利子率の期間構造に関する純粋期待仮説のワルド検定

釜 江 廣 志

§1 はじめに

利子率の期間構造についての純粋期待仮説のテストは，これまで様々に試みられてきた．多くの研究において，純粋期待仮説を表現する単一の方程式を回帰分析するテストが行なわれているが[1]，最近では検出力のより高い時系列分析によるアプローチがよく用いられる[2]．Sargent (1979), Campbell and Shiller (1987), MacDonald and Speight (1988) などは，長期債として残存5年から20年までの米英両国の利付債を採用し，2変量ベクトル値自己回帰 (bivariate vector autoregressive, BVAR) モデルを使って，純粋期待仮説から導かれる制約が満たされているかどうかをテストしている．ところで，期間構造理論は残存期間の利回りへの影響を分析するものであり，残存期間以外のクーポンなどの要因が一定であるサンプルを用いることが望ましい．しかし，一般に利付債には銘柄毎に異なるクーポンが付されてこれらが利回りに影響を及ぼしており，わが国の利付債の場合にも，クーポンと残存期間がともに一定であるようなサンプルをある程度の長さの分析対象期間全体に渡って採集することは困難である．こ

のように一定ではないクーポンを持つ利付債の利回りデータをそのまま用いることは適切ではないので，本稿ではクーポンが一定であるような，実際には存在しない利付債の利回りの時系列データを推計によって得て，これを計測の対象とする．

BVAR モデルによって期間構造がテストされる際，このモデルは定常的（stationary）な時系列にしか適用できないので，非定常的な長期と短期の利子率を定常化するべく，それらの1階の階差をとったものが変数として用いられることが多い[3]．しかしこの場合，長・短期の利子率の水準に関する情報の損失が生じる，また長期と短期の利子率が cointegrated であれば，それらの1階の階差に関する有限の BVAR モデルは存在しない[4]，などの問題点がある．そこで，Campbell and Shiller (1987) と MacDonald and Speight (1988) は長短の利子率の差（スプレッド）と短期利子率とを変数とする BVAR を用いる[5]．本稿でもこの方法が採用される．後に示されるように，短期利子率には単位根が存在せず定常的であり，1階の階差も定常的である．またほとんどのスプレッドも定常的であり，回帰式の説明変数が定常的でなければならないとの要件[6]は満たされる．

なお，本稿では，期待形成仮説として合理的期待仮説を前提としており，これと純粋期待仮説との結合仮説がテストされる．従って，この結合仮説が棄却されることは，これを構成する両仮説のうちの少なくともどちらか一方が棄却されることを意味する．

第2節では，スプレッドと短期利子率の1階の階差を変数とするBVARモデルを用いて，利付債の利回りのタームでの純粋期待仮説が定式化される．第4節において，この仮説がワルド検定法と第3節で説明されるデータとを用いてテストされるが（4－3節），その際各変数が定常的であることが確認され（4－1節），かつ BVAR モデルの自己回帰過程の次数が統計的に決定される（4－2節）．

§2　純粋期待仮説の定式化

利子率の期間構造の純粋期待仮説は，利付債の利回りのタームでは

$$(1)\qquad R_t=[(1-\alpha)/(1-\alpha^m)]\sum_{k=0}^{m-1}\alpha^k E_t(r_{t+k})$$

と表わされる．ここに，R_t は期 t の長期利子率（利付債の最終利回り），r_t は短期利子率，E は期待を表わすオペレータ，α は「割引要素」であって R_t の平均を $\bar{R}$ として $\alpha=1/(1+\bar{R})$ である[7]．利子率は1期当りで表わされる．期待形成に関しては合理的期待形成仮説が仮定される．即ち，その時点で利用可能な全ての情報に基づいて期待形成がなされる．$\bar{R}>0$ なら $\alpha<1$ であり，$m\to\infty$ の時，$\alpha^m\to 0$ であるから，（1）式は

$$(2)\qquad R_t=(1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k E_t(r_{t+k})$$

となる．スプレッド S_t は R_t と r_t の差と定義され，

$$(3)\qquad S_t=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^k E_t(\Delta r_{t+k})$$

なる関係が得られる[8]．

2変数 Δr_t と S_t を用いる n 次の BVAR モデルは次のように表わされる．

$$(4)\qquad \begin{bmatrix}\Delta r_t\\ S_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a(L) & b(L)\\ c(L) & d(L)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta r_{t-1}\\ S_{t-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}u_{1t}\\ u_{2t}\end{bmatrix}.$$

