

一様有界な確率変数列のランダム和及び 停止時間に対する大偏差原理*

式 見 拓 仙

1 はじめに

$X_1, X_2, \dots$ を平均 μ , 分散 $\sigma^2 \in (0, \infty)$ をもつ独立かつ同一分布に従う確率変数列とし, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ をその部分和とする. 一方, $\tau(k), k=1, 2, \dots$ をランダムタイムの列とする. ただし, 各 $\tau(k)$ のとりうる値は $1, 2, \dots, \infty$ であるとする. このとき $S_{\tau(k)}$ に対し, X_1 のモーメントの存在や $\tau(k)$ に関する適当な仮定の下で, 大数の法則, 中心極限定理, 重複対数の法則などの様々なヴァリエーションが成り立つことはよく知られている (例えば, Gut (1988), Woodroffe (1982)). 一方, $S_{\tau(k)}/k$ に対する大偏差原理が成り立つための条件については, あまりよく知られていない. 本稿では $S_{\tau(k)}/k$ および $\tau(k)/k$ に対して大偏差原理が成り立つ条件を中心に, $S_{\tau(k)}, \tau(k)$ に対する大偏差確率について考察する. 特に, $\mu > 0$ をおよび X_1 に有界性を仮定し, ある種の停止時間に関して $S_{\tau(k)}/k, k=1, 2, \dots$ の大偏差原理が Cramér の定理の系として容易に導かれることを示す. もとより, これは更なる一般的な結果を得るための, 種々の具体的仮定の下での予備考察の一段階といえるものであり, 今後より有用な形の定式を模索していく必要がある. $\tau(k)/k, k=1, 2, \dots$ の大偏差原理も同様に証明することができる.

まず初めに大偏差原理について簡単な説明をしておく. $X_1, X_2, \dots$ を平均 μ , 分散 $\sigma^2 \in (0, \infty)$ をもつ独立かつ同一分布に従う確率変数列とし, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ をその部分和とする. このとき, 周知の如く大数の強法則

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow \mu \text{ a.s.,}$$

及び, 中心極限定理

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - \mu \in \frac{\sigma}{\sqrt{n}}[a, b]\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-y^2/2} dy \quad (1.1)$$

が成り立つ。中心極限定理が標本平均の真の平均からの“小さな”ずれについての法則であるのに対し、大偏差原理 (large deviation principle) は“大きな”ずれについての法則である。ここで、“小さな”や“大きな”という言葉の意味は、中心極限定理が平均からの $1/\sqrt{n}$ のオーダーのずれ (small deviation, normal deviation) を問題にするのに対し、大偏差原理は 1 のオーダーのずれ (large deviation) を分析対象とするという意味である。(1.1)に則して言えば、大偏差原理は a, b が $\sqrt{n}$ のオーダーで増大するときの左辺の確率の漸近的挙動を問うものである、ということができる。このように中心極限定理が標本平均が平均まわりに集中する確率を計算するのに対し、大偏差原理は真の平均から大きくずれる事象の確率、言わば分布の裾の状況を問題にし、ここに中心極限定理で記述可能な領域を越えた漸近法則が開けてくる。例えば、次の大偏差確率

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right), a > \mu$$

を考えてみよう。この確率は大数の法則より 0 に収束する。そこで $n \rightarrow \infty$ とするときのこの収束の速さが問題となる。実際、適当な条件下で

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-nI(a)}.$$

また

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) = -I(a)$$

が成り立つ。ここで I は

$$I(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}} [tx - \log \mathbb{E} e^{tX_1}] \quad (1.2)$$

であり、 X_1 の分布の Fenchel-Legendre 変換とよばれる凸関数である。 I が上記の大偏差確率の指数的減衰の速さを表している。一般に rate 関数を特定化することが主要な目的の一つとなる。

ここで後の考察のために Donsker-Varadhan による大偏差原理の定義及び Cramér の定理を述べておくことにしよう。詳細は例えば Dembo and Zeitouni (1998) が参考になる。

$\mathcal{X}$ をポーランド空間 (完備可分距離空間) とする。 $\mathcal{X}$ 上の関数 $I: \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$

