方法を案出した．そして原始帰納函数をもちいて算術化をおこなうとともに算術化にもちいた原始帰納函数の計算を形式的体系において表現する，という論法によって形式的体系に関する超数学的議論をその形式的体系自身のなかで展開して証明をおこなう．算術化というのはつぎに述べるような方法である．形式的体系においてとりあつかわれる対象は，一定の規則にしたがって記号を配列した‘図形’である．たとえば，命題をあらわす形式的対象は論理式であり，証明をあらわす形式的対象は証明図である．そこで，形式的体系においてもちいられる記号のおのおのに自然数を対応させ，その自然数を記号のゲーデル数とよぶ．一方，自然数の有限列と自然数との間の一対一の対応[4]を定めておく．このようにして記号の配列に対して自然数を一意的に対応させることができる．その結果，形式的対象のおのおのに対して自然数が一意的に対応する．これをその形式的対象のゲーデル数とよぶ．ゲーデル数の対応のさせかたは具現的[5]に定め得る．すなわち，任意の形式的対象が与えられたとき，機械的な一定の手続にしたがって有限の手間でそのゲーデル数を実際に求められるように，その対応を定めておくことが可能である．さて，ゲーデル数の対応によって，形式的体系に関する超数学的議論は自然数を対象とする数学的議論に翻訳される．これが超数学の算術化である．

自然数論をふくむ数学理論を形式化した体系を対象とする超数学に対して算術化を適用すれば，その形式的体系の内部においてその形式的体系自身に関する超数学的議論を展開することがある程度まで可能となる．この画期的な考えによってゲーデルは内容的にはそれ自身の証明不可能性を意味するような閉論理式をつくりだす．それには算術化に対角線論法を併用してリシャールの逆理や‘うそつきの逆理’に類する概念構成をおこなう．こうして構成される閉論理式をかりにAとしよう．論理式Aは自然数論における一定の命題をあらわしており，当然，その命題の真偽もいずれかに定まっているはずである．一方，Aがあらわしている数論的命題をゲーデル数の対応を通じて解釈すれば，それは

‘論理式Aは形式的体系のなかにおいて証明可能でない’

という超数学的命題をあらわしている．したがって形式的体系のなかにおいては論理式Aも論理式 $\neg A$ も証明可能でないこと，すなわちAが形式的に決定不可能な命題[6]をあらわしていること，が示される．以上のような証明を遂行するには超数学の議論がどこまで形式的体系のなかで展開され得るかの考察が必要となる．その目的でゲーデルは自然数の原始帰納函数[7]の概念を導入し，任意の原始帰納函数が形式的体系において表現可能[8]であることと，超数学の諸概念に対して算術化によって対応する数論的函数が原始帰納函数になることとを，それぞれ証明した．なお，現在は，原始帰納函数のみならず一般の帰納函数が形式的体系においてすべて表現可能であること，また通常の超数学などの算術化には原始帰納函数よりせまい初等函数の範囲でたりること，などが知られている．また，算術化という考えはひろくもちいられている．一例をあげれば，計算過程を形式的に記述してそれを算術化するという論法があり，後述するように，理論上は帰納函数の標準型を生み，応用上は電子計算機におけるフォン・ノイマン方式の基礎づけをあたえている．

II　原始帰納函数

自然数の全体から成る集合を $\boldsymbol{N}$ と記す．自然数には0をも含める．自然数 x の直後の数を x' または $S(x)$ であらわす．公理論的にはこれらは無定義概念であって，数学的構造 $(\boldsymbol{N}, S, 0)$ はペアノの公理系

1. $\boldsymbol{N}$ は集合である．
2. $S: \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ は単射である．
3. $0 \in \boldsymbol{N}$.
4. $\forall x \in \boldsymbol{N}(S(x) \neq 0)$.
5. $X \subset \boldsymbol{N}, 0 \in X, \forall x \in X(S(x) \in X)$ ならば $X = \boldsymbol{N}$.

によって定められる．公理5は $\boldsymbol{N}$ が0と S で生成されると言うことである．数学的帰納法による証明がこの公理によって裏づけられる．さらに，数学的帰納法による写像の定義が可能となる．すなわち，

任意の集合 A，任意の $k \in A$，任意の $g: \boldsymbol{N} \times A \to A$ に対して，$f(0) = k$ および $f(x') = g(x, f(x))$ をみたす $f: \boldsymbol{N} \to A$ が一意的に存在する

こと，また一般化して助変数を含んだ形で

任意の集合 A, B，任意の $h: B \to A$，任意の $g: \boldsymbol{N} \times A \times B \to A$ に対して，$f(0, y) = h(y)$ および $f(x', y) = g(x, f(x, y), y)$ をみたす $f: \boldsymbol{N} \times B \to A$ が一意的に存在する

ことが示される．写像を定義するこの帰納法において与えられた写像 g（および h）が自然数の一変数または多変数の自然数値函数である場合，言いかえれば集合 A（および B）が $\boldsymbol{N}$ またはそのいくつかの直積である場合，この帰納法を原始帰納法とよぶ．自然数の自然数値函数の中で原始帰納法と合成によって恒等写像と定値写像と S から生成されるものを原始帰納函数とよぶ．以下，とくにことわらぬ限り，函数とは自然数変数の（一変数または多変数の）自然数値函数を意味するものと約束する．自然数全体を変域とする変数を $x, y, \ldots$ 等であらわし，多変数の場合の記法を簡潔にするために1個以上の変数の列を太字 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$ であらわす．さて，原始帰納函数の定義を精確に述べ

るために，つぎの5種類の函数方程式または函数方程式系を考える．いずれも f に関する方程式（系）であって，(1), (2), (3) は直接に f を定めるもの，(4), (5) は与えられた函数 $g, h, g_1, \ldots\ldots$ 等から f を定めるものである．(5) は f が一変数の場合 (5a) と f が多変数の場合 (5b) とにわけて記す．なお (2) と (5a) において k は定数をあらわす．また (3) において $\boldsymbol{x}$ は $x_1, \ldots, x_n$ をあらわし，$1 \leq i \leq n$ であるとする．

(1)　$f(x)=x'$.

(2)　$f(\boldsymbol{x})=k$.

(3)　$f(\boldsymbol{x})=x_i$.

(4)　$f(\boldsymbol{x})=h(g_1(\boldsymbol{x}), \ldots, g_m(\boldsymbol{x}))$.

(5a)　$\begin{cases} f(0)=k, \\ f(x')=g(x, f(x)). \end{cases}$

(5b)　$\begin{cases} f(0, \boldsymbol{y})=h(\boldsymbol{y}), \\ f(x', \boldsymbol{y})=g(x, f(x, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}). \end{cases}$

函数の集合 $\mathfrak{F}$ から (1)～(4) を有限回だけくりかえして適用して生成される函数を $\mathfrak{F}$ に関する陽函数と云い，(1)～(5) を有限回だけ適用して生成される函数を $\mathfrak{F}$ に関する原始帰納函数と云う．空な函数族に関する原始帰納函数を原始帰納函数と云う．

函数 $x+y, xy, x^y, x!$ などが原始帰納的であることはあきらかであろう．原始帰納函数の理論ではもっぱら全域函数を扱うので，減算や除算なども便宜上つぎのように全域に拡張しておく．差 $x \dot{-} y$ は

$$x \dot{-} y=\max(x-y, 0)$$

とする．商 $[x/y]$ と剰余 $\mathrm{rm}(x, y)$ は $y>0$ のときは

$$x=yq+r, 0 \leq r<y$$

をみたす一意的な q と r と定め，$y=0$ のときは

$$[x/0]=0, \mathrm{rm}(x, 0)=x$$

と約束する．平方根は整数部分 $[\sqrt{x}]$ を考える．S の逆函数は

$$\mathrm{pd}(x)=x \dot{-} 1$$

と拡張しておく．この函数は原始帰納法で

$$\mathrm{pd}(0)=0,\ \mathrm{pd}(x')=x$$

と定められるから原始帰納函数である．$x\dot{-}y$ は

$$x\dot{-}0=x,\ x\dot{-}y'=\mathrm{pd}(x\dot{-}y)$$

によって原始帰納的である．符号函数 sg は

$$\mathrm{sg}(x)=1\dot{-}(1\dot{-}x)$$

によって原始帰納的である．述語（命題函数）P が原始帰納的であるとは $P(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow f(\boldsymbol{x})=0$ をみたす原始帰納函数 f が存在することを意味する．$x=y, x\leq y, x<y$ などはあきらかに原始帰納的である．原始帰納述語から命題論理の論理演算 $\wedge$(and), $\vee$(or), $\neg$(not) などを適用して得られる述語は原始帰納的である．