ここに，$a(L)$, $b(L)$, $c(L)$, $d(L)$ はラグ・オペレータ L の n 次の多項式，つまり

$$a(L)=\sum_{k=1}^{n}a_k L^k,$$

$$b(L)=\sum_{k=1}^{n} b_k L^k,$$

$$c(L)=\sum_{k=1}^{n} c_k L^k,$$

$$d(L)=\sum_{k=1}^{n} d_k L^k$$

である．ラグ・オペレータ L は $L^k z_t = z_{t-k}$ を意味する．また攪乱項を

$$\begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} = v_t$$

と書くと，

$$(5)\quad \begin{cases} E(v_t)=0, \\ E(v_t v_{t-i}) = \begin{cases} \Omega & (i=0) \\ 0 & (i\neq 0) \end{cases} \end{cases}$$

が仮定される．

式（4）を

$$(6)\quad \begin{bmatrix} \Delta r_t \\ \Delta r_{t-1} \\ \vdots \\ \Delta r_{t-n+1} \\ S_t \\ \vdots \\ \vdots \\ S_{t-n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdots & a_n & b_1 \cdots & b_n \\ 1 \cdots & 0 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 \cdots\ 1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ c_1 \cdots & c_n & d_1 \cdots & d_n \\ 0 \cdots & 0 & 1 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 \cdots & 0 & 0 \cdots\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r_{t-1} \\ \Delta r_{t-2} \\ \vdots \\ \Delta r_{t-n} \\ S_{t-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ S_{t-n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{2t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

のように変形すると，これは

$$(7)\qquad X_t = AX_{t-1} + \varepsilon_t$$

と書ける．式（3）を X を用いて表わすと

$$(8)\qquad e'X_t = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k E_t(f'X_{t+k})$$

である．ここに，e', f' は $(1\times 2n)$ のベクトルで，e' は第 $(n+1)$ 要素が

1で他要素は全て 0，f' は第1要素が1で他要素は全て0である．

式（7）から

$$X_{t-1+k}=A^kX_{t-1}+A^{k-1}\varepsilon_t+A^{k-2}\varepsilon_{t+1}+\cdots+\varepsilon_{t-1+k} \tag{9}$$

が得られる．期 $t-1$ で予測を行なう際に与えられている情報集合が S と Δr の過去の値のみから構成されているとすれば，$\varepsilon_t, \varepsilon_{t+1}$ などの将来期の撹乱項は未知であり，これらをその期待値，つまり0で置き換えることによって[9]，期 $t-1$ に形成される X の k 期先の最適予測値が得られ

$$E_{t-1}(X_{t-1+k})=A^kX_{t-1} \tag{10}$$

となる[10]．最適予測値は与えられた全ての情報を利用しており，合理的期待仮説に基づく期待値と同一である[11]．式（8）と（10）から

$$\begin{aligned} e'X_{t-1}&=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^kE_{t-1}(f'X_{t-1+k}) \\ &=\sum_{k=1}^{\infty}f'\alpha^kA^kX_{t-1}, \end{aligned} \tag{11}$$

従って

$$e'=\sum_{k=1}^{\infty}f'\alpha^kA^k=f'\alpha A(I-\alpha A)^{-1} \tag{12}$$

である．変形して

$$e'(I-\alpha A)=f'\alpha A \tag{13}$$

であり，結局

$$e'I=(e'+f')\alpha A \tag{14}$$

が得られる．

§3　データ

用いられるデータは次の通りである．利付国債の各月のデータを利用してクーポンが一定である債券の割引要素と価格が推計され，これらから得られる利回りが計測に用いられる．推計には，連続的なクーポン支払いを想定してスプライン関数を用いる Thies (1985) の方法が，クーポンが離散的に支払われるとの仮定に基づいて修正して用いられる[12]．

利付国債のサンプルは東証に上場の全ての長期国債で，価格は小口売買取引の月末値である．クーポン・レートと残存期間がともに等しい銘柄が複数個あれば，残存額の最も多いものが採用される．国債先物の取引開始とともに現物国債の流通市場の構造が変化した可能性があることを考慮して，データ採集の期間は国債先物の取引開始後の 1985 年 10 月から 1989 年 3 月までとされ，月次データが採集されるのでサンプルは 42 か月分である．推計により得られる各月の利回りは，クーポンが 4，6，8%，残存期間が 4，6，8，10 年の 12 種類の利付債のそれである．データ採集期間において上場されている利付国債のうち残存 4 年以上の銘柄のクーポン・レートは 3.9% から 8.5% までであるので，上記のクーポンの利付債が分析対象とされる．クーポンが x%，残存期間が I 年 (I=04, 06, 08, 10) のものの 1 期当りの最終利回り（年利表示）は RxI と書かれる．なお，計測の単位期間（1 期）は 3 か月である．短期利子率 r のデータは 3 か月物現先レート（期末における平均，1 期当り，年利表示）である．スプレッドは $SxI=RxI-r$ である．「割引要素」α は $1/(1+\bar{R})$ である．ここに $\bar{R}$ は最終利回りであり，このデータとしては得られる RxI の 42 カ月間の平均値が用いられる．

