tribution. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Vol. 3, 1951.

[9] Nabeya S. Absolute moments in 3-dimensional normal distribution *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Vol. 4, 1952.

[10] 鍋谷清治　分散分析における仮説の検定について，日本統計学会会報．1953.

[11] Sathe Y. S. and Kamat A. R Approximations to the distributions of some measures of dispersion based on successive differences. *Biometrika*, Vol. 44, 1957.

$$+4\rho_{12}\rho_{13}\rho_{24}+4\rho_{12}\rho_{14}\rho_{23}+2\rho_{12}^2\rho_{34})\sin^{-1}\rho_{34}\Big]\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3\sigma_4$$

$$E(|x_1^2x_2^2x_3^2x_4|)$$

$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(1+2\rho_{12}^2+2\rho_{13}^2+2\rho_{23}^2+\rho_{14}^2+\rho_{24}^2+\rho_{34}^2+8\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}$$

$$+4\rho_{12}\rho_{14}\rho_{24}+4\rho_{13}\rho_{14}\rho_{34}+4\rho_{23}\rho_{24}\rho_{34}+2\rho_{12}^2\rho_{34}^2+2\rho_{13}^2\rho_{24}^2$$

$$+2\rho_{14}^2\rho_{23}^2-\rho_{14}^2\rho_{24}^2-\rho_{14}^2\rho_{34}^2-\rho_{24}^2\rho_{34}^2+8\rho_{12}\rho_{13}\rho_{24}\rho_{34}$$

$$+8\rho_{12}\rho_{14}\rho_{23}\rho_{34}+8\rho_{13}\rho_{14}\rho_{23}\rho_{24}-4\rho_{12}\rho_{14}\rho_{24}\rho_{34}^2$$

$$-4\rho_{13}\rho_{14}\rho_{24}^2\rho_{34}-4\rho_{14}^2\rho_{23}\rho_{24}\rho_{34}+3\rho_{14}^2\rho_{24}^2\rho_{34}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3^2\sigma_4.$$

$$E(x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2)$$

$$=(1+2\rho_{12}^2+2\rho_{13}^2+2\rho_{14}^2+2\rho_{23}^2+2\rho_{24}^2+2\rho_{34}^2+8\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}$$

$$+8\rho_{12}\rho_{14}\rho_{24}+8\rho_{13}\rho_{14}\rho_{34}+8\rho_{23}\rho_{24}\rho_{34}+4\rho_{12}^2\rho_{34}^2+4\rho_{13}^2\rho_{24}^2$$

$$+4\rho_{14}^2\rho_{23}^2+16\rho_{12}\rho_{13}\rho_{24}\rho_{34}+16\rho_{12}\rho_{14}\rho_{23}\rho_{34}$$

$$+16\rho_{13}\rho_{14}\rho_{23}\rho_{24})\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3^2\sigma_4^2$$

参 考 文 献

[1] Geary R. C. Moments of the ratio of the mean deviation to the standard deviation for normal samples. *Biometrika*, Vol. 28, 1936.

[2] Kamat A. R. Incomplete and absolute moments of the multivariate normal distribution with some applications. *Biometrika*, Vol. 40, 1953.

[3] Kamat A. R. On the mean successive difference and its ratio to the root mean square. *Biometrika*, Vol. 40, 1953.

[4] Kamat A. R The third moment of Gini's mean difference. *Biometrika*, Vol. 40, 1953.

[5] Kamat A. R. Some properties of estimates for the standard deviation based on deviations from the mean and variate differences. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol. 15, 1953.

[6] Kamat A. R. Distribution theory of two estimates for standard deviation based on second variate differences. *Biometrika*, Vol. 41, 1954.

[7] Kamat A. R. Moments of the mean deviation. *Biometrika*, Vol. 41, 1954.

[8] Nabeya S. Absolute moments in 2-dimensional normal dis-

はもはや簡単になる．多少面倒になる点は数値積分を用いる点であるが，これとても収束の程度のはっきりしていない級数展開を用いるのに比べたら，遙かに有効なものである．Kamat [3] はさらに彼自身の得た級数展開により，相関係数の 10 次の項までの展開に基づいて $E(|x_1 x_2 x_3 x_4|)$ の値を計算して両者を比較しているが，筆者の公式によって計算された有効数字 6〜7 桁の精度の正しい値に対して，有効数字 4 桁までが一致していた．

IV

最後に 4 変量正規分布において各変数に関して 2 次までの範囲で 4 つの絶対積率の公式を挙げておく．計算はいずれも (2. 1) に基づいて行ったが，紙面の都合で詳細を述べるのは差控える．正規分布の場合に絶対積率の計算を複雑にするのは，全部の変数に関しての積率の次数よりはむしろ奇数羃の変数がいくつ入った絶対積率かによるのであって，4 変量の場合に本質的な難しさは $E(|x_1 x_2 x_3 x_4|)$ の計算の中にすべて含まれている．この点より本節に挙げる公式の導出は (2. 63) に至る計算よりは簡単であることを附記しておく．

$$
\begin{aligned}
&E(|x_1^2 x_2 x_3 x_4|)\\
&=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}[\sqrt{R_{11}}(1+\rho_{12}^2+\rho_{13}^2+\rho_{14}^2)+(\rho_{34}+2\rho_{13}\rho_{14}+\rho_{23}\rho_{24}\\
&\quad+2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{24}+2\rho_{12}\rho_{14}\rho_{23}+\rho_{12}^2\rho_{34}-\rho_{12}^2\rho_{23}\rho_{24})\sin^{-1}\rho_{34\cdot 2}\\
&\quad+(\rho_{24}+2\rho_{12}\rho_{14}+\rho_{23}\rho_{34}+2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{34}+2\rho_{13}\rho_{14}\rho_{23}+\rho_{13}^2\rho_{24}\\
&\quad-\rho_{13}^2\rho_{23}\rho_{34})\sin^{-1}\rho_{24\cdot 3}+(\rho_{23}+2\rho_{12}\rho_{13}+\rho_{24}\rho_{34}+2\rho_{12}\rho_{14}\rho_{34}\\
&\quad+2\rho_{13}\rho_{14}\rho_{24}+\rho_{14}^2\rho_{23}-\rho_{14}^2\rho_{24}\rho_{34})\sin^{-1}\rho_{23\cdot 4}]\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3\sigma_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&E(|x_1^2 x_2^2 x_3 x_4|)\\
&=\frac{2}{\pi}\Bigg[\sqrt{1-\rho_{34}^2}\Bigg(2\rho_{12}^2+2\rho_{13}^2+2\rho_{14}^2+2\rho_{23}^2+2\rho_{24}^2+\rho_{34}^2\\
&\quad+4\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}+4\rho_{12}\rho_{14}\rho_{24}-2\rho_{13}\rho_{14}\rho_{34}-2\rho_{23}\rho_{24}\rho_{34}-2\rho_{13}^2\rho_{23}^2\\
&\quad-2\rho_{14}^2\rho_{24}^2+4\rho_{13}\rho_{14}\rho_{23}\rho_{24}+\frac{R_{11}R_{22}}{1-\rho_{34}^2}\Bigg)+(\rho_{34}+2\rho_{13}\rho_{14}+2\rho_{23}\rho_{24}
\end{aligned}
$$

$$=\int_0^{\rho}\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\sin^{-1}\left(\rho\sqrt{\frac{1-v^2}{1-\rho^2-v^2}}\right)dv$$

と書直すこともできる．よって（3.7）は

$$(3.8)\qquad E(|x_1\,x_2\,x_3\,x_4|)$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\Bigg[\sqrt{1-3\,\rho^2+\rho^4}+2\,\rho\sqrt{1-\rho^2}\,\sin^{-1}\left(\rho\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1-2\,\rho^2}}\right)$$

$$-2\,\rho^2\sin^{-1}\frac{\rho^2}{\sqrt{(1-\rho^2)(1-2\,\rho^2)}}+\rho\sin^{-1}\frac{\rho}{1-\rho^2}$$

$$+\rho^2\int_0^{\rho}\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\sin^{-1}\left(\rho\sqrt{\frac{1-v^2}{1-\rho^2-v^2}}\right)dv\Bigg]\sigma^4$$

となる．

Kamat [3] は標準偏差 σ' の正規母集団からとられた大きさ n の標本を $z_1, z_2,\cdots, z_n$ とするとき，

$$x_1=z_1-z_2,\quad x_2=z_2-z_3,\quad x_3=z_3-z_4,\quad x_4=z_4-z_5$$

とおいて筆者 [9] の公式（2.1）に基づいて $E(|x_1\,x_2\,x_3\,x_4|)$ を計算している．この場合は

$$(3.9)\qquad \rho=-\frac{1}{2},\qquad \sigma=\sqrt{2}\,\sigma'$$

とおいたときの（3.8）式に当るので，（3.9）を（3.8）に代入すればその結果

$$E(|x_1\,x_2\,x_3\,x_4|)$$

$$=\frac{16\,\sigma'^4}{\pi^2}\Bigg[\frac{\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin^{-1}\sqrt{\frac{3}{8}}-\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$+\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-v^2}{3-4\,v^2}}\right)dv\Bigg]$$

$$=2.215484\,\sigma'^4$$

が得られる．彼は筆者の公式（2.1）によれば，彼の考えている簡単な相関行列の場合においてさえ $E(|x_1\,x_2\,x_3\,x_4|)$ の計算はかなり面倒になるので，一般の相関行列の場合には到底手に負えないということを [3] の中で述べている．しかし（2.63）のように一般の相関行列の場合の $E(|x_1\,x_2\,x_3\,x_4|)$ が与えられれば，特殊な場合に適用すること

$$R_{11}=R_{44}=1-2\rho^2$$
$$R_{22}=R_{33}=1-\rho^2$$
$$R_{12}=R_{34}=-\rho+\rho^3$$
$$R_{23}=-\rho$$
$$R_{13}=R_{24}=\rho^2$$
$$R_{14}=-\rho^3$$
$$R_{33}(u)=1-u^2\rho^2$$
$$R_{44}(u)=1-\rho^2-u^2\rho^2$$
$$R_{34}(u)=-\rho+u^2\rho^3$$

