

# ペトリネットの解析とプレスバーガー算術

山 崎 秀 記

## 概 要

従来、非同期的並行システムの数学的モデルとして研究されてきたペトリネット (Petri net) は、最近、ビジネスプロセスを記述するための道具としても注目されている。本論文ではペトリネットとその解析のための数学的理論について解説するとともに、筆者らの最近の結果についてもふれる。

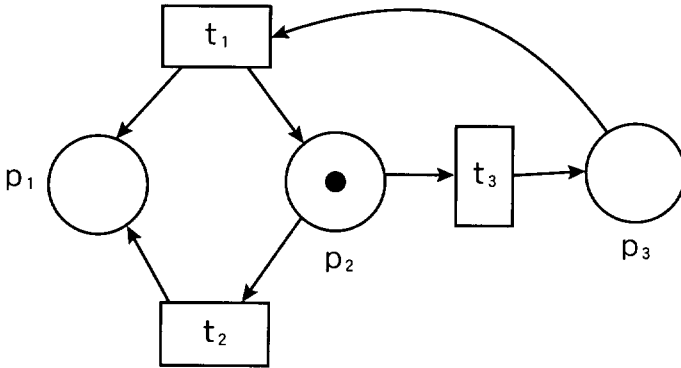
## 1 はじめに

ペトリネットは非同期的並行システムの数学的モデルとして提案され、従来活発に研究が行われてきた。また最近、ビジネスプロセスを記述する道具としても注目されている [1]。

ペトリネットは、図 1 に示されるような、プレースと遷移という 2 種類の節点とそれらを結ぶアーク (矢印) からなる 2 分有向グラフで表される。通常プレースは○で表され、内部にいくつかのトークン (黒点で表される) を持つ。遷移は□で表される。遷移  $t$  に対し、 $t$  へのアークを持つプレースを  $t$  の入力プレースといい、 $t$  からのアークを持つプレースを  $t$  の出力プレースという。

ペトリネットの状態は、マーキングと呼ばれる、各プレースへのトークンの割り当てで表現される。例えば、図 1 に示した初期マーキングは各プレースの持つトークン数を表すベクトル  $\langle 0, 1, 0 \rangle$  で表される。

遷移は、そのすべての入力プレースがトークンを持つとき発火可能であるといい、遷移が発火すると、すべての入力プレースからトークンを 1 つずつ取り去り、すべての出力プレースにトークンを 1 つずつ追加する。

図1 ペトリネット  $N_1$ 


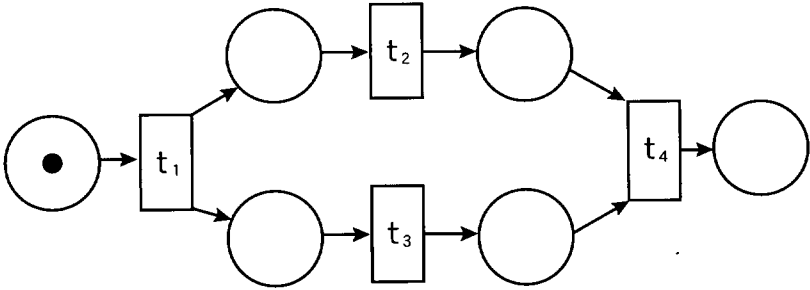
例えば図1の初期マーキング  $\langle 0,1,0 \rangle$  においては、遷移  $t_2$  と  $t_3$  が発火可能であり、これら2つの遷移はプレース  $p_2$  にあるトークンを競合的に取り合っており、どちらか一方だけが発火できる。

初期マーキングで  $t_2$  を発火するとマーキングは  $\langle 1,0,0 \rangle$  になり、 $t_3$  を発火するとマーキングは  $\langle 0,0,1 \rangle$  になる。マーキング  $\langle 0,0,1 \rangle$  では  $t_1$  が発火可能で、 $t_1$  を発火すると、マーキングは  $\langle 1,1,0 \rangle$  となる。以下遷移列  $t_3 t_1$  は繰り返し発火可能であり、これを  $n$  回繰り返せばマーキングは  $\langle n,1,0 \rangle$  になる。