§4　検定の方法とその結果

4－1. 単位根の検定

各変数が定常的であるか否かは，単位根が存在するかどうかを Fuller (1976) の τ 値による方法を用いて検定することによって，テストされる．帰無仮説は「単位根が存在する」である．期 $t(t=1, 2, \cdots)$ の変数を y_t で表わす．次の 3 式から得られる ρ の推定値が 1 に等しい時，変数 y に単位根が存在する．そこで

(15 a)　　$y_t=\rho y_{t-1}+u_t$

(15 b)　　$y_t=\mu+\rho y_{t-1}+u_t$

(15 c)　　$y_t=\mu+\beta t+\rho y_{t-1}+u_t$

を OLS で推定し，得られる ρ の推定値 $\hat{\rho}$ から $\tau=(\hat{\rho}-1)/s$ を計算する．ここに s は $\hat{\rho}$ の標準誤差である．τ が Fuller (1976) の表から得られる臨界値よりも大なら，帰無仮説は棄却されない．結果は表 1 の通りである．単位根は，式 (15 a) の検定からは，全ての R に 5% または 1% 有意水準で存在し，r には存在しない．1 階の階差をとると，Δr と全ての ΔR に 5% で存在しない．残存 10 年のスプレッドには存在するが，それ以外のスプレッドには存在しない．式 (15 b) と (15 c) の検定からは，r と全ての R と Δr と全ての ΔR と全ての S に 5% で存在しない．これらの結果から，一部の残存期間のスプレッドを除き，短期利子率の 1 階の階差 Δr とスプレッド S が定常的であると見なしてよいであろう．

表 1　単位根の検定結果

変数	τ_a	τ_b	τ_c	変数	τ_a	τ_b	τ_c
r	−4.21	−12.17	−7.78	ΔR 608	−8.03	−7.98	−8.16
R 810	−1.41**	−6.20	−5.97	ΔR 606	−7.60	−7.61	−7.84
R 808	−1.76**	−5.74	−5.65	ΔR 604	−7.14	−7.05	−7.62
R 806	−2.02*	−5.68	−5.49	ΔR 410	−7.66	−7.62	−7.50
R 804	−2:25*	−6.11	−4.98	ΔR 408	−8.08	−8.08	−8.17
R 610	−1.37**	−6.17	−5.97	ΔR 406	−7.67	−7.68	−7.85
R 608	−1.74**	−5.73	−5.75	ΔR 404	−7.21	−7.14	−7.60
R 606	−2.00*	−5.64	−5.64	S 810	−2.00*	−5.81	−4.93
R 604	−2.25*	−6.13	−5.22	S 808	−3.02	−6.86	−6.45
R 410	−1.32**	−6.12	−5.92	S 806	−4.14	−6.46	−6.03
R 408	−1.72**	−5.79	−5.91	S 804	−5.21	−6.47	−6.29
R 406	−1.99*	−5.61	−5.79	S 610	−1.96*	−5.75	−4.74
R 404	−2.22*	−6.12	−5.44	S 608	−3.06	−6.81	−6.33
Δr	−6.52	−6.12	−6.69	S 606	−4.11	−6.30	−5.93
ΔR 810	−7.78	−7.70	−7.58	S 604	−5.12	−6.26	−6.01
ΔR 808	−7.97	−7.30	−8.14	S 410	−1.92**	−5.63	−4.52
ΔR 806	−7.59	−7.55	−7.87	S 408	−2.93	−6.69	−6.24
ΔR 804	−7.07	−7.01	−7.65	S 406	−4.04	−6.17	−5.78
ΔR 610	−7.73	−7.64	−7.54	S 404	−5.04	−6.02	−5.72

表 1 の注：τ_a, τ_b, τ_c はそれぞれ，式 (15 a), (15 b), (15 c) から得られる ρ の推定値とその標準偏差 s を用いて計算された $\tau=(\hat{\rho}-1)/s$ である．τ が Fuller (1976) の表から得られる臨界値よりも大なら，単位根が存在する（*は 1% 水準で，**は 5% と 1% の両水準で存在することを示す）．5%，1% 水準の順に，τ_a の臨界値はそれぞれ −1.95, −2.62, τ_b のそれは −2.93, −3.58, τ_c のそれは −3.50, −4.15 である．

4-2. モデルの同定

式（4）の BVAR モデルの自己回帰過程の次数を決定するために，AIC（赤池情報量基準）と尤度比検定が用いられる．本稿ではデータとして月次のそれが使われ，かつ 4 半期が 1 期であるので，BVAR モデルの次数 m は $m=3, 6, 9, 12, 15$ に関して計算がなされる．AIC による方法は次の通りである．

m 次の BVAR モデルの AIC を AIC(m) と書くと，ここでは

$$\mathrm{AIC}(m)=T\cdot\ln|\textstyle\sum_m|+2mr^2$$

である．ここに T はサンプル数，$\sum_m$ は m 次の BVAR モデルの攪乱項ベクトルの共分散行列の推定値，r は VAR モデルの変量数である．いま $r=2$ であるから