従って

$$\rho_{34\cdot12}=\rho_{12\cdot34}=\frac{\rho-\rho^3}{\sqrt{(1-\rho^2)(1-2\rho^2)}}=\rho\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1-2\rho^2}}$$

$$\rho_{23\cdot14}=\frac{\rho}{1-\rho^2}$$

$$\rho_{24\cdot13}=\rho_{13\cdot24}=\frac{-\rho^2}{\sqrt{(1-\rho^2)(1-2\rho^2)}}$$

$$\rho_{14\cdot23}=\frac{\rho^3}{1-2\rho^2}$$

$$\rho_{34\cdot12}(u)=\frac{\rho-u^2\rho^3}{\sqrt{(1-u^2\rho^2)(1-\rho^2-u^2\rho^2)}}$$

となる. $\rho_{13}=\rho_{14}=0$ であるから $\rho_{24\cdot13}(u)$, $\rho_{23\cdot14}(u)$ は求める必要はない. これらの式を (2.63) に代入すれば

(3.7)　$E(|x_1x_2x_3x_4|)$

$$=\frac{4}{\pi^2}\Bigg[\sqrt{1-3\rho^2+\rho^4}+2\rho\sqrt{1-\rho^2}\sin^{-1}\left(\rho\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1-2\rho^2}}\right)$$
$$-2\rho^2\sin^{-1}\frac{\rho^2}{\sqrt{(1-\rho^2)(1-2\rho^2)}}+\rho\sin^{-1}\frac{\rho}{1-\rho^2}$$
$$+\rho^2\int_0^1\frac{\rho}{\sqrt{1-u^2\rho^2}}\sin^{-1}\frac{\rho-u^2\rho^3}{\sqrt{(1-u^2\rho^2)(1-\rho^2-u^2\rho^2)}}du\Bigg]\sigma^4$$

となる. なお [ ] 内の積分は $u\rho=v$ とおくことによって

$$\int_0^\rho\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\sin^{-1}\frac{\rho(1-v^2)}{\sqrt{(1-v^2)(1-\rho^2-v^2)}}dv$$

四〇四

(3.4) $$\rho=-\frac{1}{n}$$

なる 4 変量の正規分布に従うことになる．

Geary [1] は x_1, x_2, x_3, x_4 の密度函数を求め，これを展開することによってつぎの式を得ている．

(3.5) $$E(|x_1x_2x_3x_4|)$$
$$=\frac{4}{\pi^2}\frac{(n+1)^{1/2}(n-3)^{7/2}}{(n-2)^4}\left\{1+\frac{12}{(n-2)^2}-\frac{32}{(n-2)^3}+\frac{172}{(n-2)^4}-\frac{640}{(n-2)^5}+\frac{12736}{5(n-2)^6}-\frac{47104}{5(n-2)^7}+\cdots\right\}\sigma'^4$$

これを (3.2) と比較するために (3.3) を用いて (3.5) の最後の括弧外にくる因数が σ^4 になるようにし，他の部分を n^{-1} の羃級数に展開すれば，(3.5) はつぎのようになる．

(3.6) $$E(|x_1x_2x_3x_4|)$$
$$=\frac{4}{\pi^2}\left(1+\frac{3}{n^2}-\frac{4}{n^3}+\frac{1}{n^4}+\frac{4}{n^5}+\frac{31}{5n^6}+\frac{48}{5n^7}+\cdots\right)\sigma^4$$

そこで Geary の場合も (3.6) の形で $E(|x_1x_2x_3x_4|)$ を計算すれば，彼自身の式 (3.5) によるよりは計算が簡単であったことになる．

他方筆者の得た正確な式 (3.2) においても ρ に (3.4) の値を代入して n^{-1} の羃に展開すると（途中の計算は省略する），n^{-7} までのところでは (3.6) に一致する．すなわち Geary の近似計算は n^{-7} までの order では正しかったわけである．

(E) $\rho_{12}=\rho_{23}=\rho_{34}=\rho$,　$\rho_{13}=\rho_{14}=\rho_{24}=0$,　$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma_4=\sigma$

これは 4 つの変数 x_1, x_2, x_3, x_4 をこの順序で考えるとき，隣り合った 2 つの変数の間でだけ一定値 ρ の相関を有し，他の変数の間では無相関で，しかも標準偏差も一定値 σ に等しい場合である．この場合には

$$R=\begin{vmatrix}1&\rho&0&0\\\rho&1&\rho&0\\0&\rho&1&\rho\\0&0&\rho&1\end{vmatrix}=1-3\rho^2+\rho^4$$

のに等しい.

（D）　$\rho_{12}=\rho_{13}=\rho_{14}=\rho_{23}=\rho_{24}=\rho_{34}=\rho,\quad \sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma_4=\sigma$

これは 4 つの変数 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ の標準偏差が一定値 σ であり，また相互間の相関係数が全部同一の値 ρ をとる場合である．この場合には

$$R=\begin{vmatrix} 1 & \rho & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \rho \\ \rho & \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & \rho & 1 \end{vmatrix}=(1+3\rho)(1-\rho)^3$$

$$R_{11}=R_{22}=R_{33}=R_{44}=(1+2\rho)(1-\rho)^2$$

$$R_{12}=R_{13}=R_{14}=R_{23}=R_{24}=R_{34}=-\rho(1-\rho)^2$$

$$R_{22}(u)=R_{33}(u)=R_{44}(u)=(1-\rho)(1+\rho-2u^2\rho^2)$$

$$R_{23}(u)=R_{24}(u)=R_{34}(u)=-\rho(1-\rho)(1-u^2\rho)$$

従って

$$\rho_{34\cdot 12}=\rho_{24\cdot 13}=\rho_{23\cdot 14}=\rho_{14\cdot 23}=\rho_{13\cdot 24}=\rho_{12\cdot 34}=\frac{\rho}{1+2\rho}$$

$$\rho_{34\cdot 12}(u)=\rho_{24\cdot 13}(u)=\rho_{23\cdot 14}(u)=\frac{\rho(1-u^2\rho)}{1+\rho-2u^2\rho^2}$$

となるから，(2. 63) は

(3. 2)　$E(|x_1 x_2 x_3 x_4|)$

$$=\frac{4}{\pi^2}\left[\sqrt{(1+3\rho)(1-\rho)^3}+6\rho(1+2\rho)\sqrt{1-\rho^2}\sin^{-1}\frac{\rho}{1+2\rho}\right.$$
$$\left.+9\rho^3\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-u^2\rho^2}}\sin^{-1}\frac{\rho(1-u^2\rho)}{1+\rho-2u^2\rho^2}du\right]\sigma^4$$

となる.

標準偏差 σ' の正規母集団から大きさ $N=n+1(\geqq 5)$ の標本 $z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n$ をとり，その標本平均を $\bar{z}$ とすれば，$x_1=z_1-\bar{z},\ x_2=z_2-\bar{z},\ x_3=z_3-\bar{z},\ x_4=z_4-\bar{z}$ は平均値 0，標準偏差はいずれも　四〇六

(3. 3)
$$\sigma=\sqrt{\frac{n}{n+1}}\sigma'$$

相関係数は

$$\frac{x_3}{\sigma_3}=\frac{x_4}{\sigma_4} \tag{3.1}$$

となるので $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ の同時分布は特異な分布となる．よって（2.63）で求めた公式をこの場合に対してそのまゝ適用することはできない．しかしながら，筆者 [9] が以前に求めた3変量 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ の正規分布における絶対積率の公式は，このような特異な分布において例えば $x_2/\sigma_2=x_3/\sigma_3$ とすれば，$\rho_{12\cdot3}=\rho_{13\cdot2}=0$, $\rho_{23\cdot1}=1$ とおくことによって2変量 $(x_1,\ x_2)$ の正規分布における絶対積率の公式に帰着することが示される．

ここで考える場合についても，公式（2.63）において，同様の考えから

$$\rho_{34\cdot12}=1$$
$$\rho_{24\cdot13}=\rho_{23\cdot14}=\rho_{14\cdot23}=\rho_{13\cdot24}=0$$
$$\rho_{12\cdot34}=\rho_{12\cdot3}$$

とおいてみる．また

$$\boldsymbol{R}(u)=\begin{Vmatrix} 1 & u\rho_{12} & u\rho_{13} & u\rho_{13} \\ u\rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \rho_{23} \\ u\rho_{31} & \rho_{32} & 1 & 1 \\ u\rho_{31} & \rho_{32} & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