一方、マーキング  $\langle n,1,0 \rangle$  で  $t_2$  発火後のマーキング  $\langle n+1,0,0 \rangle$  では、もはやどの遷移も発火可能でなくなり、遷移  $t_2$  はペトリネット  $N_1$  で表現されたシステムを停止させる役割を持っていることがわかる。

このような、どの遷移も発火可能でないマーキングをデッドロックと呼ぶ。ペトリネットの解析においては、与えられたペトリネットが(意図しない)デッドロックを引き起こすことがあるのか、より一般的にどのようなマーキングに到達可能なのか、が重要な問題である [7]。

ペトリネットでは、上に示した競合性の他に、平行性と順序性が記述できる。例えば、図2のペトリネットにおいて遷移  $t_1$  を発火した後、遷移  $t_2$  と  $t_3$  はどちらを先に発火しても結果は同じであり、 $t_2$  と  $t_3$  を発火した後、 $t_4$  が発火できる。

図2 ペトリネット  $N_2$ 

最近、ビジネスプロセスの表現にペトリネットが使われるようになってきた。例えば、トークンで書類や物品などの処理対象を表し、プレースは部署あるいは書類や物品の状態を、遷移が処理を表すと解釈することによって、ビジネスにおける書類や物品の流れを的確に表すことができる。

さらに、記述能力を上げるために、トークンの色分けを許したカラーペトリネットや、遷移の発火(処理)に要する(確率的な)時間記述を許した時間ペトリネットなども知られている [1, 7]。

本論文では、2節でペトリネットの基本的概念を形式的に定義する。3節では、加法を持つ整数上の1階述語論理であるプレスバーガー算術を定義し、ペトリネットに関する基礎的な述語が、プレスバーガー式で定義できることを示す。4節では、ペトリネットで初期マーキングから到達可能なマーキングの集合がプレスバーガー式で表現できるようなペトリネットの条件を調べ、PTハンドルを持たないペトリネットではその条件が成り立つことを示した、筆者らの最近の結果 [8] について述べる。

## 2 ペトリネットの形式的定義

$\mathbf{Z}$  を整数の集合、 $\mathbf{N}$  を非負整数の集合とする。集合  $X$  から  $\mathbf{Z}(\mathbf{N})$  への関数全体をそれぞれ  $\mathbf{Z}^X(\mathbf{N}^X)$  で表す。

この論文では主に  $X$  が有限集合  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  の場合を扱い、そのとき、

関数  $f \in \mathbb{Z}^X$  とベクトル  $\langle f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n) \rangle$  とを同一視する.

有限集合  $X$  に対し,  $X$  の元を有限個 (0 個以上) 並べたものを  $X$  上の列といい,  $X$  上の列の全体を  $X^*$  と表す. 特に  $X$  の元を 0 個並べた列を空列といい, 記号  $\varepsilon$  で表す. 列  $\sigma \in X^*$  に対し,  $\sigma$  中に現れる  $x \in X$  の個数を  $\sigma[x]$  と表す. さらに,  $\tau \in X^*$  が任意の  $x \in X$  に対して  $\sigma[x] = \tau[x]$  を満たすとき,  $\tau$  は  $\sigma$  の置き換えであるという.

形式的には, ベトリネット  $N$  は, 3 つ組  $(P, T, A)$  で,  $P$  はプレース (place) の有限集合  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ ,  $T$  は遷移 (transition) の有限集合  $\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ ,  $N \subseteq P \times T \cup T \times P$  はアークの集合である. さらに, 任意のプレース  $p \in P$  と遷移  $t \in T$  に対し  $\{(p, t), (t, p)\} \models A$  とする. (すなわち, 各プレースと各遷移との間を結ぶアークは高々 1 本で多重アークは許さないものとし, プレース  $p$  と遷移  $t$  を相互に結んだループ  $\{(p, t), (t, p)\}$  も含まないものとする.)