$$\mathrm{AIC}(m)=T\cdot\ln|\textstyle\sum_m|+8m \tag{16}$$

となる．AIC を最小にする次数が求められるべき次数 m であるが，表 2 a に示される計測結果から，m は全てのケースで 3 である．

表 2 a　**AIC によるモデルの同定の結果**

$s\backslash m$	3	6	9	12	15
S810	−1130.2	−1112.9	−1097.4	−1084.7	*
S808	−1139.7	−1124.7	−1118.0	−1103.6	*
S806	−1140.0	−1126.0	−1118.7	−1106.2	*
S804	−1147.2	−1135.8	−1127.5	−1115.7	*
S610	−1127.5	−1110.2	−1094.2	−1081.9	−1072.6
S608	−1138.5	−1123.2	−1116.2	−1101.5	*
S606	−1137.9	−1123.6	−1115.7	−1103.5	*
S604	−1143.4	−1131.4	−1122.2	−1110.8	*
S410	−1124.3	−1107.0	−1090.6	−1078.5	−1068.7
S408	−1137.0	−1121.4	−1114.0	−1099.0	*
S406	−1135.4	−1120.8	−1112.2	−1100.5	*
S404	−1138.6	−1125.9	−1116.2	−1106.0	*

表 2 a の注：次数が m の時，式 (16) によって得られる AIC の値である．これらのうちで最小になるものをもたらす m が選ばれる．なお，* は共分散行列が特異となり，値が計算できないことを示す．

尤度比検定は次の通りである[13)]．$m>k$ に対し，「自己回帰過程が m 次である」を帰無仮説，「自己回帰過程が k 次である」を対立仮説とする．尤度比

$$LR=T(\ln|\textstyle\sum_k|-\ln|\sum_m|)$$

は自由度 $4(m-k)$ のカイ2乗分布をする．この値が臨界値より大なら，帰無仮説は棄却される．式 (16) から

$$\text{LR}=\text{AIC}(k)-\text{AIC}(m)+8(m-k) \tag{17}$$

である．

4半期，つまり3か月が1期であるので，式 (17) において $k=m-3$ とする．この時得られる LR を LR(m) と書く．即ち

$$\text{LR}(m)=\text{AIC}(m-3)-\text{AIC}(m)+24 \tag{18}$$

である．尤度比検定の結果は表2bの通りである．節約の原理に従い，尤

表2b　尤度比検定によるモデルの同定の結果

S	次数 (m)	LR(m−3)	LR(m)
S810	6	109.3	6.7
S808	6	115.9	9.0
S806	6	117.9	10.0
S804	6	109.1	12.6
S610	6	109.2	4.7
S608	6	115.7	7.7
S606	6	122.9	9.7
S604	6	108.3	12.0
S410	6	109.3	6.7
S408	6	115.7	8.4
S406	6	118.0	9.4
S404	6	107.7	11.3

表2bの注: LR(m−3), LR(m) はそれぞれ式 (18) によって得られた尤度比で，これらを用いて自己回帰過程の次数を決めるために尤度比検定が行なわれる．LR(m−3), LR(m) が自由度12のカイ2乗分布の臨界値 (5%有意水準で21.0, 1%で26.2) よりも大きければ，自己回帰過程がそれぞれ (m−3) 次，m 次であるとの帰無仮説は棄却される．

度比検定で帰無仮説が棄却されない次数のうちで最小の次数mを求めると，全てのケースで6である．

4半期が1期であるので，以下では次数nを$m/3$とする．従って，全てのケースは次数を1，2として，ワルド検定の対象にされる．

4-3. 純粋期待仮説の検定とその結果

純粋期待仮説から導出された関係

$$e'I=(e'+f')\alpha A \tag{14}$$

はワルド検定により以下のようにテストされる．θとrを

$$\theta' \equiv (a_1 \cdots a_n \ b_1 \cdots b_n \ c_1 \cdots c_n \ d_1 \cdots d_n)$$
$$r(\theta)' \equiv e'I-(e'+f')\alpha A$$

と定義する．式（14）は

$$r(\theta)'=0$$

となる．BVAR モデル

$$\begin{bmatrix}\Delta r_t \\ S_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a(L) & b(L) \\ c(L) & d(L)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta r_{t-1} \\ S_{t-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}u_{1t} \\ u_{2t}\end{bmatrix} \tag{5}$$

を推定して得られるθの推定値を$\hat{\theta}$とする．ワルド検定統計量

$$\mathrm{WD}=r(\hat{\theta})'[D'\{\Omega\otimes(Y'Y)^{-1}\}D]^{-1}r(\hat{\theta}) \tag{19}$$

を計算し，これが自由度$2n$のカイ2乗分布の臨界値よりも大であれば，帰無仮説，即ち純粋期待仮説は棄却される．ここに，$\otimes$はクロネッカー積，Tはサンプル数，Yは（$T\times 2n$）の行列，