に対し, 任意の $\alpha \in [0, \infty)$ に対して $\{x \in \mathcal{X} : I(x) \leq \alpha\}$ が $\mathcal{X}$ のコンパクト部分集合であるとき I を rate 関数という. 従って, rate 関数は下半連続である. (X_n) を $\mathcal{X}$ に値をとる確率変数列とする. (X_n) に対し, 次の性質が満たされるとき, (X_n) は rate 関数 I をもつ大偏差原理を満たすという:

(a) 任意の開集合 $F \subset \mathcal{X}$ に対し

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(X_n \in F) \leq -\inf_{x \in F} I(x).$$

(b) 任意の開集合 $G \subset \mathcal{X}$ に対し

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(X_n \in G) \geq -\inf_{x \in G} I(x).$$

(X_n) が大偏差原理を満たすとき, その rate 関数は一意的である. この rate 関数を特定化することが, 大偏差原理を示すにあたって, 主要な目的の一つとなる.

$X_1, X_2, \dots$ を独立かつ同一分布をもつ実確率変数列とし, I を (1.2) によって定義される関数とする. もし 0 が $\{t \in \mathbb{R} : \mathbb{E} e^{tX_1} < \infty\}$ の内点ならば, I は rate 関数となり, S_n/n は rate 関数 I をもつ大偏差原理を満たす, というのが Cramér の定理である. Cramér の定理は $X_1, X_2, \dots$ が確率ベクトル列である場合にも成り立ち, さらにポーランド空間に値をとる確率変数列にまで拡張することができる.

2 $S_{\tau(k)}/k, \tau(k)/k$ に対する大偏差原理

以下, $X, X_1, X_2, \dots$ を独立かつ同一分布に従う可積分確率変数列とし, $\mu = \mathbb{E}X$, $\sigma^2 = \text{Var}X \in (0, \infty)$ とおく. $S_n = X_1 + \dots + X_n$ をその部分和とする. さらに $\tau(k)$, $k=1, 2, \dots$ を $1, 2, \dots, \infty$ に値をとるランダムタイムとする. この節では, これらの前提のもとで $S_{\tau(k)}/k$, $k=1, 2, \dots$ が大偏差原理を満たす条件について考察する.

まず初めに $X_1, X_2, \dots$ と $\tau(k)$, $k=1, 2, \dots$ が独立であると仮定してみよう. もし X のモーメント母関数 $M(t)$ が有限で

$$\Lambda(\lambda) = \lim_{k \rightarrow \infty} \log \mathbb{E} e^{\lambda \tau(k)}$$

が存在し, かつ 0 が $\{\lambda : \Lambda(\lambda) < \infty\}$ の内点ならば, $S_{\tau(k)}/k$ が大偏差原理を満たすことが知られている. この場合の rate 関数は $\Lambda \circ M$ の Fenchel-Legendre 変換である (c.f. Dembo and Zeitouni (1998), Exercise 2.3.19). しかし, $X_1, X_2, \dots$

と $\tau(k)$, $k=1,2,\dots$ の独立性を仮定するということは事実上, 各 $\tau(k)$ は $X_1, X_2, \dots$ に関する停止時間でないことを意味する. 実際, もし τ が $X_1, X_2, \dots$ に関する停止時間で, $X_1, X_2, \dots$ と独立ならば τ は確率1で定数である. しかし, 一般にランダムタイムは応用上何らかの情報増大系に関する停止時間である場合がほとんどであり, その意味で上記の結果の意味するところはあまり大きくはない. 次に, 各 $\tau(k)$ が $X_1, X_2, \dots$ に関する停止時間, すなわち, 任意の $n \geq 1$ に対して $\{\tau(k)=n\} \in \sigma(X_1, \dots, X_n)$ であるとしよう. ここで, $\sigma(X_1, \dots, X_n)$ は $X_1, \dots, X_n$ によって生成される最小の σ -代数である. もとより, 単にこれだけの仮定では $\tau(k)=k$ のケースを除いて $S_{\tau(k)}/k$ の大偏差原理を導出することはできないと思われる. そこで, われわれはより具体的な条件のもとで議論を進めることにする. 次の仮定を置く:

仮定-1 $\mu > 0$.