であるから，相関行列が $\boldsymbol{R}(u)$ の場合についても x_3 と x_4 の間に（3.1）と同様の関係が成立つことになる．よって

$$\rho_{34\cdot12}(u)=1, \qquad \rho_{24\cdot13}(u)=\rho_{23\cdot14}(u)=0$$

とおくことにする．その結果（2.63）は

$$\begin{aligned} &E(|x_1 x_2 x_3 x_4|) \\ &=\frac{4}{\pi^2}\Bigg[\sqrt{1-\rho_{12}{}^2}\,(1+\rho_{13}{}^2+\rho_{23}{}^2)\frac{\pi}{2} \\ &\quad+(\rho_{12}+2\,\rho_{13}\,\rho_{23})\int_0^1\frac{\rho_{12}}{\sqrt{1-u^2\rho_{12}{}^2}}\cdot\frac{\pi}{2}du\Bigg]\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3\,\sigma_4 \\ &=\frac{2}{\pi}[\sqrt{1-\rho_{12}{}^2}\,(1+\rho_{13}{}^2+\rho_{23}{}^2)+(\rho_{12}+2\,\rho_{13}\,\rho_{23})\sin^{-1}\rho_{12}]\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3\,\sigma_4 \end{aligned}$$

となって [9] で求めた公式による $E(|x_1x_2x_3{}^2|)$ に σ_4/σ_3 を掛けたも

と $E(|x_1|)=\sqrt{2/\pi}\,\sigma_1$ との積に等しい.

(B)　$\rho_{13}=\rho_{14}=\rho_{23}=\rho_{24}=0$

この場合は x_1, x_2 の組が x_3, x_4 の組と独立の場合である.

$$R=\begin{vmatrix} 1 & \rho_{12} & 0 & 0 \\ \rho_{21} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \rho_{34} \\ 0 & 0 & \rho_{43} & 1 \end{vmatrix}=(1-\rho_{12}{}^2)\,(1-\rho_{34}{}^2)$$

$$\rho_{34\cdot12}=\rho_{34},\quad \rho_{12\cdot34}=\rho_{12},\quad \rho_{24\cdot13}=\rho_{23\cdot14}=\rho_{14\cdot23}=\rho_{13\cdot24}=0$$

$$\rho_{34\cdot12}(u)=\rho_{34}$$

となるので,

$$E(|x_1 x_2 x_3 x_4|)$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\left[\sqrt{(1-\rho_{12}{}^2)\,(1-\rho_{34}{}^2)}+\sqrt{1-\rho_{12}{}^2}\,\rho_{34}\sin^{-1}\rho_{34}\right.$$

$$\left.+\sqrt{1-\rho_{34}{}^2}\,\rho_{12}\sin^{-1}\rho_{12}+\rho_{12}\,\rho_{34}\int_0^1\frac{\rho_{12}}{\sqrt{1-u^2\rho_{12}{}^2}}\sin^{-1}\rho_{34}\,du\right]\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3\,\sigma_4$$

$$=\frac{4}{\pi^2}[\sqrt{(1-\rho_{12}{}^2)\,(1-\rho_{34}{}^2)}+\sqrt{1-\rho_{12}{}^2}\,\rho_{34}\sin^{-1}\rho_{34}$$

$$+\sqrt{1-\rho_{34}{}^2}\,\rho_{12}\sin^{-1}\rho_{12}+\rho_{12}\,\rho_{34}\sin^{-1}\rho_{12}\sin^{-1}\rho_{34}]\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3\,\sigma_4$$

$$=\frac{2}{\pi}(\sqrt{1-\rho_{12}{}^2}+\rho_{12}\sin^{-1}\rho_{12})\sigma_1\,\sigma_2$$

$$\times\frac{2}{\pi}(\sqrt{1-\rho_{34}{}^2}+\rho_{34}\sin^{-1}\rho_{34})\sigma_3\sigma_4$$

となって, 筆者 [8] の求めた公式に基づく $E(|x_1 x_2|)$ と $E(|x_3 x_4|)$ の積に等しいことがわかる.

(C)　$\rho_{34}=1,\quad \rho_{13}=\rho_{14},\quad \rho_{23}=\rho_{24}$

この場合は

$$R=\begin{vmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & 1 \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\Big[\sqrt{R}+\sqrt{1-\rho_{12}^2}\,(\rho_{34}+\rho_{13}\,\rho_{14}+\rho_{23}\,\rho_{24})\sin^{-1}\rho_{34\cdot12}$$
$$+\sqrt{1-\rho_{13}^2}\,(\rho_{24}+\rho_{12}\,\rho_{14}+\rho_{23}\,\rho_{34})\sin^{-1}\rho_{24\cdot13}$$
$$+\sqrt{1-\rho_{14}^2}\,(\rho_{23}+\rho_{12}\,\rho_{13}+\rho_{24}\,\rho_{34})\sin^{-1}\rho_{23\cdot14}$$
$$+\sqrt{1-\rho_{23}^2}\,(\rho_{14}+\rho_{12}\,\rho_{24}+\rho_{13}\,\rho_{34})\sin^{-1}\rho_{14\cdot23}$$
$$+\sqrt{1-\rho_{24}^2}\,(\rho_{13}+\rho_{12}\,\rho_{23}+\rho_{14}\,\rho_{34})\sin^{-1}\rho_{13\cdot24}$$
$$+\sqrt{1-\rho_{34}^2}\,(\rho_{12}+\rho_{13}\,\rho_{23}+\rho_{14}\,\rho_{24})\sin^{-1}\rho_{12\cdot34}$$
$$+(\rho_{12}\rho_{34}+\rho_{13}\,\rho_{24}+\rho_{14}\,\rho_{23})\int_0^1\Big\{\frac{\rho_{12}}{\sqrt{1-u^2\rho_{12}^2}}\sin^{-1}\rho_{34\cdot12}(u)$$
$$+\frac{\rho_{13}}{\sqrt{1-u^2\rho_{13}^2}}\sin^{-1}\rho_{24\cdot13}(u)$$
$$+\frac{\rho_{14}}{\sqrt{1-u^2\rho_{14}^2}}\sin^{-1}\rho_{23\cdot14}(u)\Big\}du\Big]\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3\,\sigma_4$$

III

つぎに公式 (2. 63) の二三の特殊の場合を挙げておくことにする.

(A)　　$\rho_{12}=\rho_{13}=\rho_{14}=0$

この場合は x_1 が x_2, x_3, x_4 の組と独立の場合である.

$$R=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&\rho_{23}&\rho_{24}\\0&\rho_{32}&1&\rho_{34}\\0&\rho_{42}&\rho_{43}&1\end{vmatrix}=R_{11}$$

$$\rho_{34\cdot12}=\rho_{34\cdot2},\qquad\rho_{24\cdot13}=\rho_{24\cdot3},\qquad\rho_{23\cdot14}=\rho_{23\cdot4}$$
$$\rho_{14\cdot23}=\rho_{13\cdot24}=\rho_{12\cdot34}=0$$

四〇九　より

$$E(|x_1\,x_2\,x_3\,x_4|)$$
$$=\frac{4}{\pi^2}[\sqrt{R_{11}}+(\rho_{34}+\rho_{23}\,\rho_{24})\sin^{-1}\rho_{34\cdot2}+(\rho_{24}+\rho_{23}\,\rho_{34})\sin^{-1}\rho_{24\cdot3}$$
$$+(\rho_{23}+\rho_{24}\,\rho_{34})\sin^{-1}\rho_{23\cdot4}]\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3\,\sigma_4$$

となって, この式は筆者 [9] が以前に求めた公式による $E(|x_2\,x_3x_4|)$

$$-\frac{(\rho_{12}-\rho_{13}\,\rho_{23})\,R_{34}}{R_{44}}\Bigg\}+\frac{\rho_{13}{}^2}{\sqrt{R}\,(1-\rho_{13}{}^2)}\Bigg\{\rho_{12}\,\rho_{34}+\rho_{14}\,\rho_{23}$$

$$-2\,\rho_{13}\,\rho_{24}-\frac{(\rho_{13}-\rho_{14}\,\rho_{34})\,R_{24}}{R_{22}}-\frac{(\rho_{13}-\rho_{12}\,\rho_{23})\,R_{24}}{R_{44}}\Bigg\}$$

$$+\frac{\rho_{14}{}^2}{\sqrt{R}\,(1-\rho_{14}{}^2)}\Bigg\{\rho_{12}\,\rho_{34}+\rho_{13}\,\rho_{24}-2\,\rho_{14}\,\rho_{23}$$

$$-\frac{(\rho_{14}-\rho_{13}\,\rho_{34})\,R_{23}}{R_{22}}-\frac{(\rho_{14}-\rho_{12}\,\rho_{24})\,R_{23}}{R_{33}}\Bigg\}$$

$$+\frac{2\,\rho_{13}\,\rho_{14}\,R_{12}}{\sqrt{R}\;\,R_{22}}+\frac{2\,\rho_{12}\,\rho_{14}R_{13}}{\sqrt{R}\;\,R_{33}}+\frac{2\,\rho_{12}\,\rho_{13}R_{14}}{\sqrt{R}\;\,R_{44}}\Bigg]$$