$$f(x, \boldsymbol{y})=\Sigma_{z<x}g(z, \boldsymbol{y})$$

のとき f は g と加法から原始帰納法で得られるから，f は g に関して原始帰納的である．同様に

$$f(x, \boldsymbol{y})=\Pi_{z<x}g(z, \boldsymbol{y})$$

のとき f は g に関して原始帰納的である．述語 P と数 x に対して，$y<x\wedge P(y)$ をみたす y が存在するときはそのような y の最小値，またそのような y が存在しないときは x，という値を

$$(\mu y<x)P(x)$$

であらわし，$(\mu y<x)$ を有界最小演算子[9]という．

$$f(x, \boldsymbol{y})=(\mu z<x)(g(z, \boldsymbol{y})=0)$$

のとき f は g に関して原始帰納的である．それは

$$f(x, \boldsymbol{y})=\Sigma_{z<x}\Pi_{u<z'}\mathrm{sg}(g(u, \boldsymbol{y}))$$

がなりたつことから得られる．原始帰納述語に論理演算 $(\forall y<x)$，$(\exists y<x)$ を適用して得られる述語は原始帰納的である．商，剰余，平方根はそれぞれ

$$[x/y]=(\mu q<x')(y=0\vee x<yq'),$$

$$\mathrm{rm}(x, y)=(\mu r<x')(\exists q<x')(x=yq+r),$$

$$[\sqrt{x}]=(\mu y<x')(x<y'^2)$$

によって原始帰納函数である．

$$J(x, y)=[(x+y)(x+y+1)/2]+x$$

とおけば $J: \boldsymbol{N}^2 \to \boldsymbol{N}$ は原始帰納的な全単射であって

$$J(K(x), L(x)) = x$$

をみたす函数 K, L が確定する．$K(x) \leq x, L(x) \leq x$ から

$$K(x) = (\mu y < x')(\exists z < x')(J(y, z) = x),$$
$$L(x) = (\mu z < x')(\exists y < x')(J(y, z) = x)$$

が得られ，K と L が原始帰納函数であることがわかる．これらの函数をもちいて多変数の問題は一変数の問題に還元される．さて，前節で述べたように，算術化をおこなうとき自然数の有限列を一つの自然数であらわすことが必要である．その方法としては J 函数をもちいる方法 [N 68] などいろいろな方法が考えられるが，ここではゲーデル以来ひろくもちいられている素因数表示を説明しよう．素数を大きさの順に $p_0, p_1, p_2, \ldots$ と枚挙する．すなわち，

$$p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, \ldots$$

である．有限列 $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ を数

$$a = 2^{a_0'} \cdot 3^{a_1'} \cdot \ldots \cdot p_n{}^{a_n'}$$

であらわす．素因数分解の一意性によって，相異なる有限列は相異なる数であらわされる．有限列からそれをあらわす数を求めること，逆に数が有限列をあらわしているときその有限列を求めることなどが原始帰納函数をもちいてできればよい．'x が素数である' という述語 $\mathrm{Pr}(x)$ は

$$\mathrm{Pr}(x) \Leftrightarrow (\forall y < x \dot{-} 2)(\mathrm{rm}(x, y'') > 0) \wedge x \geq 2$$

とあらわせるから原始帰納的である．x より大きい素数のうち最小のものを $\mathrm{nxtpr}(x)$ であらわせば

$$\mathrm{nxtpr}(x) = (\mu y < x!'')(\mathrm{Pr}(y) \wedge x < y)$$

であるからこれは原始帰納函数であり，

$$p_0 = 2, p_{x'} = \mathrm{nxtpr}(p_x)$$

によって p_x は x の原始帰納函数である．x の素因数分解における p_y の指数を $(x)_y$ と記す．ただし $(0)_y = 0$ と約束する．

$$(x)_y = (\mu z < x)(\mathrm{rm}(x, p_y{}^{z'}) > 0)$$

であるからこれは x, y の原始帰納函数である．'x が有限列をあらわ

しているという述語 Seq(x) は

$$\mathrm{Seq}(x) \Leftrightarrow (\exists y<x)(\forall z<x)(z<y \Leftrightarrow (x)_z>0) \wedge x>1$$

と定義され，原始帰納的である．x の素因数分解における相異なる素因数の個数を lh(x) と記し lh$(0)=0$ と約束すれば

$$\mathrm{lh}(x)=\Sigma_{y<x}\mathrm{sg}((x)_y)$$

がなりたつから lh も原始帰納函数である．Seq(a) であるとき，a のあらわす有限列の長さは lh(a) で，列の第 i 項 $(0\leq i<\mathrm{lh}(a))$ は $(a)_i \dot{-} 1$ で，それぞれ得られる．形式的体系における対象たとえば論理式は一定の生成規則によって記号から帰納的につくり出され，また，たとえば論理式に関する超数学的命題は直接にあるいは論理式の構成に関する帰納法によって定義される[10]．そこで，算術化によって対応する数学的命題は原始帰納的となる．

一方，形式的体系における表現可能性とはつぎに述べるような性質である．おのおのの自然数 x に対して，x をあらわす形式的対象（たとえば記号 '0' の右に記号 ''' を x 個ならべたもの）が対応していると仮定し，その形式的対象を超数学的記号 Z_x であらわす（たとえば Z_2 は形式的対象 0'' をあらわす，等）．Z_x であらわされる形式的対象を，x をあらわす数字[11]と云う．さらに論理式の中の変数に数字を代入して得られる論理式が定義されているとする．また否定をあらわす論理記号 ¬ があるとする．形式的体系に関する以上の仮定[12]のもとで，函数 f（かりに一変数とするが多変数の場合も同様に定義される）が表現可能であるとは論理式 $F(u, v)$ が存在して，条件

$f(x)=y$ をみたす任意の数 x, y に対して $F(Z_x, Z_y)$ が証明可能，

$f(x)\neq y$ をみたす任意の数 x, y に対して $\neg F(Z_x, Z_y)$ が証明可能

を満足することである．ただし u, v は形式的体系における変数であり，$F(Z_x, Z_y)$ は $F(u, v)$ の中の u, v にそれぞれ数字 Z_x, Z_y を代入して得られる論理式をあらわす．ゲーデルは任意の原始帰納函数が自然数論を含む形式的体系において表現可能であることを示した．形式

的体系に関する超数学的な概念を算術化したとき原始帰納的な函数や述語が対応すれば，表現可能性によって，その超数学的概念を形式的体系の中であらわすことが可能となる．

III　帰納函数

原始帰納函数は具現的に計算可能である．すなわち各点における函数値が機械的な操作の有限回のくりかえしで求められる．直接に (1), (2), (3) で定められた函数や計算可能な函数から合成 (4) で定められた函数の計算可能性はいずれもあきらかであるから，計算可能な函数 g から原始帰納法

$$\text{(5a)}\qquad \begin{cases} f(0)=k, \\ f(x')=g(x, f(x)) \end{cases}$$

で定められた函数 f を考えよう．0 における値は第一式から直ちに求まる．x における値が有限回の機械的操作によって求まると仮定すれば，その値を求めて第二式に代入し g の計算を実行すれば x' における値が求まる．故に，数学的帰納法により，任意の自然数 x に対して $f(x)$ の値は有限回の操作で求められる．(5b) についても同様である．

原始帰納法以外のいろいろな帰納法をもちいて定められた函数についても，同様にして具現的な計算可能性を示すことができる．一方，たとえば二重帰納法などのように，自然数論の範囲内で原始帰納法に還元されない帰納法があり，そのような帰納法をもちいて原始帰納的でない函数が得られる．したがって具現的に計算可能な函数は原始帰納函数にかぎらない．そこで，‘一般の帰納法で定められる函数’を定義することと，そのような函数が具現的に計算可能な函数をつくしているだろうかということが問題となる．帰納法の型をあげつくすのは不可能であろうから，一般の帰納法を考えるというのは容易ではない．一般化への手がかりとしてふたたび原始帰納函数の定義を考えよう．函数 f が原始帰納的であるということはつぎのように述べられる：函数 $f_0, f_1, \ldots, f_s$ があって $f=f_s$ であり，おのおのの f_i は (1)～(3) の形の方程式で直接に定められているか (4) または (5) の形の方程式