仮定-2 $\exists c > 0, \mathbb{P}(|X| \leq c) = 1$ とし,

仮定-3 $\tau(k)$ を

$$\tau(k) = \inf \{n \geq 1 : S_n > ck\}, \quad k=1,2,\dots \quad (2.1)$$

と定義する. 仮定-2, 仮定-3 なる仮定を設けた理由は $\exists k, \tau(k) = \tau(k+1)$ という状況を排除するためである. すなわち, S_n が境界を“二段越え”しないようにしているのである. このことによって, $S_{\tau(k)}$ および $\tau(k)$ を独立かつ同一分布に従う確率変数の和として表すことができることを最後の節の証明にて明らかにする.

$S_{\tau(k)}$, $\tau(k)$ に関する古典的結果のうち大数の法則と中心極限定理を以下に述べておく:

$$\begin{aligned} \frac{\tau(k)}{k} &\rightarrow \frac{c}{\mu} \text{ a.s.}, \\ \frac{S_{\tau(k)}}{k} &\rightarrow 1 \text{ a.s.} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$\tau(k)$ に対する中心極限定理として次の結果が挙げられる.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\tau(k) - \frac{ck}{\mu} \leq x \sqrt{c\sigma^2 t / \mu^3} \right) = \Phi(x).$$

また $\exists t_0 > 0, \forall |t| < t_0, \mathbb{E} e^{t\tau(k)} < \infty$ が成り立ち, 特に $\forall k \geq 1, \mathbb{E} (\tau(k))^r < \infty$,

$r \geq 1$ であることもわかる. これらの結果の証明は Gut (1988) を参照のこと.

$\sigma = \sigma(1) = \tau(1)$, $\phi(t) = \mathbb{E} \exp \{tS_\sigma\}$ とおく.

定理2.1 $X, X_1, X_2, \dots$ を 仮定-1, 仮定-2 を満たす確率変数列とし, $\tau(k), k = 1, 2, \dots$ を (2.1) によって定義される (X_n) -停止時間とする. このとき,

$$I(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}} [tx - \log \phi(t)]$$

は rate 関数であり, $S_{\tau(k)}/k, k = 1, 2, \dots$ は I を rate 関数とする大偏差原理を満たす, すなわち

(a) 任意の閉集合 $F \subset \mathbb{R}$ に対し

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \mathbb{P} \left(\frac{S_{\tau(k)}}{k} \in F \right) \leq -\inf_{x \in F} I(x).$$

(b) 任意の開集合 $G \subset \mathbb{R}$ に対し

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \mathbb{P} \left(\frac{S_{\tau(k)}}{k} \in G \right) \geq -\inf_{x \in G} I(x).$$

系2.2 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \mathbb{P} \left(\frac{S_{\tau(k)}}{k} \geq x \right) = -\inf_{y \geq x} I(y).$$

$Y_1, Y_2, \dots$ を d -次元確率変数列とし, Y_n/n は大偏差原理を満たすと仮定する. 停止時間を $T_k(A) = \inf \{n \geq 1 : Y_n \in kA\}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ と定義する. これらの仮定のもとで Collamore (1998) は $T_k(A)/k$ が大偏差原理を満たすことを証明した. しかし, (2.1) で定義された $\tau(k)$ の場合, $\tau(k)/k, k = 1, 2, \dots$ が大偏差原理を満たすことはより容易に証明することができる.

$\phi(t) = \mathbb{E} e^{t\sigma}$ とおく.