つぎに $I_6\sim I_8$ を求めるためには，(2. 49) の第 2 辺と第 3 辺を ρ_{12}, ρ_{13}, ρ_{34} について偏微分し，その結果できた式で両辺に -1 を掛ければよい．こうして

(2 60)　$$I_6=\iiiint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1{}^2\,\sigma_2{}^2\,t_1{}^2\,t_2{}^2}{t_1\,t_2\,t_3\,t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4$$

$$=4\,\pi^2\Bigg[\frac{\rho_{12}}{(1-\rho_{12}{}^2)^{3/2}}\sin^{-1}\rho_{34\cdot12}+\frac{1}{\sqrt{R}\,(1-\rho_{12}{}^2)}\Bigg\{\rho_{13}\,\rho_{24}$$

$$+\rho_{14}\,\rho_{23}-2\,\rho_{12}\,\rho_{34}-\frac{(\rho_{12}-\rho_{14}\,\rho_{24})\,R_{34}}{R_{33}}$$

$$-\frac{(\rho_{12}-\rho_{13}\,\rho_{23})\,R_{34}}{R_{44}}\Bigg\}\Bigg]$$

(2. 61)　$$I_7=\iiiint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1{}^2\,\sigma_2\,\sigma_3\,t_1{}^2\,t_2\,t_3}{t_1\,t_2\,t_3\,t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4=-4\,\pi^2\frac{R_{14}}{\sqrt{R}\;\,R_{44}}$$

(2. 62)　$$I_8=\iiiint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3\,\sigma_4\,t_1\,t_2\,t_3\,t_4}{t_1\,t_2\,t_3\,t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4$$

$$=4\,\pi^2\frac{1}{\sqrt{R}}$$

以上で求められた $I_1\sim I_8$ にはそれぞれ (2. 9)～(2. 16) に与えられている係数を掛け，$I_2\sim I_7$ に対してはさらにその結果得られた式において添数の置換を行ったものを作って，これをすべて加え合わせ，その和に $\dfrac{\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3\,\sigma_4}{\pi^4}$ を掛ければ，つぎの結果が得られる．

(2. 63)　$E(\,|\,x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,|\,)$

$$+\rho_{14}\rho_{23}-2\rho_{12}\rho_{34}-\frac{(\rho_{12}-\rho_{14}\rho_{24})R_{34}}{R_{33}}$$

$$\left.\left.-\frac{(\rho_{12}-\rho_{13}\rho_{23})R_{34}}{R_{44}}\right\}+\frac{\rho_{13}}{\sqrt{R}}\,\frac{R_{14}}{R_{44}}+\frac{\rho_{14}}{\sqrt{R}}\,\frac{R_{13}}{R_{33}}\right]$$

となる.

つぎに (2. 54) の第 2 辺と第 3 辺を σ_1 について偏微分すれば,

$$-\iiiint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1^2 t_1^3 T_1}{t_1 t_2 t_3 t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4 + 2\iiiint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1 t_1^2}{t_1 t_2 t_3 t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4=0 \tag{2.56}$$

となる. 左辺の第 2 の積分は (2. 54) に σ_1^{-1} を掛けたものになっているから

$$\iiiint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1^3 t_1^3 T_1}{t_1 t_2 t_3 t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4=2I_2 \tag{2.57}$$

(2. 57) の左辺の T_1 に (2. 7) を用いれば

$$\begin{aligned} I_4&=\iiiint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1^4 t_1^4}{t_1 t_2 t_3 t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4\\ &=2I_2-\rho_{12}\iiiint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1^3\sigma_2 t_1^3 t_2}{t_1 t_2 t_3 t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4\\ &\quad-\rho_{13}\iiiint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1^3\sigma_3 t_1^3 t_3}{t_1 t_2 t_3 t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4\\ &\quad-\rho_{14}\iiiint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1^3\sigma_4 t_1^3 t_4}{t_1 t_2 t_3 t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4 \end{aligned} \tag{2.58}$$

ここで第 3 辺の第 1 の積分は I_5 となり, 第 2, 第 3 の積分はこれに添数の置換を行ったものとなっている. よって

$$\begin{aligned} I_4&=\iiiint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1^4 t_1^4}{t_1 t_2 t_3 t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4\\ &=4\pi^2\left[\frac{3\rho_{12}-2\rho_{12}^3}{(1-\rho_{12}^2)^{3/2}}\sin^{-1}\rho_{34\cdot12}+\frac{3\rho_{13}-2\rho_{13}^3}{(1-\rho_{13}^2)^{3/2}}\sin^{-1}\rho_{24\cdot13}\right.\\ &\quad+\frac{3\rho_{14}-2\rho_{14}^3}{(1-\rho_{14}^2)^{3/2}}\sin^{-1}\rho_{23\cdot14}+\frac{\rho_{12}^2}{\sqrt{R}(1-\rho_{12}^2)}\left\{\rho_{13}\rho_{24}\right.\\ &\quad+\rho_{14}\rho_{23}-2\rho_{12}\rho_{34}-\frac{(\rho_{12}-\rho_{14}\rho_{24})R_{34}}{R_{33}} \end{aligned} \tag{2.59}$$

$$(2.53)\qquad \iiiint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1\,\sigma_4\,t_1\,t_4}{t_1\,t_2\,t_3\,t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4$$

$$=-4\,\pi^2\frac{1}{\sqrt{1-\rho_{14}{}^2}}\sin^{-1}\rho_{23\cdot14}$$

が得られるので，(2. 50) の両辺の σ 倍から (2. 51) の両辺の ρ_{12} 倍，(2. 52) の両辺の ρ_{13} 倍，(2. 53) の両辺の ρ_{14} 倍を引くことによって

$$(2.54)\qquad I_2=\iiiint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1{}^2\,t_1{}^2}{t_1\,t_2\,t_3\,t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4$$

$$=4\,\pi^2\left[\frac{\rho_{12}}{\sqrt{1-\rho_{12}{}^2}}\sin^{-1}\rho_{34\cdot12}+\frac{\rho_{13}}{\sqrt{1-\rho_{13}{}^2}}\sin^{-1}\rho_{24\cdot13}\right.$$

$$\left.+\frac{\rho_{14}}{\sqrt{1-\rho_{14}{}^2}}\sin^{-1}\rho_{23\cdot14}\right]$$

となる.

つぎに I_4 から I_8 を求めるために，偏相関係数の偏微分の公式

$$\frac{\partial}{\partial\rho_{12}}\sin^{-1}\rho_{34\cdot12}=\frac{1}{\sqrt{R}\;\sqrt{1-\rho_{12}{}^2}}\left\{\rho_{13}\,\rho_{24}+\rho_{14}\,\rho_{23}-2\,\rho_{12}\,\rho_{34}\right.$$

$$\left.-\frac{(\rho_{12}-\rho_{14}\,\rho_{24})\,R_{34}}{R_{33}}-\frac{(\rho_{12}-\rho_{13}\,\rho_{23})\,R_{34}}{R_{44}}\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho_{13}}\sin^{-1}\rho_{34\cdot12}=\frac{1}{\sqrt{R}\;\sqrt{1-\rho_{12}{}^2}}\left\{-\rho_{14}+\rho_{12}\,\rho_{24}\right.$$

$$\left.-\frac{(\rho_{13}-\rho_{12}\,\rho_{23})R_{34}}{R_{44}}\right\}=\frac{\sqrt{1-\rho_{12}{}^2}}{\sqrt{R}}\;\frac{R_{14}}{R_{44}}$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho_{34}}\sin^{-1}\rho_{34\cdot12}=\frac{\sqrt{1-\rho_{12}{}^2}}{\sqrt{R}}$$

並びにこれらの式で添数の置換を行ったものを利用する.

まず I_5 を求めるために，(2. 54) の第 2 辺と第 3 辺を ρ_{12} について偏微分して両辺に -1 を掛ければ，

$$(2.55)\qquad I_5=\iiiint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1{}^3\,\sigma_2\,t_1{}^3\,t_2}{t_1\,t_2\,t_3\,t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4$$

$$=-4\,\pi^2\left[\frac{1}{(1-\rho_{12}{}^2)^{3/2}}\sin^{-1}\rho_{34\cdot12}+\frac{\rho_{12}}{\sqrt{R}\,(1-\rho_{12}{}^2)}\left\{\rho_{13}\,\rho_{24}\right.\right.$$

$$=4\pi^2\int_0^1\left\{\frac{\rho_{12}}{\sqrt{1-u^2\rho_{12}{}^2}}\sin^{-1}\rho_{34\cdot12}(u)\right.$$
$$+\frac{\rho_{13}}{\sqrt{1-u^2\rho_{13}{}^2}}\sin^{-1}\rho_{24\cdot13}(u)$$
$$\left.+\frac{\rho_{14}}{\sqrt{1-u^2\rho_{14}{}^2}}\sin^{-1}\rho_{23\cdot14}(u)\right\}du$$

となる.