ベトリネット  $N = (P, T, A)$  の節点  $v \in P \cup T$  に対し  $v$  へのアークを持つ節点の集合を  $A(v) = \{u \mid (v, u) \in A\}$  と,  $v$  からのアークを持つ節点の集合を  $A^{-1}(v) = \{u \mid (u, v) \in A\}$  と定義する. また, 遷移  $t \in T$  に対し, ベクトル  $\bar{t} \in \mathbb{Z}^P$  を, 各  $p \in P$  に対し

$$\bar{t}(p) = \begin{cases} 1 & \text{if } p \in A(t) \\ -1 & \text{if } p \in A^{-1}(t) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義する.  $N$  はループを持たないので,  $A(t) \cap A^{-1}(t) = \emptyset$  であり,  $\bar{t}$  は  $t$  の発火によるマーキングの変化を表す.

ベトリネット  $N$  のマーキングは  $\mathbb{N}^P$  の元である. マーキング  $M$  において,  $A^{-1}(t)$  中のプレースがすべてトークンを持てば遷移  $t$  は発火可能であり,  $t$  が発火するとマーキングは  $M' = M + \bar{t}$  に変化する. このことを  $M \xrightarrow{t} M'$  と表す. マーキング  $M$  からスタートして, 遷移列  $t_1 t_2 \dots t_k$  を連続的に発火し,  $M \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} M_2 \dots \xrightarrow{t_k} M_k$  となるとき,  $M \xrightarrow{t_1 t_2 \dots t_k} M_k$  と表す. このとき,

$$M_k = M + \sum_{j=1}^k \bar{t}_j \quad (1)$$

が成り立つ。ここで、 $\overline{t_1 t_2 \cdots t_k} = \sum_{j=1}^k \bar{t}_j$  と定義すれば、(1)式は  $M_k = M + \overline{t_1 t_2 \cdots t_k}$  と表すことができる。

ペトリネット  $N$  と初期マーキングと呼ばれる  $N$  のマーキング  $M_0$  の対  $(N, M_0)$  をマーク付きペトリネットと呼ぶ。マーク付きペトリネット  $(N, M_0)$  に対し、初期マーキング  $M_0$  から到達可能なマーキングの集合

$$R(N, M_0) = \{M \mid M_0 \xrightarrow{g} M \text{ for some } g \in T^*\}$$

を  $(N, M_0)$  の可達集合という。また、可達マーキングを遷移関係  $\xrightarrow{t}$  で結んだグラフ  $(R(N, M_0), (\xrightarrow{t})_{t \in T})$  を  $(N, M_0)$  の可達グラフという。

一般に  $\sigma \in T^*$  に対し、 $M \xrightarrow{\sigma} M'$  ならば、(1)式より

$$M' = M + \sum_{t \in T} \sigma[t] \bar{t} \quad (2)$$

が成り立つ。さらに  $\tau$  が  $\sigma$  の置き換えでかつ  $M$  で発火可能ならば、 $M \xrightarrow{\tau} M'$  である。言いかえると、互いに置き換えである遷移列は、共に発火可能であれば発火によってマーキングに与える変化は等しい。遷移列  $\sigma$  はその置き換えの1つが発火可能であるとき、置換発火可能であるという。しかし、(2)式が遷移列  $\sigma$  に対して成り立つからといって、 $\sigma$  が  $M$  で発火可能であるとは限らないし、置換発火可能でない、すなわち  $\sigma$  のどの置き換えも発火可能でない、ということもありうる。

### 3 プレスバーガー算術と準線形集合

$X$  を有限集合とする集合  $R \subseteq \mathbf{N}^X$  が線形 (linear) であるというのは、有限個のベクトル  $f_0, f_1, \dots, f_m \in \mathbf{N}^X$  が存在して、 $R = \{f_0 + i_1 f_1 + \cdots + i_m f_m \mid i_1, \dots, i_m \in \mathbf{N}\}$  と表されるときである。集合  $R$  が準線形 (semilinear) であるというのは、 $R$  が有限個の線形集合の和集合で表されるときである。