定理2.3 $X, X_1, X_2, \dots$ を 仮定-1, 仮定-2 を満たす確率変数列とし, $\tau(k), k = 1, 2, \dots$ を (2.1) によって定義される (X_n) -停止時間とする. このとき

$$J(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}} [tx - \log \phi(t)]$$

は rate 関数であり, $\tau(k)/k, k = 1, 2, \dots$ は J を rate 関数とする大偏差原理を満たす, すなわち

(a) 任意の閉集合 $F \subset \mathbb{R}$ に対し

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \mathbb{P} \left(\frac{\tau(k)}{k} \in F \right) \leq -\inf_{x \in F} J(x).$$

(b) 任意の開集合 $G \subset \mathbb{R}$ に対し

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \mathbb{P} \left(\frac{\tau(k)}{k} \in G \right) \leq -\inf_{x \in G} J(x).$$

3 簡単な応用

定理2.1, 定理2.3の系を述べ、加えて簡単な応用例を与える。

系3.1 定理2.1の仮定のもとで

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \mathbb{P} \left(\frac{S_{\tau(k)}}{k} \geq a \right) = -\inf_{x \geq a} I(x).$$

特に $a > \mathbb{E}S_\sigma$ に対しては

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \mathbb{P} \left(\frac{S_{\tau(k)}}{k} \geq a \right) = -I(a).$$

が成り立つ。

系3.2 定理2.3の仮定のもとで

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \mathbb{P} \left(\frac{\tau(k)}{k} \geq a \right) = -\inf_{x \geq a} J(x).$$

特に $a > \mathbb{E}\sigma$ に対しては

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \mathbb{P} \left(\frac{\tau(k)}{k} \geq a \right) = -J(a).$$

が成り立つ。

例3.3 $X_1, X_2, \dots$ を各確率変数が平均 $p \in (0, 1)$ のベルヌーイ分布に従う独立な確率変数列である場合を考えてみる。 $\mathbb{E}X_1 = p > 0$, $|X_1| \leq c = 1$ である。この場合 $\tau(k)$ は

$$\tau(k) = \inf \{n \geq 1 : S_n = k + 1\}$$

と書け、 $S_{\tau(k)}$ は定数となる。そこで $\tau(k)/k$ の大偏差確率について調べてみることにする。まず初めに σ の分布を求める。一般に停止時間の分布を求めることは困難であるが、この場合は容易である。 σ の定義は

$$\sigma = \inf \{n \geq 1 : S_n = 2\}$$

であるから、 σ の分布は

$$\mathbb{P}(\sigma = n) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}, n = 1, 2, \dots$$

与えられる。 $\sigma - 2$ はパラメータ $(p, 2)$ の負の二項分布に従うので、 σ のラプラス変換は

$$\mathbb{E}e^{t\sigma} = \left[\frac{pe^t}{1-e^t(1-p)} \right]^2, t < -\log(1-p). \quad (3.3)$$

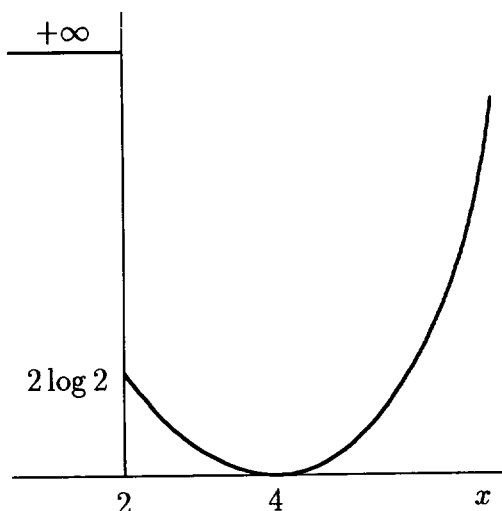
もちろん、(3.3)は直接 σ の分布からも容易に求められる。(3.3)より σ の Fen-

chel-Legendre 変換 $J(x) = \sup_{t < -\log(1-p)} [tx - \log \mathbb{E} e^{t\alpha}]$ は簡単な計算により

$$J(x) = \begin{cases} (x-2) \log \left[\frac{x-2}{x(1-p)} \right] + 2 \log \frac{2}{x} - 2 \log p & x \geq 2, \\ \infty & x < 2 \end{cases} \quad (3.4)$$

であることがわかる (図1参照). 定理2.3より $\tau(k)/k$ は(3.4)を rate 関数とする大偏差原理を満たす.