でより若い番号の f_j から定められているかのいずれかである．さて，$f_0, f_1, \ldots, f_s$ を未知函数をあらわす文字とみなして f_i を定める方程式 $(i=0, 1, \ldots, s)$ の全体を考えれば，$f_0, f_1, \ldots, f_s$ に関する函数方程式系ができる．この函数方程式系における既知函数は S だけである．そして，この方程式系に属する方程式の中の変数への定数の代入と等号に関する通常の法則の適用との有限回のくりかえしで f の各点における値が求められる．なお，値を求めるというのは，くわしく云えば 0 と S だけであらわすこと，すなわち $0, 0', 0'', \ldots$ のどれかを得ることである．

ここで方程式の形に関する制限を除いてしまい，つぎのように定義する．未知函数 f とその他のいくつかの未知函数に関する函数方程式系 E を考える．既知函数は S だけとする．E の方程式における変数への定数の代入と等号の法則の適用との有限回のくりかえしで f の各点における一意的な値が得られるとき，E が f を帰納的に定めるという．そして，このような意味で f を一意的な解として帰納的に定めるような方程式系が存在するとき f が（一般）帰納函数であるという．この定義はゲーデルがエルブランの示唆をうけて述べ [G 34]，クリーニが完成させた [K 36] ものである．述語 P に対して

$$P(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow f(\boldsymbol{x})=0$$

をみたす帰納函数が存在するとき P を帰納述語という．

$$P(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \exists y Q(\boldsymbol{x}, y)$$

をみたす帰納述語 Q が存在するとき P を帰納可算述語という．つぎに原始帰納函数のもうひとつの拡張として μ 帰納函数という概念を定義する．$\mu x P(x)$ は $P(x)$ をみたす x の最小値をあらわすとする．ただしそのような x が存在しないときは $\mu x P(x)$ は定義しない．μ を最小演算子[13)]という．g を与えられた函数として f に関する方程式

$$(6) \qquad f(\boldsymbol{x})=\mu y(g(\boldsymbol{x}, y)=0), \text{ ただし } \forall \boldsymbol{x} \exists y(g(\boldsymbol{x}, y)=0)$$

を考え，(1)〜(6) の有限回の適用で生成される函数を μ 帰納函数とよぶ．函数 g が計算可能であって (6) の仮定をみたすとする．y のはじめの値を 0 とおき，$g(\boldsymbol{x}, y)$ の値を求めてそれが 0 でない限り y

の値を1だけ増して g の計算をくりかえす，という手続きを考えると g に関する仮定からこの操作は有限回で終了しそのときの y の値が $f(\boldsymbol{x})$ の値である．すなわち計算可能な函数から (6) によって得られる函数は計算可能である．ゆえに μ 帰納函数は計算可能である．つぎに μ 帰納函数が帰納函数であること [K 36] を示す．それには (6) において g が帰納的であると仮定して f が帰納的であることをみちびけばよい．仮定から g を帰納的に定める方程式系がある．未知函数として f, h を追加し，g の方程式系に三つの方程式

$$h(0, \boldsymbol{x}, y)=y,$$

$$h(z', \boldsymbol{x}, y)=h(g(\boldsymbol{x}, y'), \boldsymbol{x}, y'),$$

$$f(\boldsymbol{x})=h(g(\boldsymbol{x}, 0), \boldsymbol{x}, 0)$$

を追加すれば f を帰納的に定める方程式系を得る [K 43]．なお，後述の標準型定理の系として，逆に任意の帰納函数が μ 帰納的であることが示される．

帰納函数の定義は形式的体系であらわすことができる．方程式系はあきらかに形式化され得る．方程式系からの函数値の計算過程は等号の法則と代入とによってつぎつぎと導かれる等式の列であって，等号の法則や代入は等式の意味を離れて記号列に対する変換として述べ得るから，容易に形式化できる．このような形式的体系の算術化によってクリーニは標準型定理などの重要な定理を得た．算術化によって‘z は n 変数函数 f に関する方程式系のゲーデル数であり，y は z のあらわす方程式系からの $f(\boldsymbol{x})$ の値の計算過程のゲーデル数である’という $n+2$ 変数の原始帰納述語

$$S_n(z, \boldsymbol{x}, y)$$

が得られる．ここで z があらわしているのは単に f に関する方程式系であるというにすぎず，f を帰納的に定めるものであるということは要請されていない．つまりその方程式系から点 $\boldsymbol{x}$ における f の値がひとつも得られなかったり反対に相異なる2個以上の値が得られたりすることもあり得るのである．もし，方程式系が函数を帰納的に定めるということをあらわそうとすれば，‘任意の $\boldsymbol{x}$ に対して $f(\boldsymbol{x})$ の値

の計算過程がすくなくともひとつ存在し，得られる値は一意的である’と全称や存在の論理演算を含んだ述語になってしまい，原始帰納的な述語であることが保証されない[14]．つぎに，計算過程が存在したときに計算された値をとりだすため，‘y が等式の有限列のゲーデル数であって y のあらわす等式の列の最後の等式の右辺が数字であるならば $U(y)$ はその数字によってあらわされている数値である’という性質をもつ一変数原始帰納函数 U を定めておく．函数 f を帰納的に定める方程式系を考えそのゲーデル数を e とおけば

$$\forall \boldsymbol{x} \exists y S_n(e, \boldsymbol{x}, y),$$

$$\forall \boldsymbol{x} \forall y (S_n(e, \boldsymbol{x}, y) \Rightarrow U(y) = f(\boldsymbol{x}))$$

がなりたつ．しかし，一般には上述の説明からわかるように

$$S_n(z, \boldsymbol{x}, y_1), S_n(z, \boldsymbol{x}, y_2)$$

をみたす y_1, y_2 に対して $U(y_1) = U(y_2)$ であるとはかぎらない．原始帰納述語 T_n を

$$T_n(z, \boldsymbol{x}, y) \Leftrightarrow S_n(z, \boldsymbol{x}, y) \wedge (\forall u < y) \neg S_n(z, \boldsymbol{x}, u)$$

と定義し，クリーニの T 述語とよぶ．

標準型定理．任意の n 変数帰納函数 f に対して

$$\forall \boldsymbol{x} \exists y T_n(e, \boldsymbol{x}, y),$$

$$\forall \boldsymbol{x} \forall y (T_n(e, \boldsymbol{x}, y) \Rightarrow U(y) = f(\boldsymbol{x})),$$

$$\forall \boldsymbol{x} (f(\boldsymbol{x}) = U(\mu y T_n(e, \boldsymbol{x}, y)))$$

をみたす数 e が存在する [K 36, K 43].

証明は f を帰納的に定める方程式系のゲーデル数を e とおけばよい．この定理からただちに任意の帰納函数は μ 帰納的であることがわかる．しかも (6) をただ一回だけもちいて任意の帰納函数が得られるのである．帰納函数の全体は原始帰納函数の全体にくらべてはるかにひろいから，このことは最小演算子がきわめて強力なものであることを示していると考えられる．さて，e が帰納的にある函数を定める方程式のゲーデル数でなくても標準型定理の第一式がみたされているかぎり

$$U(\mu y T_n(e, \boldsymbol{x}, y))$$

は $\boldsymbol{x}$ の μ 帰納函数したがって帰納函数となるから，

定理. f が帰納的であるための必要十分条件は

$$\forall \boldsymbol{x} \exists y T_n(e, \boldsymbol{x}, y)$$

をみたす数 e が存在して

$$\forall \boldsymbol{x}(f(\boldsymbol{x}) = U(\mu y T_n(e, \boldsymbol{x}, y)))$$

とあらわされることである.