プレスバーガー算術 (Presburger arithmetic) とは整数集合  $\mathbf{Z}$  上の1階述語論理体系で、原始論理式が  $x+y=z, x \leq y, x=i$  の形の式に限られるものをいう。

ここで、 $x, y, z$  は整数上を動く変数で  $i$  は整数定数である。このとき、 $\{x_1, x_2,$

$\dots, x_n\}$  を自由変数に持つプレスバーガー算術の式  $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  に対し, 集合  $\{\langle i_1, i_2, \dots, i_n \rangle \in \mathbb{N}^n \mid \phi(\langle i_1, i_2, \dots, i_n \rangle)\}$  は準線形集合であり, したがって, プレスバーガー算術における多くの問題は決定可能である [4].

2つのベクトル  $I = \langle i_1, i_2, \dots, i_n \rangle$  と  $J = \langle j_1, j_2, \dots, j_n \rangle$  に対し,  $I = J$  で, プレスバーガー式  $\bigwedge_{k=1}^n i_k = j_k$  を表すものとする. このとき, ペトリネットに関する基本的な述語は以下のようにプレスバーガー式で記述できる.

1. 遷移  $t$  はマーキング  $M$  で発火可能である:  $\bigwedge_{p \in A^{-1}(t)} M(p) > 0$
2.  $M$  で  $t$  を発火した結果  $M'$  になる:  $M' = M + \bar{t}$
3.  $M$  はデッドロックである:  $\bigwedge_{t \in T} (\bigvee_{p \in A^{-1}(t)} M(p) = 0)$
4. 適当な遷移列が存在して式(2)が成り立つ:

$$\exists y_1 \exists y_2 \cdots \exists y_m M' = M + y_1 \bar{t}_1 + y_2 \bar{t}_2 + \cdots + y_m \bar{t}_m$$

したがって, ペトリネット  $(N, M_0)$  の可達集合  $R(N, M_0)$  を表す式は, 次の条件を満たす論理式  $\phi(M)$  として定義できる.

1.  $\phi(M_0)$
2.  $\bigwedge_{t \in T} ((\phi(M) \wedge (\bigwedge_{p \in A^{-1}(t)} M(p) > 0)) \rightarrow \phi(M + \bar{t}))$

しかし, 可達集合  $R(N, M_0)$  を直接プレスバーガー式で定義することはできず, 一般に  $R(N, M_0)$  は準線形集合にはならない. そのため, 可達性のプレスバーガー表現可能性を成り立たせるさまざまな十分条件が従来研究されてきた. その多くの場合, (2)式が, 可達性の必要十分条件になっている.

次節では, (2)式が可達性の必要条件であるだけでなく, 十分条件でもあるための条件について調べる.

#### 4 可達集合のプレスバーガー表現可能性

前節で述べたように(2)式が適当な遷移列に対して成り立つことが, 可達性の

必要十分条件になれば, 可達集合はプレスバーガー算術で表現可能である. 本節ではそのための条件について調べる.

まず, 以下の議論で重要な役割を果たす, サイフォンについて定義する. プレースの非空集合  $S \subseteq P$  がサイフォン (siphon) であるというのは,  $A^{-1}(S) \subseteq A(S)$  が成り立つときである. 今, マーキング  $M$  において, サイフォン中のどのプレースもトークンを持たない無トークンサイフォン  $S$  があったとしよう.  $M$  では,  $A(S)$  中のどの遷移も発火可能でない. 一方, サイフォン  $S$  中のプレースにトークンが追加されるのは,  $A^{-1}(S)$  中の遷移が発火されるときであるから,  $M$  から到達可能ななどのマーキングでも,  $S$  はトークンを持たず  $A(S)$  中の遷移は発火可能にならない.

遷移列  $\sigma \in T^*$  に対し,  $\sigma$  に現れる遷移の集合を  $[\sigma]$  で表し, プレース集合  $A^{-1}([\sigma])$  と遷移集合  $[\sigma]$  からなる  $N$  の部分ネットを  $N_\sigma$  と書く. あきらかに  $(N, M)$  における  $\sigma$  の発火可能性は,  $\sigma$  に関係する  $N$  の部分ネット  $(N_\sigma, M)$  での発火可能性に一致する.