$D=\partial r(\theta)/\partial\theta$,

$$\Omega=\begin{bmatrix} E(u_{1t}^{2}) & E(u_{1t}u_{2t}) \\ E(u_{1t}u_{2t}) & E(u_{2t}^{2}) \end{bmatrix},$$

$$Y=\begin{bmatrix} \Delta r_{t-1} & \Delta r_{t-2} \cdots \Delta r_{t-n} & S_{t-1} & S_{t-2} \cdots S_{t-n} \\ \Delta r_{t-1+1/3} & \cdots & S_{t-1+1/3} & \cdots \\ \vdots & & & \\ \Delta r_{t-1+(T-1)/3} & \cdots & S_{t-1+(T-1)/3} & \cdots \end{bmatrix}$$

表 3　純粋期待仮説の検定結果

S	次数(n)	WDy	WDo
S810	1	6.13	2.56**
	2	14.10	8.55*
S808	1	10.78	7.32
	2	22.74	10.15
S806	1	13.08	11.35
	2	17.53	10.67
S804	1	8.56	10.22
	2	18.11	11.43
S610	1	6.06	2.47**
	2	13.10	8.26*
S608	1	10.57	7.17
	2	22.24	10.12
S606	1	12.81	11.27
	2	16.59	10.40
S604	1	8.28	9.90
	2	16.78	10.69
S410	1	5.99*	2.38**
	2	11.98	7.92*
S408	1	10.34	7.03
	2	21.64	10.10
S406	1	12.54	11.22
	2	15.60	10.17
S404	1	8.09	9.66
	2	15.62	10.26

表 3 の注：n は式（4）の自己回帰過程の次数である．WDy と WDo は式（4）と (19) により計算されたワルド検定統計量で，前者は式（4）をユール＝ウオーカー法て推定する場合のそれ，後者は式（4）を OLS で推定する場合のそれである．これらが自由度 $2n$ のカイ 2 乗分布の臨界値よりも大であれば，純粋期待仮説は棄却される．臨界値は 5%，1% 有意水準の順に次の通りである．自由度が 2 の時，5.99，4.61，自由度が 4 の時，9.49，7.78．WD の値につけた*と**はそれぞれ 5% 有意水準と 1%，5% の両有意水準で純粋期待仮説が棄却されないことを示す．

である．なお本稿では 1 期を 3 か月としているので，$\Delta r_{t-1+T/3}$ は期 $(t-1+T/3)$ の Δr，つまり期 $t-1$ の T 月後の Δr を表わす．

検定の結果は表 3 の通りである．式（4）をユール＝ウォーカー法で推定する場合の全てのケースと，OLS で推定する場合の，スプレッドとして残存 8 年以下のそれを用いるケースにおいては，純粋期待仮説は 5% 有意水準で棄却される．なお，残存 10 年のスプレッドを用いて OLS で推定するケースでは純粋期待仮説が棄却されないが，これらのスプレッドは表 1 の結果から定常的ではないので，計測結果は割り引いて考えられるべきであろう．

§5 おわりに

本稿では，わが国の国債の先物取引開始後の時期において，長期債として一定のクーポンを持つ利付債を取り上げ，その利回りの期間構造に関する純粋期待仮説が成立しているか否かが，時系列分析，具体的には2変量ベクトル値自己回帰モデルの枠組みにおいてワルド検定によりテストされた．検定結果を要約すると，ほとんどの残存期間については純粋期待仮説が通常の有意水準で成立しない．この結果は拙稿（1989）のそれとほぼ同じである．なお，本稿では合理的期待形成仮説を前提として検定を行なっている．しかし，合理的期待仮説が適切ではなく，かつ純粋期待仮説が成立するという可能性もある．

純粋期待仮説が成立しないことはリスク・プレミアムが存在することを意味する．リスク・プレミアムの分析は残された問題である．

付録　一定のクーポンの利付債の利回りの推計

わが国の利付国債はその利払いが半年毎に行われる．利付債の年当りのクーポンを C，現時点での残存期間を M 年（即ち $2M$・利払い期）とする．N を $2M$ の小数点以下を切り捨てた整数部分とすると，この債券の利払いは，現時点から $(M-N/2)$ 年後，$(M-N/2+1/2)$ 年後，…，$(M-1/2)$ 年後，M 年後になされる．経過利子を考慮すると，最初の利子は $C/2$ ではなく $(2M-N)\cdot(C/2)$ である．この債券の価格は

$$
\begin{aligned}
(A1)\quad P &= (2M-N)(C/2)\cdot\delta(2M-N)+(C/2)\cdot\delta(2M-N+1)+\cdots \\
&\quad +(C/2)\cdot\delta(2M-1)+(C/2+100)\cdot\delta(2M) \\
&= (2M-N)(C/2)\cdot\delta(2M-N)+(C/2)\textstyle\sum^{N}_{r=1}\delta(2M-N+r) \\
&\quad +100\cdot\delta(2M)
\end{aligned}
$$