図1: $p = 1/2$ の場合の J



例3.4 $X_1, X_2, \dots$ を各確率変数が $[0, 1]$ 上の一様分布に従う独立な確率変数であるとする. $\mathbb{E} X_1 = 1/2$, $|X_1| \leq c = 1$ である. この例の場合 $\tau(k)$, σ はそれぞれ

$$\tau(k) = \inf \{n \geq 1 : S_n > k\}, \sigma = \tau(1)$$

であり, 定理2.1より $S_{\tau(k)}/k$ は $I(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}} [tx - \log \mathbb{E} \exp \{tS_n\}]$ を rate 関数とする大偏差原理に従う. ただし, $\mathbb{E} \exp \{tS_n\}$ を厳密に計算する困難であり, 従って, この rate 関数の具体的な形を求めることも困難である. 一方, σ の分布は

$$\mathbb{P}(\sigma = n) = \frac{n-1}{n!}, n = 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

であり, σ のラプラス変換を計算すると

$$\mathbb{E}e^{\sigma t} = 1 - \exp[\underbrace{\exp t}_{\text{exp} t}] + \exp[\exp t + 1], \quad t \in \mathbb{R}.$$

これより σ の Fenchel-Legendre 変換を次のように求めることができる.

$$J(x) = \begin{cases} t(x)x - \log\{1 - \exp[\exp t(x)] + \exp[\exp t(x) + 1]\} & x \geq 0, \\ \infty & x < 0 \end{cases}$$

ただし $t(x)$ は, $u = ve^v (u, v > 0)$ を満たす v を $l(u)$ とおいて次のように定義される値である.

$$l(x) = \log[1 + x - xe^{-1} + l(\exp(-e^{-1}(e-1)x - 2)x)].$$

さらに (3.5) 及び Wald's identity より $\mathbb{E}\sigma = e = 2 \mathbb{E}S\sigma$ であるから, (3.1), (3.2) がそれぞれ $a > e/2, a > e$ に対して成り立つ.

4 マルチンゲール差

独立な確率変数列の和に関する指数型不等式は, Hoeffding (1963), Bennett (1962) などによる研究がある. この節ではその一般化であるマルチンゲールの大偏差確率に対する三通りのタイプの指数型不等式を紹介する.

$Y_1, Y_2, \dots$ を σ -代数の増大列 $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots$ に関するマルチンゲール差列とし, $(Y_n, \mathcal{F}_n; n \geq 1)$ で表す. すなわち, $\forall n \geq 1, \mathbb{E}|Y_n| < \infty, Y_n$ は $\mathcal{F}_n$ -可測で $\mathbb{E}(Y_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0$. ただし, $\mathcal{F}_0$ は自明な σ -代数である. また, 単に $Y_1, Y_2, \dots$ がマルチンゲール差列であるという場合は, $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ であるとする. このマルチンゲール差列の定義に従えば $\mathbb{E}Y_n = 0, n = 1, 2, \dots$ となる. $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$ とし, 大偏差確率 $\mathbb{P}(S_n > nx), x > 0$ について考える. $i \leq j$ に対し $\mathbb{E}Y_i Y_j = \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y_i Y_j | \mathcal{F}_i)] = \mathbb{E}[Y_i \mathbb{E}(Y_j | \mathcal{F}_i)] = 0$ であるから, $Y_1, Y_2, \dots$ は無相関である. よって, もし $\sup_n \mathbb{E}Y_n^2 < \infty$ ならば, 大数の法則より

$$\mathbb{P}(S_n > nx) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (4.1)$$

である. この収束 (4.1) の速さを論ずるにあたって, 通常, 次の三通りの条件のうちいずれかを仮定して議論することが多い:

C-1 Y_i の有界性.

C-2 Y_i の絶対モーメントに関する条件.

C-3 Y_i の指数モーメントに関する条件.

C-1 のもとで成り立つ大偏差不等式については, Hoeffding 型の不等式と Bennett 型の不等式がある.

定理4.1 (Azuma) $Y_1, \dots, Y_n$ をマルチンゲール差列とし, $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$ とする. もし, $a_i \leq Y_i \leq b_i$ ならば, 任意の $x > 0$ に対し

$$\mathbb{P}(S_n > nx) \leq \exp\left(-\frac{2n^2 x^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right). \quad (4.2)$$

この不等式は Hoeffding (1963) によって初めて, 独立な確率変数列のケースについて証明されたが, マルチンゲール差へ一般化された上記の不等式は Azuma の不等式と呼ばれている. Laib (1999) は Azuma の不等式が, 若干緩やかな仮定のもとで, S_n を $\max_{1 \leq i \leq n} S_i$ に置き換えても成り立つことを示している.