今, (2)式が成り立つにも関わらず, 遷移列  $\sigma$  が置換発火可能でないとする. これは,  $\sigma$  中の遷移をどのような順番で発火していても, いつかは, 残っている遷移列  $\tau$  中のどの遷移も発火可能でない状況に陥ることを意味する. この状態では,  $N_\tau$  のどの遷移も発火可能でないデッドロックになっている.

今, ペトリネット  $N=(P, T, A)$  がマーキング  $M$  でデッドロックであるとしよう.  $M$  でトークンを持たないプレースの集合を  $S$  とすると, どの遷移も発火可能でないことから  $A(S)=T$  が成り立ち,  $S$  は無トークンサイフォンである. したがって, 次の定理が成り立つ.

**定理 1** デッドロックは無トークンサイフォンを持つ.

今,  $(N, M)$  における遷移列  $\sigma$  の置換発火可能性を調べるものとしよう. 上の定理から, 無トークンサイフォンを作らなければ, 常に発火可能な遷移が見つかり,  $\sigma$  の適当な置き換えを発火できることがわかる.

そこで  $\sigma$  中の遷移  $t$  の発火を 3 種類に分類する. ただし,  $\sigma$  から  $t$  を除いた残りの遷移列を  $\tau$  とする.

**タイプ1**  $t$  の発火によって  $N$  の無トークンサイフォンを作らない。

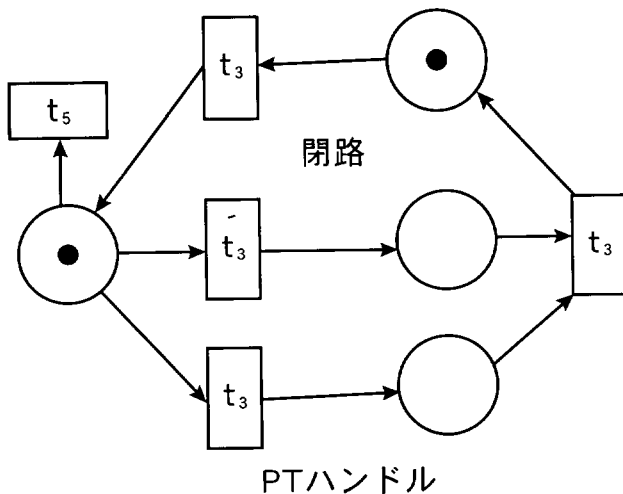
**タイプ2**  $t$  の発火によって、残りの遷移列  $\tau$  には無関係な  $N$  の無トークンサイフォンを作る

**タイプ3** 発火によって残りの遷移列  $\tau$  に関係する  $N_\tau$  の無トークンサイフォンを作る

上に述べた議論により、タイプ3の発火は、致命的であり、 $\tau$ の置換発火可能性をなくしてしまう。では、常にタイプ1およびタイプ2の発火を選んでいけばよいかというと、以下の例に示すように必ずしも、そうとは限らない。タイプ1の発火が後にタイプ3の発火を余儀なくさせることが起こりうるのである。実際、図3に示したマークつきベトリネットでは、遷移列  $t_4t_1t_2t_3t_4t_5$  が発火可能であり、かつ遷移  $t_5$  の発火がタイプ1であるにも関わらず、 $t_5$  を発火した後のマーキングでは残りの遷移列  $t_4t_1t_2t_3t_4$  は置換発火可能でなくなる。このように、与えられた遷移列が、与えられたマーキングから置換発火可能か否か、というのは一般的には難しい問題である。

構造的にすべての遷移（の発火）がタイプ1であることが保障されているベトリネットには、閉路を持たないベトリネットである acyclic Petri nets, すべてのプレースが高々1個の入力遷移と出力遷移しか持たない marked graphs [2], 競合する遷移対を持たない conflict-free nets [3], すべての閉路が閉路中のトークン数を0にする遷移を持たない normal Petri nets [9], などがある。また、構造的にすべての遷移（の発火）がタイプ2であることが保障されているベトリネットに、すべてのサイフォンが単純な閉路からなる siphon-circuit nets [5, 6] がある。これらのベトリネットでは、可達集合はプレスバーガー算術で表現可能であり、準線形集合になる。