$\rho_{34\cdot12}(u)$ は (2. 4) に与えられている 6 つの相関係数をパラメーターにもつ u の函数であって，分子は u の 2 次式，分母は u の 2 つの 2 次式の幾何平均になっている．そこで相関行列 $\boldsymbol{R}$ が与えられれば，I_1 はいくらでも精密に計算できる．

つぎに (2. 19) の I_3 の値を計算する．$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma_4=1$ とおけば，I_3 は (2. 35) の $I_{11}(1)$ に等しくなることがわかる．よって (2. 46) によって

(2. 49)
$$I_3=\iiiint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1\,\sigma_2\,t_1\,t_2}{t_1\,t_2\,t_3\,t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4$$
$$=-\frac{4\pi^2}{\sqrt{1-\rho_{12}{}^2}}\sin^{-1}\rho_{34\cdot12}$$

I_2 を計算するには，等式 (2. 48) の第 2 辺と第 3 辺を σ_1 について偏微分する．(2. 48) の第 3 辺は σ_1 に無関係であるから，その結果

(2. 50)
$$\iiiint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{t_1\,T_1}{t_1\,t_2\,t_3\,t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4=0$$

となる．T_1 は (2. 7) によって与えられ，しかも (2. 49) より

(2. 51)
$$\iiiint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1\,\sigma_2\,t_1\,t_2}{t_1\,t_2\,t_3\,t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4$$
$$=-4\pi^2\frac{1}{\sqrt{1-\rho_{12}{}^2}}\sin^{-1}\rho_{34\cdot12}$$

(2. 51) から添数の置換によって

(2. 52)
$$\iiiint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1\,\sigma_3\,t_1\,t_3}{t_1\,t_2\,t_3\,t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4$$
$$=-4\pi^2\frac{1}{\sqrt{1-\rho_{13}{}^2}}\sin^{-1}\rho_{24\cdot13}$$

$$+v_4^2\}\Bigg]\frac{1}{v_3\,v_4}dv_3\,dv_4$$

となる．ただしこの $v_3,\ v_4$ に関する積分も Cauchy の主値を表わす．

(2.41) の右辺の積分の値を $\rho_{34\cdot12}(u)$ について微分すれば

$$(2.42)\qquad -\iint\exp\left[-\frac{1}{2}\{v_3^2+2\,\rho_{34\cdot12}(u)\,v_3\,v_4+v_4^2\}\right]dv_3\,dv_4$$

となり，ここで v_3 と v_4 を変数とすれば

$$(2.43)\qquad \frac{\sqrt{1-\rho^2{}_{34\cdot12}(u)}}{2\,\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}\{v_3^2+2\,\rho_{34\cdot12}(u)\,v_3\,v_4+v_4^2\}\right]$$

が 2 変量正規分布の密度函数となることから，(2.42) で積分を行った結果は

$$(2.44)\qquad -\frac{2\,\pi}{\sqrt{1-\rho^2{}_{34\cdot12}(u)}}$$

となる．

(2.41) の右辺の積分の値は $\rho_{34\cdot12}(u)=0$ であれば明らかに 0 となり，$\rho_{34\cdot12}(u)$ で微分したものは (2.44) となるから，この積分の値自身は (2.44) を 0 から $\rho_{34\cdot12}(u)$ まで積分することによって

$$(2.45)\qquad -2\,\pi\sin^{-1}\rho_{34\cdot12}(u)$$

となる．よって

$$(2\ 46)\qquad I_{11}(u)=-\frac{4\,\pi^2}{\sqrt{1-u^2\,\rho_{12}{}^2}}\sin^{-1}\rho_{34\cdot12}(u)$$

となる．

これで (2.34) の第 4 辺における第 1 の積分が求められたことになる．他も同様にして，結局

$$(2.47)\qquad \frac{\partial F}{\partial u}=4\,\pi^2\left\{\frac{\rho_{12}}{\sqrt{1-u^2\,\rho_{12}{}^2}}\sin^{-1}\rho_{34\cdot12}(u)+\frac{\rho_{13}}{\sqrt{1-u^2\,\rho_{13}{}^2}}\cdot\sin^{-1}\rho_{24\cdot13}(u)+\frac{\rho_{14}}{\sqrt{1-u^2\,\rho_{14}{}^2}}\sin^{-1}\rho_{23\cdot14}(u)\right\}$$

が得られる．この結果を (2.33) に代入して，

$$(2.48)\qquad I_1=\iiiint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{1}{t_1\,t_2\,t_3\,t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4$$

その行列式は

$$\frac{R(u)}{1-u^2\rho_{12}{}^2}$$

となる．よって（2. 36）を t_1 と t_2 に関して積分すれば，つぎの等式が与えられる．

$$\iint\frac{\sqrt{R(u)}}{(2\pi)^2}e^{-\frac{P(u)}{2}}dt_1\,dt_2$$

$$=\frac{\sqrt{\dfrac{R(u)}{1-u^2\rho_{12}{}^2}}}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{R_{44}(u)}{1-u^2\rho_{12}{}^2}t_3{}^2-2\frac{R_{34}(u)}{1-u^2\rho_{12}{}^2}t_3\,t_4+\frac{R_{33}(u)}{1-u^2\rho_{12}{}^2}t_4{}^2\right\}\right]$$

よって（2. 35）において t_1 と t_2 に関する積分を行った結果は

(2. 40)　$$I_{11}(u)=\frac{2\pi}{\sqrt{1-u^2\rho_{12}{}^2}}\iint\exp\left[-\frac{1}{2(1-u^2\rho_{12}{}^2)}\{R_{44}(u)\,t_3{}^2-2\,R_{34}(u)\,t_3\,t_4+R_{33}(u)\,t_4{}^2\}\right]\frac{1}{t_3\,t_4}dt_3\,dt_4$$

となる．ここで

$$v_3=\sqrt{\frac{R_{44}(u)}{1-u^2\rho_{12}{}^2}}t_3,\qquad v_4=\sqrt{\frac{R_{33}(u)}{1-u^2\rho_{12}{}^2}}t_4$$

$$\rho_{34\cdot12}(u)=-\frac{R_{34}(u)}{\sqrt{R_{44}(u)\,R_{33}(u)}}$$

$$\rho_{34\cdot12}=\rho_{34\cdot12}(1)=-\frac{R_{34}}{\sqrt{R_{44}\,R_{33}}}$$

とおく．$\rho_{34\cdot12}(u)$ は，相関行列が（2. 27）で与えられたとき，x_1 と x_2 を固定した場合の x_3 と x_4 の間の偏相関係数を示し，$\rho_{34\cdot12}$ は相関行列が（2. 4）で与えられた場合のそれを示す．(j, k, l, m) が（1, 2, 3, 4）の順列であれば，一般に $\rho_{jk\cdot lm}(u)$, $\rho_{jk\cdot lm}$ も同様の意味に用いる．この置換えによって（2. 40）は

四一五

(2. 41)　$$I_{11}(u)=\frac{2\pi}{\sqrt{1-u^2\rho_{12}{}^2}}\iint\exp\left[-\frac{1}{2}\{v_3{}^2+2\,\rho_{34\cdot12}(u)\,v_3\,v_4\right.$$

$$(2.35)\qquad I_{11}(u)=\iiiint e^{-\frac{P(u)}{2}}\frac{1}{t_3\,t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4$$

についてのみ説明することにする．

まず (2.35) で t_1 と t_2 に関する積分を実行する．そのため，$\boldsymbol{R}$ の行列式を R, $\boldsymbol{R}(u)$ の行列式を $R(u)$ とおく．このとき t_1, t_2, t_3, t_4 を変数と考えれば，

$$(2.36)\qquad \frac{\sqrt{R(u)}}{(2\pi)^2}e^{-\frac{P(u)}{2}}$$

は，分散行列が $R(u)$ の逆行列

$$(2.37)\qquad [\boldsymbol{R}(u)]^{-1}=\frac{1}{R(u)}\begin{Vmatrix} R_{11}(u) & R_{21}(u) & R_{31}(u) & R_{41}(u) \\ R_{12}(u) & R_{22}(u) & R_{32}(u) & R_{42}(u) \\ R_{13}(u) & R_{23}(u) & R_{33}(u) & R_{43}(u) \\ R_{14}(u) & R_{24}(u) & R_{34}(u) & R_{44}(u) \end{Vmatrix}$$

で与えられる正規分布の密度函数とみなすことができる．ただし $R_{jk}(u)$ は $R(u)$ における j 行 k 列の元の余因子である．ついでに R における j 行 k 列の元の余因子を

$$R_{jk}=R_{jk}(1)$$

で示すことを附記しておく．

そこで (2.36) を t_1 と t_2 に関して積分すれば，この正規分布における t_3 と t_4 の周辺分布の密度函数が与えられる．その周辺分布の密度函数に現われる 2 次形式の行列は (2.37) の第 3 行と第 4 行，第 3 列と第 4 列だけを用いてできる行列

$$(2.38)\qquad \frac{1}{R(u)}\begin{Vmatrix} R_{33}(u) & R_{43}(u) \\ R_{34}(u) & R_{44}(u) \end{Vmatrix}$$

の逆行列となる．(2.38) の行列式は

$$(2.39)\qquad \frac{1}{[R(u)]^2}[R_{33}(u)\,R_{44}(u)-\{R_{34}(u)\}^2]=\frac{1-u^2\rho_{12}{}^2}{R(u)}$$

であるから，求める逆行列は

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{R_{44}(u)}{1-u^2\rho_{12}{}^2} & -\dfrac{R_{34}(u)}{1-u^2\rho_{12}{}^2} \\ -\dfrac{R_{43}(u)}{1-u^2\rho_{12}{}^2} & \dfrac{R_{33}(u)}{1-u^2\rho_{12}{}^2} \end{Vmatrix}$$