つぎに R を $n+1$ 変数の帰納述語として $R(\boldsymbol{x}, y) \Longleftrightarrow g(\boldsymbol{x}, y)=0$ をみたす帰納函数 g をとり，最小演算子で得られる函数が帰納的であることを示したときと同様にして f に関する方程式系 E をつくる.

$$\exists y R(\boldsymbol{x}, y)$$

であるとき，そしてそのときのみ，E からの $f(\boldsymbol{x})$ の値の計算過程が存在する. そこで E のゲーデル数を e とすれば

$$\forall \boldsymbol{x}(\exists y R(\boldsymbol{x}, y) \Longleftrightarrow \exists y T_n(e, \boldsymbol{x}, y))$$

である. すなわち,

枚挙定理. 任意の n 変数帰納可算述語 P に対して

$$\forall \boldsymbol{x}(P(\boldsymbol{x}) \Longleftrightarrow \exists y T_n(e, \boldsymbol{x}, y))$$

をみたす数 e が存在する [K 43].

一変数の帰納可算述語の外延を帰納可算集合とよぶ. 空でない集合が帰納可算集合であるための条件は帰納函数の値域となることであり，これが帰納可算という語の由来である. 帰納可算集合であることは，実は，原始帰納函数の値域であることとも同値である [K 36]. それは枚挙定理をもちいてつぎのように証明される. C を空でない帰納可算集合とすれば

$$y \in C \Longleftrightarrow \exists z T_1(e, y, z)$$

をみたす数 e がある. この e と C のひとつの元 k とを固定して

$$f(x) = \begin{cases} K(x) & (T_1(e, K(x), L(x)) \text{ のとき}), \\ k & (\text{然らざるとき}) \end{cases}$$

と定めれば f は C を値域とする原始帰納函数である. 逆はあきらかである.

帰納函数が具現的に計算可能であることをすでに述べたが，具現的に計算可能ということの客観的な定義が与えられていないので，その

証明は数学的に厳密なものではあり得なかった．チャーチは具現的に計算可能であることの数学的な定義として帰納的という概念を採用することを提唱した［Ch 36］．この提言は多くの事実にもとづいてつよく支持されている．たとえば，いろいろな数学理論の形式的体系における表現可能性およびそれに類する性質が帰納的であることと同値である．また，テューリングは決定問題に関連して仮想的な計算機械を考案しこの機械による計算可能性を考察した［T 36-7］．函数はこれを計算するテューリング機械が存在するときテューリングの意味で計算可能であるというが，それは帰納的であることと同値である．その他にも有限のアルゴリズムによる計算可能性を定義しようとするいろいろな試みの結果として帰納函数と同等な概念が得られるなど，帰納的であるという性質には驚くべき安定性がみられる．なお，帰納函数の自然な拡張として部分帰納函数の概念が定義され，前述の T 述語と U 函数をそのままもちいて部分帰納函数の標準型定理が得られる［K 43］が，その説明は省く．

IV　標準型定理

標準型定理は帰納函数論における重要な基本定理のひとつであり，帰納定理[15]とともに味わいふかい定理でもある．任意の帰納函数が標準型であらわされるということは同一の手続きによって計算可能なすべての函数を計算できることを意味している．これをもうすこし説明しよう．帰納函数 f を考える．定義により f を帰納的に定める方程式系 E がある．この方程式系とそれからの f の値の計算過程とは形式的体系であらわせる．すなわち内容的な意味とはかかわりなく記号の組み合わせに対する機械的操作として函数値の計算が実行できる．したがって任意の $\boldsymbol{x}$ に対して $f(\boldsymbol{x})$ の値を計算し得るような機械が存在し，しかもそのような機械の構成法は方程式系 E に依存して定まる，と考え得る．とくに T 述語や U 函数は原始帰納的であるからそれらの値[16]を計算する機械を構成することができる．そこで

$$U(\mu y T_n(z, \boldsymbol{x}, y))$$

を計算するような機械 M_n を想定しよう．この函数は z, x の帰納函数ではない[17]が，機械 M_n は T_n や U を計算する機械を'部品'としてつぎのようにして組み立てられるであろう．すなわち $y=0, 1, 2, \dots$ について $T_n(z, x, y)$ の真偽の計算をくりかえし，真という値が得られ次第くりかえしをやめてそのときの y の値に対して $U(y)$ を計算して停止する，という働きをおこなうような機構をつくればよいのである．機械 M_n は上記の函数の定義域に属する z, x，いいかえれば

$$\exists y T_n(z, x, y)$$

をみたす z, x に対して函数値を正しく計算する．しかし定義域に属していない数の組を与えられたときはいつまでも動きつづけるであろう．さて，M_n は n 変数の計算可能函数のすべてを計算し得る万能計算機である．二変数の函数 f を計算するには

$$g(x)=f(K(x), L(x))$$

とおいて $g(J(x, y))$ を計算すればよく，この g を定める方程式系は f の方程式系から機械的な手続きで得られる．三変数以上の場合も同様にして一変数の函数の計算に帰することができる．そこで J の計算をおこなう簡単な装置を M_1 に連結すれば一変数・多変数をふくめて計算可能なあらゆる函数を計算できるような機械が得られる．つまり $M_2, M_3, \dots$ がなくても M_1 と簡単な附属品だけで万能計算機が得られるのである．附属装置の働きは J を求めて多変数を一変数に還元することにすぎないから，本質的な部分である M_1 だけに注目して考えよう．一変数の計算可能函数 f の点 x における値を求めるには，f の方程式系 E のゲーデル数 e と数と x を M_1 に与えればよい．f がどんな函数であるかは算術化によって数値 e として機械に知らされる．e も数であるから x と同様な形式的表現で機械に入れられる．そして E に応じて機械の構造を変えることなく，一定の機械 M_1 によって計算可能な任意の函数を計算し得るのである．このように'算譜（プログラム）'を'料（データ）'と差別せずにあつかうことによって万能計算機を実現できるということが，電子計算機における算譜内蔵方式の理論的根拠であると考えられる[18]．すなわち，フォン・ノイマン方式によ

る実在の電子計算機は論理上の万能計算機の有限な近似であると考えられる．なお，この観点から，ENIAC[19]を最初の電子計算機とする考え方に筆者は不賛成である．配線盤で作譜（プログラミング）したENIACよりも，算譜も料も同様な形式で同一の主記憶装置に格納したEDSAC[20]を初の電子計算機とみるのが適当であろう．

実在の電子計算機を万能計算機の‘近似’とみなしたのは，実在の機械の大きさは一定で収容できる情報量の上界が固定しているために1個の数値でさえも容量をこえてしまうことがあり得るからである．理論上の万能計算機は無限大の記憶容量をもつものと考えるべきである[21]．しかし個々の計算のときにもちいられるのはそのうちの有限の部分にすぎず，ただその使用量を事前にみつもることができないのである．つまり，はじめから無限大の容量をそなえていなくても，要求に応じていくらでも追加できるようになっていればよいのである．記憶容量の問題にはのちにふたたびふれる．つぎに停止問題を考える．万能計算機 M_1 が停止するための条件は

$$\exists y T_1(z, x, y)$$

であった．ところがこれは z, x の述語として帰納的でない．なぜなら帰納可算述語の枚挙定理から対角線論法で

$$\neg \exists y T_1(x, x, y)$$

は帰納可算でなく，まして帰納的ではないことが導かれるからである．機械 M_1 が与えられた z, x に対して停止するか否かを判定する機械をつくることは不可能であり，したがって，どんな数値 z, x を与えられても必ずいつかは停止するように M_1 を改造することは万能性をそこなわずには不可能である．見方をかえれば，算譜の停止性を判定する算譜はつくれないということでもある．このような結果は最初の電子計算機がつくられる十数年もまえに得られていた定理の応用にすぎない．以上，万能計算機を例にとって，帰納函数の標準型定理の意味を説明してきた．なお，帰納函数の標準型定理はより一般な部分帰納函数の標準型定理の特別な場合であり，帰納可算述語の枚挙定理も後者から導かれる．