筆者らは最近、PT ハンドルを持たないベトリネットでは、うまく発火遷移を選んで、常にタイプ2の発火が保障されるような発火列が存在することの証明を与えた [8]。ここで、PT ハンドルというのは、ベトリネット中の閉路に対するバイパスで、プレースから分かれて遷移で合流するものをいう。

図3 PT ハンドルを持つペトリネット  $N_3$ 

以下の定理が成り立つ。

**定理 2** PT ハンドルを持たないペトリネット  $N=(P, T, A)$  において、遷移列  $\sigma \in T^*$  がマーキング  $M$  で置換発火可能である必要十分条件は  $M + \bar{\sigma} \in \mathbb{N}^P$  かつ  $(N_\sigma, M)$  が無トークンサイフォンを含まないことである。

$N_\sigma$  のサイフォンは  $A^{-1}(S) \cap [\sigma] \subseteq A(S) \cap [\sigma]$  を満たすプレースの非空集合であるから、 $(N_\sigma, M)$  が無トークンサイフォンを持たないという条件は、プレスバーガー式

$$\bigwedge_{\{S \neq \emptyset \mid A^{-1}(S) \cap [\sigma] \subseteq A(S) \cap [\sigma]\}} \bigvee_{p \in S} M(p) > 0$$

で表現できる。

したがって、PT ハンドルを持たないペトリネットで、 $M'$  が  $M$  から到達可能であるという条件は次のプレスバーガー式で表現できる。

$$\begin{aligned}
& \exists y_1 \exists y_2 \cdots \exists y_m \quad \bigvee_{U \subseteq T} (\bigwedge_{t_i \in U} y_i > 0) \wedge (\bigwedge_{t_i \in U} y_i = 0) \\
& \quad \wedge \bigwedge_{\{S \neq \emptyset \mid A^{-1}(S) \cap U \subseteq A(S) \cap U\}} \bigvee_{p \in S} M(p) > 0 \\
& \quad \wedge M' = M + y_1 \bar{t}_1 + y_2 \bar{t}_2 + \cdots + y_m \bar{t}_m
\end{aligned}$$

**定理 3** PT ハンドルを持たないマークつきベトリネット  $(N, M_0)$  の可達集合はプレスバーガー算術で表現可能であり，準線形集合である。

### 参考文献

- [1] W.M.P. van der Aalst, K.M. van Hee, and G.J. Houben. Modelling workflow management systems with high-level Petri nets. In G. De Michelis, C. Ellis, and G. Memmi, editors, Proc. of the second Workshop on Computer-Supported Cooperative Work (1994) 31–50.
- [2] F. Commoner and A.W. Holt, Marked Directed Graphs, JCSS 5 (1971) 511–523.
- [3] L.H. Landweber and E.L. Robertson, Properties of conflict-free and persistent Petri nets, JACM 25 (1978) 352–364.
- [4] S. Ginsburg and E.H. Spanier, Semigroups, Presburger formulas and languages, Pacific J. Math. 16 (1966) 285–296.
- [5] K. Hiraishi and A. Ichikawa, A class of Petri nets that a necessary and sufficient condition of reachability is obtainable, Trans. SICE 24, 6 (1988) 635–640.
- [6] T. Murata, Petri Nets: Properties, analysis and applications, Procs. IEEE 77, 4 (1989) 541–580.
- [7] 村田忠夫, ベトリネットの解析と応用, 近代科学社 (1992).
- [8] H. Yamasaki, J.S. Huang and T. Murata, Reachability analysis of Petri Nets via Structural and Behavioural Classifications of Transitions, Petri Net Newsletters 60 (2001) 5–21.
- [9] H. Yamasaki, Normal Petri nets, TCS 31 (1984) 307–315.

(一橋大学大学院商学研究科教授)