となる．(2. 26) において P の代りに $P(u)$ とおいたものを

(2. 32)
$$F(u)=\iiiint e^{-\frac{P(u)}{2}}\frac{1}{t_1\,t_2\,t_3\,t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4$$

とおく．明らかに

$$F(1)=I_1$$

であって，

$$F(0)=\int\frac{e^{-\frac{t_1^2}{2}}}{t_1}dt_1\iiint\frac{e^{-\frac{P_1}{2}}}{t_2\,t_3\,t_4}dt_2\,dt_3\,dt_4$$

(ただし

$$P_1=\sum_{j,k=2}^{4}\rho_{jk}\,t_j\,t_k$$
)

については t_1 に関する積分が 0 になるので

$$F(0)=0$$

となる．よって

(2. 33)
$$I_1=F(1)=F(1)-F(0)=\int_0^1\frac{\partial F}{\partial u}du$$

となる．

つぎに $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ を求めることにする．(2. 31)，(2. 32) より，

(2. 34)
$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u}&=-\frac{1}{2}\iiiint e^{-\frac{P(u)}{2}}\frac{\frac{\partial P}{\partial u}}{t_1\,t_2\,t_3\,t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4\\&=-\iiiint e^{-\frac{P(u)}{2}}\frac{\rho_{12}\,t_1\,t_2+\rho_{13}\,t_1\,t_3+\rho_{14}\,t_1\,t_4}{t_1\,t_2\,t_3\,t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4\\&=-\rho_{12}\iiiint e^{-\frac{P(u)}{2}}\frac{1}{t_3\,t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4\\&\qquad-\rho_{13}\iiiint e^{-\frac{P(u)}{2}}\frac{1}{t_2\,t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4\\&\qquad-\rho_{14}\iiiint e^{-\frac{P(u)}{2}}\frac{1}{t_2\,t_3}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4\end{aligned}$$

ここに現われた 3 つの積分はいずれも同様にして求められるので，第 1 の積分

$\sigma_3=\sigma_4=1$ と仮定して差支えない. しかし, ある1つの積分から他の積分を求めるためには σ をそのまま残しておくと便利である.

まず I_1 を求めるために $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma_4=1$ とおくと, この場合には Q は

$$\sum_{j,k=1}^{4}\rho_{jk}\,t_j\,t_k \tag{2.25}$$

となる. これを P とおく. このとき,

$$I_1=\iiiint e^{-\frac{P}{2}}\frac{1}{t_1\,t_2\,t_3\,t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4 \tag{2.26}$$

となる.

つぎに相関行列

$$\boldsymbol{R}(u)=\begin{Vmatrix} 1 & u\rho_{12} & u\rho_{13} & u\rho_{14} \\ u\rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \rho_{24} \\ u\rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \rho_{34} \\ u\rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & 1 \end{Vmatrix} \tag{2.27}$$

を考える. このとき $0\leqq u\leqq 1$ に対しては, $\boldsymbol{R}$ が正値であれば $\boldsymbol{R}(u)$ も正値のことがまず証明される. なぜなら $\boldsymbol{R}$ が正値であれば

$$\boldsymbol{R}(0)=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho_{23} & \rho_{24} \\ 0 & \rho_{32} & 1 & \rho_{34} \\ 0 & \rho_{42} & \rho_{43} & 1 \end{Vmatrix} \tag{2.28}$$

$$\boldsymbol{R}(1)=\boldsymbol{R} \tag{2.29}$$

はともに正値であって

$$\boldsymbol{R}(u)=(1-u)\boldsymbol{R}(0)+u\,\boldsymbol{R}(1) \tag{2.30}$$

が成立つからである. よって $\boldsymbol{R}(u)$ を相関行列と考えることができる.

そこで相関行列 $\boldsymbol{R}$ の代りに $\boldsymbol{R}(u)$ を用いれば, 2 次形式 (2.25) は

$$P(u)=t_1^2+2u\,\rho_{12}\,t_1\,t_2+2u\,\rho_{13}\,t_1\,t_3+2u\,\rho_{14}\,t_1\,t_4 +\sum_{j,k=2}^{4}\rho_{jk}\,t_j\,t_k \tag{2.31}$$

$$+\rho_{12}\rho_{13}^2\rho_{24}+2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{14}\rho_{23})\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3 t_1^2 t_2 t_3$$

$$(1+\rho_{12}^2+\rho_{13}^2+\rho_{14}^2+\rho_{23}^2+\rho_{24}^2+\rho_{34}^2+2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} +2\rho_{12}\rho_{14}\rho_{24}+2\rho_{13}\rho_{14}\rho_{34}+2\rho_{23}\rho_{24}\rho_{34}+\rho_{12}^2\rho_{34}^2 +\rho_{13}^2\rho_{24}^2+\rho_{14}^2\rho_{23}^2+2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{24}\rho_{34}+2\rho_{12}\rho_{14}\rho_{23}\rho_{34} +2\rho_{13}\rho_{14}\rho_{23}\rho_{24})\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 t_1 t_2 t_3 t_4 \tag{2.16}$$

となる．

そこで (2.3) を計算するには，つぎの 8 つの形の積分が計算できればよいことになる．

$$I_1=\iiiint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{1}{t_1 t_2 t_3 t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4 \tag{2.17}$$

$$I_2=\iiiint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1^2 t_1^2}{t_1 t_2 t_3 t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4 \tag{2.18}$$

$$I_3=\iiiint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2}{t_1 t_2 t_3 t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4 \tag{2.19}$$

$$I_4=\iiiint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1^4 t_1^4}{t_1 t_2 t_3 t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4 \tag{2.20}$$

$$I_5=\iiiint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1^3\sigma_2 t_1^3 t_2}{t_1 t_2 t_3 t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4 \tag{2.21}$$

$$I_6=\iiiint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2 t_1^2 t_2^2}{t_1 t_2 t_3 t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4 \tag{2.22}$$

$$I_7=\iiiint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3 t_1^2 t_2 t_3}{t_1 t_2 t_3 t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4 \tag{2.23}$$

$$I_8=\iiiint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 t_1 t_2 t_3 t_4}{t_1 t_2 t_3 t_4}dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4 \tag{2.24}$$

ただし Q は (2.6) によって与えられ，t に関する 4 重積分は Cauchy の主値を表わす．

四一九

このうちで I_2 から I_8 まではいずれも 6 つの相関係数 ρ_{jk} の初等函数として表わされるが，I_1 はこれらの相関係数をパラメーターにもつ初等函数の定積分として表わされることが示される．いずれの積分についてもその値が σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 に関係しないことは明らかであるから，このうちのある 1 つの積分を求める場合には始めから $\sigma_1=\sigma_2=$

$$(2.7)\quad \begin{cases} T_1=\sigma_1 t_1+\rho_{12}\sigma_2 t_2+\rho_{13}\sigma_3 t_3+\rho_{14}\sigma_4 t_4 \\ T_2=\rho_{21}\sigma_1 t_1+\sigma_2 t_2+\rho_{23}\sigma_3 t_3+\rho_{24}\sigma_4 t_4 \\ T_3=\rho_{31}\sigma_1 t_1+\rho_{32}\sigma_2 t_2+\sigma_3 t_3+\rho_{34}\sigma_4 t_4 \\ T_4=\rho_{41}\sigma_1 t_1+\rho_{42}\sigma_2 t_2+\rho_{43}\sigma_3 t_3+\sigma_4 t_4 \end{cases}$$

とおけば

$$(2.8)\quad \frac{\partial^4\varphi(t_1, t_2, t_3, t_4)}{\partial t_1\,\partial t_2\,\partial t_3\,\partial t_4}$$
$$=e^{-\frac{Q}{2}}[\rho_{12}\rho_{34}+\rho_{13}\rho_{24}+\rho_{14}\rho_{23}-\rho_{12}T_3T_4-\rho_{13}T_2T_4$$
$$-\rho_{14}T_2T_3-\rho_{23}T_1T_4-\rho_{24}T_1T_3-\rho_{34}T_1T_2$$
$$+T_1T_2T_3T_4]\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4$$

となる.