数学における帰納函数論の主要な貢献のひとつは決定問題の研究である．決定手続が具体的にあたえられれば決定問題は肯定的に解決され，この場合あたえられた手続が帰納的であるか否かは問うまでもないであろう．しかし，決定問題を否定的に解決しようとするとき，決定手続とはなにかということの客観的な定義が必要となる．チャーチの提言をみとめれば決定手続の存在と帰納的であることとは同等と考えられるから，帰納的でないことの証明によって決定問題が否定的に解決されると考えてよい．さて，すでに述べた理由によって

$$\exists y T_1(x, x, y)$$

は帰納的でない帰納可算述語である．この述語の真偽をたとえばある形式的体系における論理式の証明可能性の問題に還元する具現的な手続をあたえることによってその形式的体系における証明可能性の決定問題は否定的に解決される．多くの決定問題が帰納的でないことがこの方法で示された．帰納的な手続によってひとつの決定問題を他の決定問題に還元するという考えは上記の非帰納的述語をもちいていろいろな決定問題を否定的に解くのに役立っただけでなく，決定問題相互の比較を可能にし決定不能度[22)]の概念をうみだした．その結果，決定不能問題の複雑さをはかる尺度としてクリーニ・モストフスキの階層よりも精密なものが得られたのである．

さて，T 述語と U 函数は原始帰納的であり，方程式系によって帰納函数を定めるエルブラン・ゲーデル・クリーニの形式的体系に算術化を適用して得られたのであった．しかし，他の方法で T と U とを構成して標準型定理や枚挙定理がなりたつようにすることも可能である．たとえば［D 58］などの教科書にみられるようにテューリング計算機の算術化で T や U を定義する方法もある．また直接には算術化をもちいずに定義することも考えられる．T と U とを簡単にするという方向でクリーニの結果の改良を考えるとき，二つの方針があり得る．第一は方程式系の形式的体系またはその他の体系をできる限り簡単な函数をもちいて算術化することであり，第二は算術化以外の方法であるいは算術化以外の方法を併用して T と U とを構成することである．第一

の方法によって得られている結果については次節で述べる．筆者は第二の方法をもちいる．つぎにTとUとをどこまで簡単なものにできるかという限界を考える．Tに関しては，自然数係数の多項式f, gをとって

$$T_n(z, \boldsymbol{x}, y) \Longleftrightarrow f(z, \boldsymbol{x}, y) = g(z, \boldsymbol{x}, y)$$

の形にあらわせない．なぜなら多項式によってこの形にあらわせる述語に存在記号を1個だけ前置した形の述語は帰納的[23]であり，かりにTがそのようにあらわされたとすれば帰納可算述語の枚挙定理がなりたち得なくなるからである．Uに関してはマルコフの研究[24]がある．すべての値を無限回くりかえしてとるような函数（全射）を大振幅[25]の函数とよぶ．gを一変数の原始帰納函数とするとき，任意の帰納函数fに対して

$$\forall \boldsymbol{x} \exists y P(\boldsymbol{x}, y),$$

$$\forall \boldsymbol{x}(f(\boldsymbol{x}) = g(\mu y P(\boldsymbol{x}, y)))$$

をみたす原始帰納述語Pが存在するためにはgが大振幅の函数であることが必要十分である，というのがマルコフの定理である．この定理は$\boldsymbol{N}^2$と$\boldsymbol{N}$との間の全単射に関するつぎの結果に基いている．函数fに対して$f'(x)$は$f(y)=f(x)$をみたすx未満のyの個数をあらわすと定義する．マルコフはfが大振幅の原始帰納函数ならばf'も大振幅の原始帰納函数であって

$$f^\circ(f(x), f'(x)) = x, f(f^\circ(x, y)) = x, f'(f^\circ(x, y)) = y$$

をみたす函数f°が（一意的に）存在しf°は$\boldsymbol{N}^2$から$\boldsymbol{N}$への帰納的な全単射であることを証明した．なおf°が原始帰納的とは限らないことがクズネツォフによって証明されている．

この節のおわりに，原始帰納的でない帰納函数の例をあげておく．第一の例はアッケルマン函数[26]であってつぎのように定義される：

$$\xi_0(x, y) = x + y,$$

$$\xi_{n'}(x, 0) = \begin{cases} n & (n \leq 1), \\ x & (n > 1), \end{cases}$$

$$\xi_{n'}(x, y')=\xi_n(x, \xi_{n'}(x, y)).$$

おのおのの n に対して ξ_n は原始帰納函数である．とくに

$$\xi_1(x, y)=xy,\ \xi_2(x, y)=x^y$$

である．しかし $\xi_n(x, y)$ は n, x, y の三変数の函数としては原始帰納的でない．これは帰納法によって定義された原始帰納的でない函数として最初に知られたものである．第二の例は上の例を簡単にしたアッケルマン・ペーテル函数[27]で

$$\psi(0, y)=y',$$
$$\psi(x', 0)=\psi(x, 1),$$
$$\psi(x', y')=\psi(x, \psi(x', y))$$

と定義される．$\psi(x, x)$ は $\xi_x(x, x)$ と同様にどの原始帰納函数よりも急激に増加する．第三の例はクズネツォフがマルコフの定理に関連した前述の定理をみちびくために提出した函数[28]で

$$F(x, 0)=2x,$$
$$F(0, y')=1,$$
$$F(x', y')=F(F(x, y'), y)$$

と定義される．$F(x, x)$ もいかなる原始帰納函数よりも急激に増加するが，その値域は原始帰納的な集合である．

V　初等函数

帰納函数はすべて原理的には計算可能である．しかし，そのなかには実用的には到底計算できないと考えられるような複雑なものも含まれている．帰納函数の計算の実行に要する時間さえも，有限であるということがわかっているだけであって，一般にはあらかじめみつもることができない．そこで計算可能な函数についても，その計算の複雑さを比較することや，計算の手間がある程度は予知できるというような‘強い意味の計算可能性’を定義すること，などがのぞまれる．数学的に意義のあるものであるためには，もちろん．特定の機械の能力などにかかわりがない普遍的な概念として定義されねばならない．このような問題が研究されるようになったのは比較的にあたらしい傾向

である．カルマールの初等函数は上記の問題に関連して定義されたものではないが，のちにリッチーの研究の結果つよい意味で計算可能な函数と考えられるようになった．

カルマールは‘決定不能な算術的問題の簡単な例’と題する論文[29]のなかで初等函数[30]の定義をあたえた．初等函数とは，定値函数，恒等函数および函数

$$x+y,\ |x-y|,\ xy,\ [x/y]$$

に対して，合成，有限和，有限積の演算を有限回だけ適用して得られる函数を云う．ただし，有限和，有限積とはそれぞれ函数 g から函数

$$f(x, y, \boldsymbol{z})=\Sigma_{x\leq u\leq y}g(u, \boldsymbol{z}),$$

$$f(x, y, \boldsymbol{z})=\Pi_{x\leq u\leq y}g(u, \boldsymbol{z})$$

を得る演算の意味である．定値函数は値 1 のものに限ってよいことと $xy, [x/y]$ は不要であることとをカルマールが注意している．さらに有限和と有限積の演算はそれぞれ

$$f(x, \boldsymbol{y})=\Sigma_{z<x}g(z, \boldsymbol{y}),$$

$$f(x, \boldsymbol{y})=\Pi_{z<x}g(z, \boldsymbol{y})$$

の型のものに限ってよく，$|x-y|$ は $x\dot{-}y$ におきかえ得ることなどが知られている．第Ⅱ節にあげた等式からただちにわかるように，

$$f(x, \boldsymbol{y})=(\mu z<x)(g(z, \boldsymbol{y})=0)$$

のとき g が初等的ならば f は初等的である．述語 P が初等的であることを $P(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow f(\boldsymbol{x})=0$ をみたす初等函数 f が存在することと定義する．初等述語に論理演算 $\wedge, \vee, \neg, (\forall y<x), (\exists y<x)$ を適用して得られる述語は初等的である．$x^y, x!, \mathrm{rm}(x, y), [\sqrt{x}], \mathrm{pd}(x), J(x, y), K(x), L(x), p_x, \mathrm{Pr}(x), \mathrm{nxtpr}(x), (x)_y, \mathrm{Seq}(x), \mathrm{lh}(x)$ などがすべて初等的であることの検証は容易であろう．算術化に通常もちいられている原始帰納函数の多くはすでに初等的であり，初等的でない場合もゲーデル数の定め方の若干の修正などによって初等的になることがすくなくない．カルマールの目標はゲーデルの定理の簡単化であり，ゲーデルが算術化にもちいた原始帰納函数にかえて初等函数をもちいることがその要点のひとつである．初等函数の概念によってカルマールは算