に等しい．ここに $\delta(s)$ は s・利払い期間の割引要素であり，期 t における s・利払い期間のスポット・レートを $R_{st}{}^*$ として一般的に $1/(1+R_{st}{}^*)^s$ と表わされる．以下ではクロス・セクション回帰がなされるので t は省略される．割引要素は次のように s の3次のスプライン関数で近似できると仮定される．

(A 2) $\delta(s)=d_0+d_1\cdot s+d_2\cdot s^2+d_3\cdot s^3+d_4\cdot z_1{}^3+d_5\cdot z_2{}^3+d_6\cdot z_3{}^3$,

ここに

$$z_i=\begin{cases} s-k_i & (\text{if } s-k_i>0) \\ 0 & (\text{if } s-k_i\leqq 0) \end{cases}$$

である．k_i はスプライン関数の節点で，以下ではア・プリオリに $i=1$ から順に 2, 4, 8（単位は利払い期）であるとする．割引要素を式 (A 1) に代入して整理すると

(A 3)
$$\begin{aligned}P=&d_0[(C/2)(2M-N)+C\cdot N/2+100]+d_1\{(C/2)(2M-N)^2\\&+(C\cdot N/2)[(2M-N)+(N+1)/2)]200M\}\\&+d_2\{(C/2)(2M-N)^3+(C\cdot N/2)[(2M-N)^2+(N+1)(2M-N)\\&+(N+1)(2N+1)/6]+400M^2\}+d_3\{(C/2)(2M-N)^4\\&+(C\cdot N/2)[(2M-N)^3+3(N+1)(2M-N)^2/2\\&+(N+1)(2N+1)(2M-N)/2+N(N+1)^2/4]+800M^3\}\\&+d_4\{(C/2)(2M-N)(2Z_1-N)^3+(C\cdot N/2)[(2Z_1-N)^3\\&+3(N+1)(2Z_1-N)^2/2+(N+1)(2N+1)(2M-N)/2\\&+N(N+1)^2/4]+800M^3\}+d_5\{(C/2)(2M-N)(2Z_2-N)^3\\&+(C\cdot N/2)[(2Z_2-N)^3+3(N+1)(2Z_2-N)^2/2+(N+1)\\&\times(2N+1)(2M-N)/2+N(N+1)^2/4]+800M^3\}\\&+d_6\{(C/2)(2M-N)(2Z_3-N)^3+(C\cdot N/2)[(2Z_3-N)^3\\&+3(N+1)(2Z_3-N)^2/2+(N+1)(2N+1)(2M-N)/2\\&+N(N+1)^2/4]+800M^3\}\end{aligned}$$

が得られる．ここに

$$Z_t=\begin{cases}M-k_t/2 & (\text{if } M-k_t/2>0)\\ 0 & (\text{if } M-k_t/2\leqq 0)\end{cases}$$

であり，$k_t/2$ の単位は年である．上式を各月毎にクロス・セクション回帰すると各月の d_0 などの係数推定値が得られる．

特定の C, M に対応する利付債の各月の価格 P の推計値は，式 (A 3) に係数推定値とこれらの C, M を代入すると得られ，さらにこれらを次の式に代入して解くと，特定のクーポンと残存期間を持つ利付債の各月の最終利回り R が計算できる．結果は付表のとおりである．

(A 4) $P=\sum^{2M}{}_{s=2M-N}(C/2)/(1+R)^s+100/(1+R)^{2M}$

注

1) 拙稿 (1989) もその1例である．

2) 2つの接近法の比較について，山本 (1986) p. 275-6 参照.

3) 例えば Sargent (1979), Baillie and McMahon (1985) 参照.

4) MacDonald and Speight (1988) p. 290 参照.

5) なお，2変量ベクトル値移動平均 (VMA) モデルではなく BVAR モデルが用いられるのは，2変量が共に定常である過程を構成している場合，これは2変量 VMA モデルで表わされ，さらに反転可能性条件が満たされれば，BVAR モデルで近似することができるからである．Baillie 他 (1983) p. 554, Judge 他 (1985) p. 658 参照.

6) Campbell and Shiller (1987) p. 1065-66 参照.

7) Shiller 他 (1983) p. 178 参照．なお，付録に後記されるように，厳密には，最終利回りではなくスポット・レートを用いて定義されるものが割引要素と呼ばれるべきであろう．

8) Campbell and Shiller (1987) の式（3）参照.

9) 山本 (1986) p. 81 参照.

10) Granger and Newbold (1986) p. 229, Campbell and Shiller (1987) p. 1067 参照.