右辺の [ ] 内で t を含まない項は

$$(2.9)\quad \rho_{12}\rho_{34}+\rho_{13}\rho_{24}+\rho_{14}\rho_{23}$$

t に関して 2 次の項は t_j^2 の形の項と $t_j t_k (j \neq k)$ の形の項とに分類できるが, その係数を求めるには, t_1^2 の係数と $t_1 t_2$ の係数とを求めておきさえすれば, あとは添数の間の置換から容易に得られる. t_1^2 の項は

$$(2.10)\quad -(\rho_{12}\rho_{34}+\rho_{13}\rho_{24}+\rho_{14}\rho_{23}+3\rho_{12}\rho_{13}\rho_{14})\sigma_1^2 t_1^2$$

$t_1 t_2$ の項は

$$(2.11)\quad -(\rho_{34}+2\rho_{13}\rho_{14}+2\rho_{23}\rho_{24}+3\rho_{12}\rho_{13}\rho_{24}$$
$$+3\rho_{12}\rho_{14}\rho_{23}+\rho_{12}^2\rho_{34})\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2$$

となる. さらに t に関して 4 次の項も t_1^4, $t_1^3 t_2$, $t_1^2 t_2^2$, $t_1^2 t_2 t_3$, $t_1 t_2 t_3 t_4$ の 5 つの形の項さえ求めておけば, 他の形の項は添数の間の置換から容易にわかる. これらはそれぞれ

$$(2.12)\quad \rho_{12}\rho_{13}\rho_{14}\sigma_1^4 t_1^4$$

$$(2.13)\quad (\rho_{13}\rho_{14}+\rho_{12}\rho_{13}\rho_{24}+\rho_{12}\rho_{14}\rho_{23}+\rho_{12}^2\rho_{13}\rho_{14})\sigma_1^3\sigma_2 t_1^3 t_2$$

$$(2.14)\quad (\rho_{13}\rho_{24}+\rho_{14}\rho_{23}+\rho_{12}\rho_{13}\rho_{14}+\rho_{12}\rho_{23}\rho_{24}$$
$$+\rho_{12}^2\rho_{13}\rho_{24}+\rho_{12}^2\rho_{14}\rho_{23})\sigma_1^2\sigma_2^2 t_1^2 t_2^2$$

$$(2.15)\quad (\rho_{14}+\rho_{12}\rho_{24}+\rho_{13}\rho_{34}+\rho_{12}\rho_{23}\rho_{34}+\rho_{13}\rho_{23}\rho_{24}$$
$$+\rho_{12}^2\rho_{14}+\rho_{13}^2\rho_{14}+\rho_{14}\rho_{23}^2+\rho_{12}^2\rho_{13}\rho_{34}$$

本節では x_1, x_2, x_3, x_4 が平均値 0 の 4 変量正規分布に従って分布するときの $|x_1 x_2 x_3 x_4|$ の平均値 $E(|x_1 x_2 x_3 x_4|)$ の公式を導びくことにしよう.

[9] によれば, 一般に $x_1, x_2, \cdots, x_r$ が r 次元の確率分布に従って分布するとき, その特性函数を $\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_r)$ とすれば, 公式

(2.1)
$$E(|x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}|) = \frac{1}{i^{p+n}\pi^p}\int\cdots\int\left[\frac{\partial^n\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_r)}{\partial t_1^{n_1}\partial t_2^{n_2}\cdots\partial t_r^{n_r}}\right]_{t_{p+1}=\cdots=t_r=0}\frac{dt_1\,dt_2\cdots dt_p}{t_1\,t_2\cdots t_p}$$

の成立つことが証明されている. ただし, $n_1, \cdots, n_p$ は奇数, $n_{p+1}, \cdots, n_r$ は偶数であって, $n=\sum_{j=1}^{r} n_j$ とする. またここに与えられている $t_1, \cdots, t_p$ に関する積分は Cauchy の主値

(2.2)
$$\lim_{\substack{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p \to 0+ \\ c_1, \cdots, c_p \to \infty}}\left(\int_{-c_1}^{-\varepsilon_1}+\int_{\varepsilon_1}^{c_1}\right)dt_1\cdots\cdots\left(\int_{-c_p}^{-\varepsilon_p}+\int_{\varepsilon_p}^{c_p}\right)dt_p$$

を示す.

(2.1) によれば $E(|x_1 x_2 x_3 x_4|)$ はつぎのように与えられる.

(2.3)
$$E(|x_1 x_2 x_3 x_4|) = \frac{1}{\pi^4}\iiiint\frac{\partial^4\varphi(t_1, t_2, t_3, t_4)}{\partial t_1\,\partial t_2\,\partial t_3\,\partial t_4}\,\frac{dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4}{t_1\,t_2\,t_3\,t_4}$$

x_1, x_2, x_3, x_4 が 4 変量正規分布に従い, その平均値をいずれも 0, 標準偏差をそれぞれ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, 相関行列を

(2.4)
$$\boldsymbol{R}=\begin{Vmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & 1 \end{Vmatrix}\qquad \begin{matrix}\rho_{jk}=\rho_{kj} \\ \rho_{jj}=1\end{matrix}$$

四二一 とすれば, 特性函数はつぎのように表わされる.

(2.5)
$$\varphi(t_1, t_2, t_3, t_4)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{4}\rho_{jk}\,\sigma_j\,\sigma_k\,t_j\,t_k\right\}$$

ここで,

(2.6)
$$Q=\sum_{j,k=1}^{4}\rho_{jk}\,\sigma_j\,\sigma_k\,t_j\,t_k$$

示した．分散分析の場合には $z_1, z_2, \cdots, z_n$ は互に独立に分散 σ^2 の正規分布に従い，それらの平均値は一般に

$$E(z_j)=\beta_1 y_{1j}+\cdots\cdots+\beta_k y_{kj} \qquad (1\leqq j\leqq n)$$

のように確定変数 y の 1 次式の形になっていることを仮定する．ここで $\beta_1, \cdots, \beta_k$ の値を最小自乗法によって推定して，これらの推定値を $b_1, b_2, \cdots, b_k$ とすれば，残差

$$x_j=z_j-b_1 y_{1j}-\cdots\cdots-b_k y_{kj} \qquad (1\leqq j\leqq n)$$

が与えられる．Geary [1] の検定の拡張として筆者が提案したのは

$$U=\frac{|x_1|+|x_2|+\cdots\cdots+|x_n|}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2}} \tag{1.11}$$

の形の検定基準である．この場合にも (1.11) の値は右辺の分母と独立に分布するので，

$$E[U^l]=\frac{E[(|x_1|+\cdots\cdots+|x_n|)^l]}{E[(x_1^2+\cdots\cdots+x_n^2)^{\frac{l}{2}}]}$$

なる関係が成立する．Geary の (1.8) については分子の $z_1-\bar{z}, z_2-\bar{z}, \cdots\cdots, z_n-\bar{z}$ 相互間の相関係数は一定値 $-1/n$ であるが，この場合には $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 相互間の相関係数は同一の値ではないのでさらに計算は面倒になる．比較的簡単な 2 重分類の場合について筆者は(1.11)の 2 次までの積率を与えておいたが，[8], [9] の結果と本稿 (2.63) を用いれば，4 次までの積率は求められることになる．

この種の研究は (2.63) によって今後多少なりとも促進されることと思われる．

本稿 II では上述の $E(|x_1 x_2 x_3 x_4|)$ の一般形を与え，III ではその特殊な場合についてこれまでの結果との関係を論じ，IV では各変数について 2 次までの範囲内で残りの絶対積率 $E(|x_1^2 x_2 x_3 x_4|)$, $E(|x_1^2 x_2^2 x_3 x_4|)$, $E(|x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4|)$, $E(x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2)$ の結果の式だけを示しておく．

II

から計算された値と，Kamat [2] において得られた相関係数の 10 乗までの級数展開による値とが比較されている．ここで筆者の公式に基づいて計算する際には (2.63) の一般式の特殊な場合を用いることになるので，この方は数値積分を丁寧に計算すればかなりよい近似が得られるのに対して，Kamat [2] の級数展開による方法では近似の度合すらはっきりわからない．そこで Kamat 自身も後の利用に際しては筆者の公式による値を用いている．

Kamat [5], [6], Sathe and Kamat [11] では正規母集団の標準偏差を推定するのに，観測値 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ の間に多項式で表わされるような傾向変動があれば，通常の標本標準偏差よりはむしろ観測値の高次の階差の絶対値，ないしはその羃，例えば

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}|z_i-z_{i+1}|$$

$$\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n-2}|z_i-2z_{i+1}+z_{i+2}|$$

$$\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n-2}(z_i-2z_{i+1}+z_{i+2})^2$$

などを用うべきであるとして，絶対積率を利用してこれらの統計量の標本分布を求めている．また Kamat [4] では絶対積率の公式の応用によって Gini の平均差

$$\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}|z_i-z_j|$$

の 3 次の積率を計算し，[7] では平均偏差

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|z_i-\bar{z}|$$

の積率を求めている．以上いずれも絶対積率を利用しているが，x_1, x_2, x_3, x_4 が平均値 0 で互に相関をもつ 4 変量の正規分布に従う場合の $E(|x_1x_2x_3x_4|)$ については，止むなく，級数展開の方法によっている．

また筆者 [10] は Geary [1] の検定を一般の分散分析の場合に拡張して，そこで取上げたモデルが適当かどうかの判定をする考え方を

$$d=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{|z_i-z_{i+1}|}{n-1} \tag{1.10}$$

を利用した推定方法を論じ，また d と標本標準偏差 s との比 d/s の標本分布を求めている．これらの理論上の観点並びに若干の工学上の応用面の観点から，彼は多変量正規分布の絶対積率並びに不完全積率の公式の必要を痛感してこれを計算し，その結果を [2] に与えている．ここで不完全積率とは，$x_1, x_2, \cdots, x_r$ の密度函数を $f(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ とするとき

$$\int_0^\infty\cdots\int x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r}f(x_1, x_2, \cdots, x_r)\,dx_1\cdots dx_r$$

の形の積分の値のことである．多変量正規分布において一般の相関行列の場合の不完全積率が求められれば，他の象限における函数 $|x_1^{n_1}\cdots x_r^{n_r}|\,f(x_1, \cdots, x_r)$ の積分も容易に計算される．Kamat [2] の方法は不完全積率を直接の積分でまず求め，これと他の象限でのこのような積分の値との和として，絶対積率を計算するというやり方である．