術化に必要最小限の範囲をよくとらえていると感じられる．

初等函数はあきらかに原始帰納的である．その逆がなりたたぬこと，すなわち原始帰納函数が必ずしも初等的でないことは，同じくハンガリーのふたりの女性数学者ペレツキとペーテルによって証明された[31]．アッケルマン函数のうち

$$\xi_0(x, y)=x+y, \xi_1(x, y)=xy, \xi_2(x, y)=x^y$$

は初等的であるが，ペレツキによれば ξ_3 は初等的でない．加算，乗算，累乗が数学においてありふれているのに反して ξ_3 がもちいられることは稀である，という事実と考えあわせて，これは興味ある結果である．なお，後述するグジェゴルチクの階層は結果としてこのペレツキの定理の精密化になっている．

さて，従来は原始帰納函数をもちいてなされていた議論の多くにおいて，原始帰納函数にかわって初等函数をもちい得るということが，カルマール，ペレツキらの研究の結果あきらかにされた．とくに，[K 36] における‘原始帰納的’はそのままあるいは多少の修正をした上で‘初等的’と読みかえ得るというペレツキの結果[32]と，これにならってクリーニが証明した T 述語と U 函数が初等的であるという定理 [K 52] がある．このペレツキ・クリーニの定理は，前節に述べた T と U をなるべく簡単にするという方向に沿っての標準型定理の改良として恐らく最初のものである．なお，空でない集合が帰納可算集合であるための条件は初等函数の値域となることであるという定理が，系として得られる．

グジェゴルチクは制限帰納法[33]という一種の帰納法を導入して初等函数の定義と同値な条件を与えるとともに函数のひとつの階層を構成して，初等函数と原始帰納函数との関係をさらにあきらかにした [Grz 53][34]．一変数（または多変数）の函数 f が原始帰納法 (5a) によって g から（または (5b) によって h, g から）得られ，同時に

$$\forall \boldsymbol{x}(f(\boldsymbol{x})\leq j(\boldsymbol{x}))$$

がみたされている[35]とき，f は g, j から（または h, g, j から）制限帰納法によって得られるという．この帰納法は原始帰納法により真に

弱いものであることが示される．つぎにアッケルマン函数に類似した函数 $f_n(x, y)$ を定義する．はじめに

$$f_0(x, y)=y', f_1(x, y)=x+y, f_2(x, y)=x'y'$$

と定め，$n=2, 3, 4, \ldots$ に対しては

$$f_{n'}(0, y)=f_n(y', y'),$$

$$f_{n'}(x', y)=f_{n'}(x, f_{n'}(x, y))$$

と定める．$f_{n'}$ はこのように f_n からペーテルのいわゆる入れ子帰納法[36]で定められているのであるが，入れ子帰納法は原始帰納法に還元される[37]から，個々の n に対して f_n は原始帰納函数となる．いま，n を固定し，原始帰納函数の定義において原始帰納法を制限帰納法に変更するとともに f_n を追加したものを考える．すなわち，定値函数，恒等函数，S, f_n から合成と制限帰納法との有限回の適用で生成される函数を考える．そのような函数の全体を $\mathcal{E}^n$ であらわす．$n=0, 1, 2, \ldots$ に対する $\mathcal{E}^n$ の全体がグジェゴルチクの階層である．$\mathcal{E}^n$ は n が増すにつれて真に大きくなり，すべての n にわたる総和は原始帰納函数の全体と一致する．$\mathcal{E}^n$ に属する任意の函数 f に対して

$$(\forall x \geq k)(f(x)<f_{n'}(x, x))$$

をみたす k が定まる．また，$n \geq 3$ のとき，$\mathcal{E}^{n'}$ の函数 f で

$$f(x, 0), f(x, 1), f(x, 2), \ldots$$

が $\mathcal{E}^n$ の一変数函数の全体となるようなものが存在する．このようにグジェゴルチクの階層は原始帰納函数の複雑さのひとつの尺度になっていると考えられる．初等函数の全体は $\mathcal{E}^3$ に一致する．初等函数が階層のなかで占める位置は半端であるかにみえるが，このことによって初等函数という概念の自然さがそこなわれることはない．$\mathcal{E}^n(n \geq 3)$ において成立するいくつかの命題が $n<3$ においては未解決（$n \geq 3$ に対してもちいた方法が $n<3$ に通用しない）または不成立，という事実はむしろ初等函数の自然さをうらづけているように思われる．

ふたたび T と U の簡単化を考えよう．有限列のあらわしかたなどゲーデル数の対応のさせかたを変えてみても $\mathcal{E}^2$ の函数だけで算術化をおこなうことはいちじるしく困難と思われる．まして $\mathcal{E}^0$ の範囲内で

T と U に相当するものを得ようとするなら，ゲーデル数だけの修正に拘泥せず T や U の構成法を変えるべきであろう．さて，グジェゴルチクは標準型と称するものを $\mathcal{E}^0$ の函数で作っているのであるが，これはクリーニのものとはすこし形がちがって，任意の帰納函数 f に対して

$$\forall x(f(x)=E(\iota y(A(x,y)=0)))$$

をみたす函数 $A\in\mathcal{E}^0$ が存在するという定理である．ただし

$$E(x)=x\dot{-}[\sqrt{x}]^2$$

は $\mathcal{E}^0$ に属する大振幅の函数であり，記号 ιy は‘条件をみたす唯一の y’をあらわす．証明はクリーニによる T, U の構成とは異なった方法がもちいられている．この定理の系として，空でない帰納可算集合は $\mathcal{E}^0$ の函数の値域であるという定理が得られる．$\mathcal{E}^0$ の函数の増加の速さはたかだか x+const. の程度であるから，これは驚くべき結果である．グジェゴルチクの定理を修正して T と U に相当するものを $\mathcal{E}^0$ のなかで定め，クリーニのものと同じ形の標準型定理をみちびくことは困難でない．その証明は［N 75］の末尾に述べてある．

さきに述べた強い意味の計算可能性と初等函数との関連を説明してこの節を終えよう．強い意味の計算可能性とよび得るような概念を定義する最初のこころみはリッチーの研究[38]である．函数値の計算をテューリング機械によっておこなうものとして，計算の手間を記憶に要するテープの量ではかり，その予測を考える．帰納函数 f を計算するテューリング機械があって，任意の x に対して，$f(x)$ の値を計算するときに使用されるテープ[39]のこま数が $g(x)$ 以下である，という関係を考える．この関係をかりに f が g で予測されるということにする．この関係をもとにして帰納的につぎのような函数の階層を定義する．一次函数を第 0 級の函数と定める．第 n 級の函数で予測される函数をたかだか第 $n+1$ 級の函数と定め，たかだか第 $n+1$ 級であってたかだか第 n 級でないような函数を第 $n+1$ 級とする．ある自然数 n に対して第 n 級の函数であるようなものを，リッチーは予測計算可能函数[40]と名づけた．この予測計算可能な函数という概念とカルマールの

初等函数の概念とが一致することがリッチーによって証明された．このような結果からも，初等函数という概念にはなにか本質的な意味があるものと思われ，さらに深い研究がのぞまれる．

初等函数は数学基礎論においても計算機科学においても今後ますます重視されることになろう．帰納函数論の代表的な教科書のうちで初等函数に一節をあてているのはわずかに [P 51] と [Y 71] のみで，他の教科書ではまったくとりあげていないかせいぜい例題などでちょっとふれているだけ，という現状が惜しまれる．

VI　標準型定理の改良[41)]

標準型定理における T と U とに相当するものをいくつかの簡単な初等函数から陽函数として合成しようというのが筆者の目標である．かつて筆者はヒルベルトの第 10 問題の解決への手がかりを得る目的でディオファントス述語の枚挙定理を証明したが，その後マティヤセヴィッチによって第 10 問題が筆者の枚挙定理とは関係なく解決されたので，むしろ逆にマティヤセヴィッチの結果をディオファントス述語の枚挙定理に援用して標準型定理の改良を得た [N 74]．これをさらに改良したのが [N 75] の結果であり，その証明は [N 74] におけるのと同様である．相違点は自然数の対を自然数にうつす写像として J にかわって下記の P をもちいることである．