次の不等式は Bennett 型不等式の一つである.

定理4.2 $Y_1, \dots, Y_n$ をマルチンゲール差列とする. もし, $Y_i \leq 1$ で $\mathbb{E}(Y_i^2 \mid S_{i-1}) \leq v$ となる $v > 0$ が存在するならば, 任意の $x > 0$ に対し

$$\mathbb{P}(S_n > nx) \leq \exp\left[-nH\left(\frac{x+v}{1+v} \mid \frac{v}{1+v}\right)\right] \quad (4.3)$$

ここで H は $p, q \in [0, 1]$ のとき $H(p \mid q) = p \log(p/q) + (1-p) \log[(1-p)/(1-q)]$ で, それ以外は ∞ となる関数である.

C-2 の条件のもとでなりたつ大偏差不等式として, 次の Bernstein の不等式が有名である. まず, 独立な確率変数列のケースについて記しておく.

定理4.3 独立な確率変数列 $Y_1, \dots, Y_n$ が $\mathbb{E} Y_i = 0$, $\sigma_i^2 = \mathbb{E} Y_i^2$, $s_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 > 0$ を満たすとする. さらに

$$\mathbb{E} |Y_i|^k \leq \frac{k!}{2} \sigma_i^2 c^{k-2}, \quad k > 2, \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.4)$$

を満たす $c \in (0, \infty)$ が存在するならば, 任意の $x > 0$ に対し, 次の不等式が成り立つ.

$$\mathbb{P}(S_n > nx) \leq \exp\left[-\frac{n^2 x^2}{2(s_n^2 + cnx)}\right] \quad (4.5)$$

マルチンゲール差に対して, Bernstein の不等式は次のように拡張される (de la Peña (1999)).

定理4.4 $(Y_i, \mathcal{F}_i; 1 \leq i \leq n)$ をマルチンゲール差列とし, $\mathbb{E}(Y_i^2 | \mathcal{F}_{i-1}) = \sigma_i^2$, $V_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ とする. さらに

$$\mathbb{E}(|Y_i|^k | \mathcal{F}_{i-1}) \leq \frac{k!}{2} \sigma_i^2 c^{k-2}, k > 2, 1 \leq i \leq n \quad (4.6)$$

を満たす $c \in (0, \infty)$ が存在するならば, 任意の $x, y > 0$ に対し, 次の不等式が成り立つ.

$$\mathbb{P}(S_n > nx, \exists n, V_n^2 \leq y) \leq \exp \left[-\frac{n^2 x^2}{2(y + cnx)} \right]. \quad (4.7)$$

独立な確率変数列の場合, $y = V_n^2$ とおけば (4.7) は Bernstein の不等式 (4.5) である. また, 条件 (4.4), (4.6) はそれぞれ $\mathbb{P}(|Y_i| \leq c) = 1$, $\mathbb{P}(|Y_i| \leq c | \mathcal{F}_{i-1}) = 1$ ならば, 満たされる. また, (4.2), (4.3), (4.7) で S_n を $|S_n|$ に置き換えても, それぞれの右辺に 2 を掛ければ成り立つ.

C-3 のケースについて, Lesigne and Volný (2001) は次の結果を証明した.

定理4.5 $(Y_n, \mathcal{F}_n; n \geq 1)$ を $\sup_n \mathbb{E} e^{|Y_n|} < \infty$ を満たすマルチンゲール差列とする. このとき,

$$\forall x, \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \mathbb{P}(|S_n| > nx) \leq \exp \left[-\frac{1}{2} (1 - \varepsilon) x^{2/3} n^{1/3} \right].$$

この節ではマルチンゲールの大偏差確率に対する指数上限を与える不等式について述べてきたが, 独立変数列の和やマルチンゲールに対する不等式は非常に多い. それらが多数の法則などの収束の証明やその速さの評価をする上で重要な役割をはたすからである.