[2]，[3] は [9] の約 1 年後に発表された．筆者は [9] の原稿をその発表前に E. S. Pearson に送ったところ，[2]，[3] において筆者の研究結果にも論及され，筆者の公式 (2.1) によれば，不完全積率が計算できないことが欠点であると論ぜられた．この点の議論については本稿では余裕がないので別の機会に譲りたいと思う．[2] においてもまとまった形で示された絶対積率は 3 変量までについてであって，4 変量の場合の $E(|x_1x_2x_3x_4|)$ は相関係数の級数展開の形で，一般項も与えず，有限項で計算を止めた際の誤差の評価もなしに与えられている．

[3] では (1.10) の形の統計量の標本分布を取扱っているが，d の 4 次の積率を求める際に

$$\rho_{12}=\rho_{23}=\rho_{34}=-\frac{1}{2},\quad \rho_{13}=\rho_{14}=\rho_{24}=0$$

の場合の $E(|x_1x_2x_3x_4|)$ が必要になってくる．この場合は一般の形の相関行列からみればかなり計算は簡単になって，筆者の公式 (2.1)

い．しかも $z_1-\bar{z}$, ……, $z_N-\bar{z}$ はいずれも x_1, …, x_n の 1 次結合となるので，g_2 も t_1, …, t_{n-1} だけの函数の形に書表わすことができる．よって (1.8) における g_2 は右辺の分母とは独立に分布するので，g_1 の場合と同様に

$$(1.9)\qquad E[g_2{}^l]=\frac{E[(|z_1-\bar{z}|+\cdots\cdots+|z_N-\bar{z}|)^l]}{N^{\frac{l}{2}}\,E[s^l]}$$

が成立する．この場合には (1.7) の x_1, x_2, x_3, x_4 の代りに $z_1-\bar{z}$, $z_2-\bar{z}$, $z_3-\bar{z}$, $z_4-\bar{z}$ とおいた 11 個の形の絶対積率の計算が，Pearson 型の曲線のあてはめのために必要になってくる．

このうち最初の 10 個のものは n の初等函数と σ の羃との積として表わせるけれども，最後のものについてはそのような表示は不可能である．Geary は最後の絶対積率については，止むをえず級数展開を行ってその最初のいくつかの項をとることによって近似値を計算している．

筆者は [8] において x, y が平均値 0 の 2 変量正規分布に従って分布する場合の絶対積率 $E(|x^m\,y^n|)$ の公式を $m+n\leqq 12$, $m\geqq n\geqq 0$ の各場合について求めた．また [9] においては x_1, x_2, …, x_r が一般の r 次元の確率分布に従って分布するとき，絶対積率 $E(|x_1{}^{n_1}\,x_2{}^{n_2}\cdots x_r{}^{n_r}|)$ を特性函数から計算する公式 (2.1) を導びき，これを利用して，平均値 0 の 3 変量 x_1, x_2, x_3 の正規分布での絶対積率 $E(|x_1{}^{n_1}\,x_2{}^{n_2}\,x_3{}^{n_3}|)$ を $n_1+n_2+n_3\leqq 12$, $n_1\geqq n_2\geqq n_3>0$ の各場合について計算した．そのとき以来，x_1, x_2, x_3, x_4 が平均値 0 の 4 変量の正規分布に従うときには，絶対積率 $E(|x_1\,x_2\,x_3\,x_4|)$ が，x_1, x_2, x_3, x_4 の標準偏差と相互間の相関係数から，初等函数の定積分として求められることはわかっていたが，その具体的な形はわからなかった．本稿では II においてその具体的な計算し易い形を与えることにする．応用上しばしば必要となるのは 4 次までの絶対積率であって，そのためには上述の $E(|x_1\,x_2\,x_3\,x_4|)$ の形の積率のまとまった形の式が強く要望されていた．

Kamat [3] は正規母集団からの大きさ n の標本 z_1, z_2, …, z_n より，母集団標準偏差を推定する際に，統計量

$$g_1=\frac{1}{\sqrt{n}}(|t_1|+\cdots\cdots+|t_{n-1}|+\sqrt{1-t_1^2-\cdots-t_{n-1}^2})$$

と表わせるので，g_1 は s と独立に分布する．しかも（1.3）は

$$|x_1|+\cdots\cdots+|x_n|=\sqrt{n}\,g_1s$$

となるから，一般に

$$(1.5)\qquad E[(|x_1|+\cdots\cdots+|x_n|)^l]=n^{\frac{l}{2}}E[(g_1s)^l]$$
$$=n^{\frac{l}{2}}E[g_1^l]\,E[s^l]$$

よって

$$(1.6)\qquad E[g_1^l]=\frac{E[(|x_1|+\cdots\cdots+|x_n|)^l]}{n^{\frac{l}{2}}E[s^l]}$$

となる．s の標本分布は χ^2 分布から容易に導かれて $E[s^l]$ も容易に計算される．そこで（1.6）の分子が計算できれば $E[g_1^l]$ が求められることになる．

Pearson 型の曲線をあてはめるには 4 次までの積率が必要であって，$l=1, 2, 3, 4$ について（1.6）の分子を計算するには

$$(1.7)\qquad \begin{cases} E(|x_1|) \\ E(|x_1^2|),\ E(|x_1x_2|) \\ E(|x_1^3|),\ E(|x_1^2x_2|),\ E(|x_1x_2x_3|) \\ E(|x_1^4|),\ E(|x_1^3x_2|),\ E(|x_1^2x_2^2|),\ E(|x_1^2x_2x_3|) \\ \qquad E(|x_1x_2x_3x_4|) \end{cases}$$

なる 11 個の形の絶対積率を求める必要が生じてくる．しかしこの場合には $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の分布は互に独立であるから，以上はいずれも容易に計算される．

第 2 の検定は

$$(1.8)\qquad g_2=\frac{\sum_{j=1}^{N}|z_j-\bar{z}|/N}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N}(z_j-\bar{z})^2/N}}$$ 四二六

なる統計量に基づくものである．直交行列（1.2）による変換（1.1）を用いれば（1.8）の分母と（1.3）の分母とは定係数を除けば相等し

としては Helmert の変換における行列

$$
\left\|
\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\[2ex]
\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\[2ex]
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\[2ex]
\frac{1}{\sqrt{nN}} & \frac{1}{\sqrt{nN}} & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \frac{1}{\sqrt{nN}} & -\frac{n}{\sqrt{nN}} \\[2ex]
\frac{1}{\sqrt{N}} & \frac{1}{\sqrt{N}} & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \frac{1}{\sqrt{N}} & \frac{1}{\sqrt{N}}
\end{array}
\right\|
$$

をあげることができる.

z_1, z_2, $\cdots$, z_N が標準偏差 σ のある 1 つの正規母集団からとられた大きさ N の標本であれば，上の変換の結果得られた x_1, x_2, $\cdots$, x_n はいずれも平均値 0，標準偏差 σ の正規分布に従って互に独立に分布する．そこでこの場合に

$$
g_1=\frac{\sum_{j=1}^{n}|x_j|/n}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}x_j^2/n}} \tag{1.3}
$$

なる統計量を考えれば，(1. 3) は σ に関係せずに n だけに関係した標本分布をもつことになる.

ここで

$$
\left\{
\begin{aligned}
s&=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\quad+x_n^2}\\
t_1&=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
t_{n-1}&=\frac{x_{n-1}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}}
\end{aligned}
\right. \tag{1.4}
$$

とおけば，s は t_1, t_2, $\cdots$, t_{n-1} の組とは独立に分布することが示される．(1. 3) の g_1 は

4 変量正規分布の絶対積率

鍋 谷 清 治

I

絶対値の関係した統計量の標本分布は，たとえ母集団分布が正規分布であっても，簡単には求められないのが普通である．このような場合にその統計量の標本分布の積率を計算し，これに基づいて Pearson 型の曲線の1つを標本分布の近似としてあてはめるという方法が通常とられている．このような場合にその統計量の積率の計算の際に絶対積率を求める必要が生ずる．

例えば Geary [1] は，与えられた大きさ $N=n+1$ の標本 $z_1, z_2, \cdots, z_N$ が正規分布をする母集団からとられたものかどうかを検定する際に，つぎの2つの方法を提唱している．

その1つは $z_1, z_2, \cdots, z_N$ の標本平均を $\bar{z}$ として1次変換

$$(1.1)\qquad \begin{cases} x_1=c_{11}z_1+c_{12}z_2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+c_{1N}z_N \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=c_{n1}z_1+c_{n2}z_2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+c_{nN}z_N \\ x_N=\sqrt{N}\,\bar{z}=\dfrac{1}{\sqrt{N}}z_1+\dfrac{1}{\sqrt{N}}z_2+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{N}}z_N \end{cases}$$

によって $z_1, z_2, \cdots, z_N$ を $x_1, x_2, \cdots, x_N$ に変換する．ただし c_{jk} は行列

$$(1.2)\qquad \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots\cdots\cdots & c_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots\cdots\cdots & c_{nN} \\ \dfrac{1}{\sqrt{N}} & \dfrac{1}{\sqrt{N}} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{1}{\sqrt{N}} \end{Vmatrix}$$

四二八

が直交行列になるようにとった定係数である．このような行列の1つ