函数 $x', x+y, x\dot{-}y, xy, [\sqrt{x}]$ に関する陽函数の全体を考え，これを $\mathscr{F}$ であらわす．この函数族は [N 75] において筆者がはじめて導入したものであり，[N 70], [N 74] における函数族 $\mathscr{A}$ の部分族となっている．$\mathscr{F}$ に属する函数 f によって $f(x)=0$ とあらわせる述語を $\mathscr{F}$-述語とよぶ．$\boldsymbol{N}^2$ から $\boldsymbol{N}$ への全単射

$$P(x,y)=\begin{cases}x+y^2 & (x<y\ \text{のとき}),\\ x^2+x+y & (x\geq y\ \text{のとき})\end{cases}$$

が $\mathscr{F}$ に属していることはたやすくたしかめられる．

$$Q(P(x,y))=y$$

によって Q を定め，第IV節に記したマルコフの演算で Q' をつくれば

$Q''=Q, Q'^{\circ}=P$ であり

$$Q'(P(x,y))=x$$

がなりたつ．Q と Q' が $\mathscr{F}$ に属することは

$$E(x)=x\dot{-}[\sqrt{x}]^2$$

とおくとき

$$Q(x)=\begin{cases}[\sqrt{x}] & (E(x)<[\sqrt{x}] \text{ のとき}),\\ E(x)\dot{-}[\sqrt{x}] & (E(x)\geq[\sqrt{x}] \text{ のとき})\end{cases}$$

$$Q'(x)=\min([\sqrt{x}], E(x))$$

がなりたつことからたしかめられる．この P, Q, Q' を J, K, L にかえてもちいることで除算を不要にするのが [N 74] から [N 75] への改良である．

さて，$x+y$ と xy に関する陽函数が（自然数係数の）多項式であり，多項式 f, g によって $f(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{x})$ とあらわせる述語が多項式述語，そして多項式述語にいくつかの存在記号を前置した形にあらわされる述語がディオファントス述語である．前置された2個以上の存在記号をひとつにまとめることは多項式のみによっては不可能であり，現に多項式述語に1個の存在記号を前置してあらわせないディオファントス述語の存在がわかっている．1 個の存在記号ですべてのディオファントス述語があらわせるようにしようというのが，そもそも筆者が函数族 $\mathscr{A}$ を導入した目的であった．同じ目的は函数族 $\mathscr{F}$ で達せられる．多項式述語はすべて $\mathscr{F}$- 述語である．したがって任意のディオファントス述語は $\mathscr{F}$- 述語にいくつかの存在記号を前置してあらわせるが，存在記号が2個以上あるとき Q と Q' をもちいてそれを1個にまとめることができる．ゆえに任意のディオファントス述語は $\mathscr{F}$- 述語に存在記号を1個だけ前置してあらわせる．逆に，$\mathscr{F}$- 述語はディオファントス述語であるから，それに存在記号をいくつか前置したものもディオファントス述語である．

あたえられた不定方程式が解をもつか否かを判定する手続を求めよ，というヒルベルトの第 10 問題はディオファントス述語の決定問題とみることができる．その後，ヒルベルトが要求したような判定手続は

存在しないであろう，と予想されるにいたった．それは帰納的でないディオファントス述語の存在を意味する．ディオファントス述語の全体が帰納可算述語の全体と一致するであろうという予想のもとにデーヴィス，ロビンソンらが精力的に研究をつづけたにもかかわらず問題はながらく未解決で，十分条件がいくつか得られたにすぎなかった．十分条件のひとつ，あるnに対して

$$\forall x \forall y(D(x,y) \Rightarrow y < \xi_3(x,n))$$

をみたし，かつ，いかなるnに対しても

$$\forall x \forall y(D(x,y) \Rightarrow y < x^n)$$

をみたさないようなディオファントス述語Dの存在，というロビンソンの条件が知られていたが，1970 年にいたってマティヤセヴィッチがそのような述語を発見して難問はついに解決された．帰納可算述語がすべてディオファントス述語である（もちろん逆はあきらか）ことがわかったのであるから，ただちにつぎの定理が得られる．

定理 1. 述語Dが帰納可算であるための条件は

$$\forall \boldsymbol{x}(D(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \exists y R(\boldsymbol{x}, y))$$

をみたす $\mathscr{F}$- 述語Rが存在することである．

T述語はいうまでもなく帰納可算であるから定理１によって

$$T_n(z, \boldsymbol{x}, y) \Leftrightarrow \exists u V_n^*(z, \boldsymbol{x}, y, u)$$

をみたす $\mathscr{F}$- 述語 V_n^* がある．

$$V_n(z, \boldsymbol{x}, y) \Leftrightarrow V_n^*(z, \boldsymbol{x}, Q'(y), Q(y))$$

とおけば V_n も $\mathscr{F}$- 述語であり，つぎのような枚挙定理がなりたつ．

定理 2. n 変数の述語Dが帰納可算であるための条件は

$$\forall \boldsymbol{x}(D(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \exists y V_n(e, \boldsymbol{x}, y))$$

をみたす数eが存在することである．

なお，つぎの定理も定理１からみちびかれる．

定理 3. 空でない帰納可算集合は $\mathscr{F}$ の函数の値域である．

いよいよ，T とUにかわるものを定める．T にかわる $\mathscr{F}$- 述語は

$$F_n(z, \boldsymbol{x}, y) \Leftrightarrow V_{n+1}(z, \boldsymbol{x}, Q'(y), Q(y))$$

と定められる F_n であり，U にかわるのはQ' である．この F_n とQ'

に関して帰納函数の標準型定理，部分帰納函数の標準型定理，帰納可算述語の枚挙定理がなりたつ.

定理 4. 任意の n 変数帰納函数 f に対して

$$\forall \boldsymbol{x} \exists y F_n(e, \boldsymbol{x}, y),$$

$$\forall \boldsymbol{x} \forall y (F_n(e, \boldsymbol{x}, y) \Rightarrow Q'(y) = f(\boldsymbol{x})),$$

$$\forall \boldsymbol{x} (f(\boldsymbol{x}) = Q'(\mu y F_n(e, \boldsymbol{x}, y)))$$

をみたす数 e が存在する.

これが標準型定理であり，つぎのように証明される. 仮定から

$$f(\boldsymbol{x}) = y$$

は帰納可算述語（実は帰納述語）だから定理 2 をもちいて

$$f(\boldsymbol{x}) = y \Leftrightarrow \exists u V_{n+1}(e, \boldsymbol{x}, y, u)$$

をみたす数 e をとる. この e に対して定理にいう性質がなりたつことは F_n の定義をもちいて容易にみちびかれる.

同様にして部分帰納函数の標準型定理（定理 5）が証明され，その結果をもちいてつぎの枚挙定理が示される.

定理 6. n 変数の述語 D が帰納可算であるための条件は

$$\forall \boldsymbol{x} (D(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \exists y F_n(e, \boldsymbol{x}, y))$$

をみたす数 e が存在することである.

以上が [N 75] の結果の主要な部分である. 残る部分では $\mathscr{F}$ と他のいろいろな函数族との比較のための諸定理がみちびかれる.

定理 7. 任意の帰納函数 f に対して

$$\forall \boldsymbol{x} \exists y R(\boldsymbol{x}, y),$$

$$\forall \boldsymbol{x} \forall y (R(\boldsymbol{x}, y) \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) \leq y)$$

をみたす $\mathscr{F}$- 述語 R が存在する.

狭義単調増加函数 f の値域が帰納的ならば f も帰納函数であるという定理があり，帰納的を原始帰納的または初等的と読みかえても成立することが知られている. つぎの定理はこれとの対比である.

定理 8. $\mathscr{F}$ に属さない狭義単調増加函数で値域が $\mathscr{F}$- 集合となるようなものがある.

多項式の全体はあきらかに $\mathscr{F}$ の真部分集合であるが，述語に関し

て対応する命題がなりたつというつぎの定理は自明ではない.

定理 9. 多項式述語の全体は $\mathscr{F}$- 述語の全体の真部分集合である.

つぎに $\mathscr{F}$ の基礎にとった函数のうちのいくつかを減らしてさらにせまい函数族をつくりそのなかで T や U にあたるものを構成する，という方向で定理 4, 5, 6 をさらに改良できるか，という問題について考える．なお，x' と $x+y$ のうちの一方を除いても $\mathscr{F}$ の範囲に影響しないことは

$$x=x+1,$$

$$x+y=x'y'\dot{-}(xy)'$$

からあきらかである．また $\mathscr{F}$ が $x', x+y, x\dot{-}y, xy, [x/y], [\sqrt{x}]$ に関する陽函数の全体 $\mathscr{A}$ の真部分集合になっているか否かは未解決である.