11) このような説明の仕方について，Sargent (1972) p. 74, Shiller (1973)

p. 856 参照．また Modigliani and Shiller (1973, p. 29), Pesando (1975, p. 851) によれば，最適予測値は合理的期待仮説の条件のうちの efficiency の条件を満たしている．なお，この説明に対し Nelson (1975) は，「合理的〔期待形成〕」の概念が「最適〔予測〕」の概念に退化した，と批判している (p. 331)．

12) 付録参照．

13) Judge 他 (1985) p. 686–参照．

参考文献

Baillie, R., R. Lippens and P. McMahon (1983), "Testing Rational Expectation and Efficiency in the Foreign Exchange Market", *Econometrica*, May.

Baillie, R. and P. McMahon (1985), "Some Joint Tests of Market Efficiency", *Journal of Macroeconomics*, Spring.

Campbell, J. and R. Shiller (1987), "Cointegration and Tests of Present Value Model," *Journal of Political Economy*, Oct.

Fuller, W. (1976), *Introduction to Statistical Time Series.*

Granger, C. and P. Newhold (1986), *Forecasting Economic Time Series.*

Judge, G., W. Griffiths, C. Hill, H. Lutkepohl and T. Lee (1985), *The Theory and Practice of Econometrics.*

MacDonald, R. and A. Speight (1988), "The Term Structure of Interest Rates in the U. K.," *Bulletin of Economic Research*, Oct.

Modigliani F. and R. Shiller (1973), "Inflation, Rational Expectation and the Term Structure of Interest Rates," *Economica*, Feb.

Nelson, C. (1975), "Rational Expectations and the Predictive Efficiency of Economic Models," *Journal of Business*, July.

Pesando, J. (1975), "A Note on the Rationality of the Livingston Price Expectations," *Journal of Political Economy*, Oct.

Sargent, T. (1979), "A Note on Maximum Likelihood Estimation of the Rational Expectation Model of the Term Structure", *Journal of Monetary Economics*, Jan.

Shiller, R., J. Campbell and K. Schoenholtz (1983), "Forward Rates and Future Policy," *Brookings Papers on Economic Activity*, No 1.

Thies, C. (1985), "New Estimates of Term Structure of Interest Rates," *Journal of Financial Research*, Winter.

釜江廣志 (1989)「期待形成と期間構造の純粋期待仮説」『一橋大学研究年報 商学研究』第29巻.

山本拓 (1988)『経済の時系列分析』.

* 本稿は1988年度学術振興野村基金の助成に基づく研究の一部である. 計算は一橋大学情報処理センターを利用して行なった. 本学金融研究会のメンバー諸氏から有益なコメントをいただいた. 記して感謝申し上げる.

付表 利付債の利回り (推計値, 1年当たり, 年利)

年 月	*R* 810	*R* 808	*R* 806	*R* 804
'85. 10	0.06596	0.06810	0.06916	0.06862
11	0.06398	0.06547	0.06450	0.06561
12	0.05868	0.06130	0.06198	0.06067
'86. 1	0.06009	0.06074	0.06061	0.06047
2	0.05539	0.05593	0.05409	0.05335
3	0.05089	0.05143	0.04961	0.04842
4	0.05160	0.05234	0.05058	0.04810
5	0.05437	0.05813	0.05617	0.05272
6	0.05246	0.05548	0.05426	0.05155
7	0.05420	0.05418	0.05340	0.05093
8	0.05276	0.05140	0.05038	0.04859
9	0.05660	0.05491	0.05246	0.04996
10	0.05641	0.05390	0.05041	0.04782
11	0.05468	0.05219	0.04914	0.04708
12	0.05360	0.05084	0.04814	0.04616
'87. 1	0.05108	0.04877	0.04543	0.04225
2	0.05024	0.04349	0.04121	0.03895
3	0.04616	0.04138	0.03831	0.03600
4	0.03975	0.03679	0.03638	0.03504
5	0.03867	0.03604	0.03518	0.03461

6	0.04639	0.04282	0.04114	0.03931
7	0.05155	0.04978	0.04664	0.04320
8	0.05008	0.05196	0.04894	0.04307
9	0.06149	0.05983	0.05825	0.05306
10	0.05363	0.05063	0.04999	0.04789
11	0.05265	0.04949	0.04695	0.04356
12	0.05194	0.04653	0.04431	0.04193
'88. 1	0.04995	0.04475	0.04279	0.04096
2	0.05027	0.04449	0.04220	0.04021
3	0.05045	0.04343	0.04053	0.03841
4	0.05141	0.04277	0.03930	0.03752
5	0.05419	0.04565	0.04246	0.04111
6	0.05609	0.04793	0.04504	0.04349
7	0.05725	0.04769	0.04412	0.04336
8	0.05910	0.05121	0.04668	0.04609
9	0.05547	0.04961	0.04476	0.04430
10	0.04949	0.04584	0.04212	0.04163
11	0.04859	0.04531	0.04071	0.04018
12	0.04840	0.04579	0.04126	0.04031
'89. 1	0.04882	0.04654	0.04250	0.04139
2	0.05063	0.04856	0.04675	0.04665
3	0.05084	0.04968	0.04821	0.04797