この節の最後に前節の $X_1, X_2, \dots$ 及び $\tau(k)$ に対し $S_{\tau(k)} - \tau(k)\mu$, $k = 1, 2, \dots$ がマルチンゲールであることを簡単に示しておく. $X_1, X_2, \dots$ および $\tau(k)$ は定理2.1の仮定を満たすものとする, $\forall k \geq 1$, $\mathbb{E}\tau(k) < \infty$ であるから, Wald's identity より $\forall k \geq 1$, $\mathbb{E}S_{\tau(k)} = \mu \mathbb{E}\tau(k) \in (0, \infty)$ となる. $\mathbb{E}\tau(k) < \infty$ は $n\mathbb{P}(\tau(k) > n) \rightarrow 0$ も含意する. $S_n - n\mu$, $n = 1, 2, \dots$ はマルチンゲールであり,

$$\int_{\tau(k) > n} |S_n - n\mu| d\mathbb{P} \leq \int_{\tau(k) > n} |S_n| d\mathbb{P} + n\mu \mathbb{P}(\tau(k) > n)$$

$$\leq ck \mathbb{P}(\tau(k) > n) + n\mu \mathbb{P}(\tau(k) > n) \rightarrow 0$$

でありから, Doob の任意抽出定理より, $S_{\tau(k)} - \tau(k)\mu$, $k=1,2,\dots$ はマルチンゲールである.

5 証明

定理2.1の証明 証明のトリックは $\tau(k)$ を $\sigma = \sigma(1) = \tau(1)$ のコピーの和で表すということにつける. 停止時間のコピーは一般に次のように構成される: $(X_n)_{n \geq 1}$ を独立かつ同一分布に従う確率変数列とし, T を有限 (X_n) -停止時間とする. このとき, $\mathbb{R}^n$ のボレル集合をベースとする適当なシリンドー集合 $C_n \subset \mathbb{R}^\infty$ が存在して

$$\{T=n\} = \{(X_1, X_2, \dots) \in C_n\}, \quad n=1,2,\dots$$

となる. $T(1)=T$ とし, $T(2)$ を

$$\{T(2)=n\} = \{(X_{T(1)+1}, X_{T(1)+2}, \dots) \in C_n\}$$

によって定義する. 更に

$$\{T(3)=n\} = \{(X_{T(1)+T(2)+1}, X_{T(1)+T(2)+2}, \dots) \in C_n\}$$

とする. 以下, 同様にこの定義を続けて, 独立かつ同一分布に従う確率変数列 $T(k)$, $k \geq 1$ をうる. 各 $T(k)$ は (X_n) -停止時間ではないが, 任意の $k \geq 1$ に対して $T(1) + \dots + T(k)$ は (X_n) -停止時間となる.

さて, われわれの問題に則して, σ のコピーを構成すると以下の通りとなる. $\sigma(k)$, $k \geq 2$ を

$$\sigma(2) = \inf \{n \geq 1 : S_{\sigma(1)+n} > 2c\}, \quad \sigma^{(2)} = \sigma(1) + \sigma(2),$$

$$\sigma(3) = \inf \{n \geq 1 : S_{\sigma(2)+n} > 3c\}, \quad \sigma^{(3)} = \sigma^{(2)} + \sigma(3),$$

.....

$$\sigma(k) = \inf \{n \geq 1 : S_{\sigma(k-1)+n} > kc\}, \quad \sigma^{(k)} = \sigma^{(k-1)} + \sigma(k),$$

$$\sigma(k+1) = \inf \{n \geq 1 : S_{\sigma(k)+n} > (k+1)c\}, \quad \sigma^{(k+1)} = \sigma^{(k)} + \sigma(k+1),$$

.....