$\mathscr{F}$ を生成する函数のなかから x' と $x+y$ の両方を除くことおよび xy を除くことに関しては未解決である．$x\dot{-}y$ が不可欠であることは，これを除いてしまえば得られるのは単調函数ばかりになってしまい大振幅の函数が得られなくなることから，マルコフの定理をもちいてみちびかれる（これは [N 75] には述べなかった事実である)．最後に，平方根は，かりに除算を追加したとしても，不可欠である．平方根を除いて除算を追加した $x', x+y, x\dot{-}y, [x/y]$ から生成される陽函数の全体を $\mathscr{B}$ とおく．やや繁雑な証明であるが $\mathscr{B}$ に属する函数は大振幅でないこと [N 75, 補題 16] が示される．この補題からただちに

定理 10. $[\sqrt{x}]$ は $\mathscr{B}$ に属していない.

定理 11. $\mathscr{B}$ は有界最小演算子，演算子 Σ，グジェゴルチクの制限帰納法のいずれに関しても閉じていない.

という二定理が得られ，さらにマルコフの定理をもちいて

定理 12. 任意の帰納函数 f に対して

$$\forall \boldsymbol{x}(f(\boldsymbol{x})=g(\mu y R(\boldsymbol{x}, y)))$$

をみたす $\mathscr{B}$- 述語 R が存在する，という条件を満足するような $\mathscr{B}$ の函数 g は存在しない.

という定理を得る.

グジェゴルチクの階層と $\mathscr{F}$ との関係については，$\mathscr{F}\subset\mathscr{E}^2$ であり

$\mathcal{F}\subset\mathcal{E}^1$ でないという自明な関係以外はわかっていない．$\mathcal{F}$ と $\mathcal{E}^0, \mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2$ との関係をあきらかにすることは，前述の定理 4, 5, 6 が最良のものであるかという問題とともに，今後の研究が期待される．

おわりに，[N 75] の序文にも述べた定理 4 のひとつの解釈を説明しよう．一語に収容できる数の大きさに制限のない仮想的な算譜式計算機を考え，基本的な演算としての任意の自然数の加算，減算，乗算，開平の機能がそなわっているものと仮定しよう．そして料 z, x に対して

$$Q'(\mu y F_n(z, x, y))$$

を求める算譜を考える．Q' や F_n の計算は原理的にはループや副譜をつくることなくまったく逐次的に進行するような算譜でおこなえるから，最小演算子の計算にのみ条件飛越によるループをつくればよい．このように，ただひとつのループをもつ‘万能算譜’が存在することがわかる．実はループが単一であるのみならず条件飛越命令を 1 個だけしかもたない万能算譜が得られたのであり，このことは条件飛越命令というものの機能の強力さをあらわしていると考えられよう．

注

1) ゲーデル自身はオメガ無矛盾性という無矛盾性よりつよい条件を仮定していた．無矛盾性という仮定で十分であることを示したのはロッサー (B. Rosser, 1936) である．
2) 自由変数を含まぬ論理式をいう．従ってそれは真偽の確定した命題をあらわしている．
3) arithmetization.
4) 素因数表示（後述）その他いろいろのあらわしかたがある．
5) フランス語 effectif. 具現的という訳は近藤基吉氏による．
6) ドイツ語 formal unentscheidbarer Satz.
7) ゲーデルはこれを単に rekursive Funktion とよんだ．原始帰納函数 (primitive recursive function) の名はクリーニによる．
8) representable.
9) bounded minimum operator.
10) 証明可能性は‘証明図が存在する’と定義されるから例外である．
11) numeral. ドイツ語 Ziffer.

12)　この仮定は命題を述べやすくするものにすぎず，必須のものではない.

13)　minimum operator.

14)　実はこの述語は帰納的でさえないことが知られている.

15)　Recursion Theorem. Kleene 1938, 1952.

16)　述語のときは値は数でなく真・偽であるが，そのおのおのにたとえば数 0, 1 を対応させておけばよい.

17)　y が存在するとは限らないから．なお，部分帰納的ではある.

18)　program を算譜，data を料などと訳すのは西村恕彦氏，島内剛一氏らによる．bit 誌第 8 巻第 8 号（1976 年 8 月）参照.

19)　Pennsylvania 大学，1946 年完成.

20)　Cambridge 大学，1949 年完成.

21)　たとえばテューリング機械のテープは無限に長いものと仮定する.

22)　degree of unsolvability. 決定不可能次数とも訳す.

23)　文献に見あたらないが既知のことと思われる．なお，これが初等的であるというさらに強い結果は筆者の [N 68], [N 75].

24)　A. A. Markov, 1947.

25)　ロシヤ語 bol'šoi razmah. なおドイツ語ではこのような函数を umfangreich であるともいう.

26)　W. Ackermann, 1928.

27)　Péter Rózsa, 1935.

28)　A. V. Kuznecov, 1950.

29)　Kalmár László, 1943. ハンガリー語の論文で，ドイツ語による要旨が附してある.

30)　ハンガリー語 elemi függvény. elementary function と英訳される．なお，解析学における初等函数の概念（Liouville によるもの）とは関係ない.

31)　Bereczki Ilona, 1950 および Péter Rózsa, 1954.

32)　Bereczki Ilona, 1949 の未発表の結果として [K 52] に引用されている．クリーニはこの結果をカルマールから知らされたという.

33)　limited recursion.

34)　この文献は田中尚夫氏に御教示いただいた.

35)　文字 j に特別な意味はない.

36)　ハンガリー語 beskatulyázott rekurzió. nested recursion と英訳される.

37)　Péter Rózsa, 1934, 1935.

38)　R. W. Ritchie, 1963. なお [Y 71] 参照.

39) テープ上の数値の表現は2進法表示と仮定する.

40) predictably computable function.

41) この節の定理の番号は [N 75] と合わせてある.

42) [G 31] の英訳と [Ch 36], [K 36], [K 43], [T 36–7] は論文集 [D 65] におさめられている. また講義録 [G 34] はこの論文集ではじめて印刷されたものである.

文　献[42)]

[Ch 36] Alonzo Church: An unsolvable problem of elementary number theory. Amer. J. Math. **58** (1936). 345–363.

[D 58] Martin Davis: Computability and unsolvability. New York, 1958.

[D 65] Martin Davis, ed.: The undecidable. New York, 1965.

[G 31] Kurt Gödel: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. Monatsh. Math. Phys. **38** (1931), 173–198.

[G 34] Kurt Gödel: On undecidable propositions of formal mathematical systems. (1934). [D65], 41–74.

[Grz 53] Andrzej Grzegorczyk: Some classes of recursive functions. Rozprawy Matematyczne **4**. Warszawa, 1953.

[K 36] Stephen C. Kleene: General recursive functions of natural numbers. Math. Ann. **112** (1936), 727–742.

[K 43] Stephen C. Kleene: Recursive predicates and quantifiers. Trans. AMS **53** (1943), 41–73.

[K 52] Stephen C. Kleene: Introduction to metamathematics. Amsterdam, Groningen and Princeton, 1952.

[M 65] A. I. Mal'cev: Algoritmy i rekursivnyje funkcii. Moskva, 1965.

[N 68] Takashi Nagashima: On elementary functions of natural numbers. Hitotsubashi J. Arts Sci. **9** (1968), 50–58.

[N 70] 永島孝: ディオファントス述語の枚挙. 一橋大学研究年報自然科学研究 **12** (1970), 137–148.

[N 74] 永島孝: 帰納函数の標準形について, 一橋大学研究年報自然科学研究 **16** (1974), 57–63.

[N 75] Takashi Nagashima: On a certain class of recursive functions. Hitotsubashi J. Arts Sci. **16** (1975), 72–81.

[P 51] Rózsa Péter: Rekursive Funktionen. Budapest, 1951.

[T 36–7] Alan M. Turing: On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. Proc. London Math. Soc. ser. 2, **42** (1936–7), 230–265. A correction, ibid. **43** (1937), 544–546.

[Y 71] Ann Yasuhara: Recursive function theory and logic. New York, 1971.

(昭和 52 年 3 月 22 日 受理)