年 月	*R* 610	*R* 608	*R* 606	*R* 604
'85. 10	0.06581	0.06812	0.06926	0.06877
11	0.06368	0.06520	0.06403	0.06488
12	0.05840	0.06116	0.06077	0.06028
'86. 1	0.06002	0.06071	0.06056	0.06037
2	0.05529	0.05584	0.05383	0.05285
3	0.05081	0.05139	0.04942	0.04801
4	0.05161	0.05243	0.05058	0.04796
5	0.05411	0.05815	0.05606	0.05232
6	0.05226	0.05551	0.05422	0.05132
7	0.05434	0.05438	0.05365	0.05120
8	0.05298	0.05158	0.05057	0.04881

9	0.05685	0.05509	0.05254	0.04993
10	0.05669	0.05406	0.05037	0.04759
11	0.05494	0.05232	0.04909	0.04687
12	0.05391	0.05100	0.04817	0.04608
'87. 1	0.05139	0.04898	0.04550	0.04216
2	0.05103	0.04391	0.04166	0.03960
3	0.04668	0.04165	0.03848	0.03614
4	0.04014	0.03705	0.03675	0.03562
5	0.03894	0.03618	0.03532	0.03483
6	0.04682	0.04307	0.04139	0.03964
7	0.05182	0.05001	0.04674	0.04315
8	0.05014	0.05226	0.04916	0.04308
9	0.06199	0.06037	0.05891	0.05385
10	0.05408	0.05096	0.05043	0.04853
11	0.05311	0.04983	0.04725	0.04387
12	0.05260	0.04691	0.04469	0.04244
'88. 1	0.05056	0.04507	0.04312	0.04142
2	0.05094	0.04484	0.04253	0.04067
3	0.05123	0.04381	0.04087	0.03887
4	0.05231	0.04316	0.03960	0.03793
5	0.05508	0.04601	0.04274	0.04151
6	0.05697	0.04831	0.04537	0.04397
7	0.05819	0.04807	0.04430	0.04363
8	0.05977	0.05135	0.04654	0.04580
9	0.05587	0.04961	0.04440	0.04362
10	0.04972	0.04581	0.04180	0.04103
11	0.04872	0.04521	0.04021	0.03925
12	0.04850	0.04570	0.04078	0.03940
'89. 1	0.04892	0.04649	0.04211	0.04063
2	0.05076	0.04855	0.04660	0.04637
3	0.05090	0.04966	0.04807	0.04771

年 月	R410	R408	R406	R404
'85. 10	0.06564	0.06813	0.06938	0.06894
11	0.06331	0.06488	0.06351	0.06409

12	0.05807	0.06101	0.06052	0.05986
'86. 1	0.05994	0.06067	0.06050	0.06026
2	0.05516	0.05574	0.05353	0.05231
3	0.05072	0.05135	0.04920	0.04756
4	0.05161	0.05253	0.05059	0.04780
5	0.05380	0.05817	0.05593	0.05189
6	0.05203	0.05554	0.05418	0.05107
7	0.05451	0.05462	0.05392	0.05149
8	0.05325	0.05180	0.05080	0.04906
9	0.05714	0.05530	0.05262	0.04990
10	0.05702	0.05424	0.05032	0.04733
11	0.05525	0.05247	0.04904	0.04664
12	0.05427	0.05119	0.04820	0.04600
'87. 1	0.05176	0.04923	0.04557	0.04206
2	0.05199	0.04441	0.04218	0.04031
3	0.04730	0.04197	0.03866	0.03629
4	0.04061	0.03736	0.03717	0.03624
5	0.03927	0.03634	0.03548	0.03506
6	0.04734	0.04337	0.04168	0.04000
7	0.05215	0.05027	0.04684	0.04310
8	0.05022	0.05260	0.04940	0.04309
9	0.06261	0.06099	0.05966	0.05471
10	0.05463	0.05135	0.05093	0.04922
11	0.05367	0.05023	0.04759	0.04421
12	0.05339	0.04734	0.04512	0.04299
'88. 1	0.05128	0.04545	0.04349	0.04192
2	0.05173	0.04524	0.04291	0.04117
3	0.05217	0.04426	0.04126	0.03936
4	0.05341	0.04361	0.03994	0.03838
5	0.05615	0.04643	0.04306	0.04194
6	0.05804	0.04876	0.04574	0.04448
7	0.05932	0.04839	0.04451	0.04392
8	0.06059	0.05153	0.04638	0.04548
9	0.05636	0.04962	0.04399	0.04288
10	0.04999	0.04579	0.04144	0.04037
11	0.04888	0.04509	0.03965	0.03825

12	0.04861	0.04559	0.04025	0.03842
'89. 1	0.04904	0.04642	0.04168	0.03981
2	0.05092	0.04854	0.04643	0.04607
3	0.05097	0.04964	0.04792	0.04742