によって定義する. 実際,

$$\{\sigma=n\} = \{X_1 \leq c, \dots, X_1 + \dots + X_{n-1} \leq c, \quad X_1 + \dots + X_n > c\}$$

であり, 任意の $k \geq 1$ に対して

$$\{\sigma(k+1)=n\} =$$

$$\{X_{\sigma(k)+1} \leq c, \dots, X_{\sigma(k)+1} + \dots + X_{\sigma(k)+n-1} \leq c, X_{\sigma(k)+1} + \dots + X_{\sigma(k)+n} > c\}$$

であるから, $\sigma(k)$, $k \geq 1$ は σ のコピーである. 従って $\sigma(k)$, $k \geq 1$ は独立な確率変数列で, 各 $\sigma(k)$ の分布は σ と同じ分布をもつ. また, $\mathbb{E}e^{t\sigma}$ は 0 のある近傍で有限であるから, 各 $\sigma(k)$ も同様である. 従って, 特に $\mathbb{E}\sigma(k) < \infty$ である. さらに $\tau(k)$ の定義及び以上のコピーの構成から, 明らかに

$$\tau(k) = \sigma^{(k)} = \sigma(1) + \dots + \sigma(k) \quad (5.1)$$

が成り立つ. かくして $\tau(k)$ を独立かつ同一分布に従う可積分な確率変数列の部分 and として表すことができた.

確率変数列 $Z_1, Z_2, \dots$ を

$$Z_i = X_{\sigma(i-1)+1} + \dots + X_{\sigma(i)}, \quad i = 1, 2, \dots$$

によって定義する. ただし $\sigma^{(0)} = 0$, $\sigma^{(1)} = \sigma(1)$ とする. $Z_1, Z_2, \dots$ は独立で $Z_1 = S_{\sigma}$ と同一分布をもち,

$$S_{\tau(k)} = Z_1 + \dots + Z_k$$

であるから, $S_{\tau(k)}$ は各分布が S_{σ} の分布と同じ独立な確率変数列 $Z_1, Z_2, \dots$ の部分 and として表現できる. $|Z_i| \leq c\sigma(i)$ より, 0 の適当な近傍に属する t に対して

$$\mathbb{E}e^{tZ_i} \leq \mathbb{E}e^{t|Z_i|} \leq \mathbb{E}e^{c|t|\sigma(i)} = \mathbb{E}e^{c|t|\sigma} < \infty$$

が成り立つ. 従って, Cramér の定理より I は rate 関数であり, $S_{\tau(k)}/k$, $k = 1, 2, \dots$ は I を rate 関数とする大偏差原理を満たす.

定理2.3の証明 (5.1) より $\tau(k)$ は独立かつ同一分布の確率変数列の部分 and であり, $\mathbb{E}e^{t\sigma}$ は 0 のある近傍で有限であるから, Cramér の定理より, $\tau(k)/k$, $k = 1, 2, \dots$ は J を rate 関数とする大偏差原理を満たす.

* 本稿は2001年度文部科学省科学研究費補助金(特別研究員奨励費)による研究成果の一部である.

参考文献

- [1] Bennett, G. (1962). Probability inequalities for the sum of independent random variables. *J. Amer. Statist. Assoc.* **57**, 33–45.
- [2] Collamore, J.F. (1998). First passage times of general sequences of random vectors: A large deviations approach. *Stochastic Processes Appl.* **78**, 97–130.
- [3] de la Peña, V.H. (1999). A general class of exponential inequalities for martingales and ratios. *Ann. Probab.* **27**, 537–554.
- [4] Dembo, A. and Zeitouni, O. (1998). *Large Deviations Techniques and Applications*, 2nd ed. Springer-Verlag, New York.
- [5] Gut, A. (1988). *Stopped Random Walks*. Springer-Verlag, New York.
- [6] Hoeffding, W. (1963). Probability inequalities for sums of bounded random variables. *J. Amer. Statist. Assoc.* **58**, 13–20.
- [7] Laib, N. (1999). Exponential-type inequalities for martingale difference sequences. Application to nonparametric regression estimation. *Commun. Statist.-Theory Meth.* **28**, 1565–1576.
- [8] Lesigne, E and Volný, D (2001). Large deviations for martingales. *Stochastic Processes Appl.* **96**, 143–159.
- [9] Woodroffe, M. (1982). *Nonlinear Renewal Theory in Sequential Analysis*. SIAM, Philadelphia, PA.

[2002年2月19日受稿
2002年3月4日レフェリーの審査をへて掲載決定]

(日本学術振興会特別研究員)