マルチンゲール理論に基づくデリバティブの 価格付けと複製ポートフォリオ構築

藤 田 岳 彦

本論説では、「無裁定の考え方」とマルチンゲール理論に基づくデリバティブ価格理論についての解説を行う。第1節で、無裁定について、「現物と先物の無裁定関係」、「プット・コールパリティ」をとりあげ、第2節では、ランダムウォークのマルチンゲール表現定理と離散伊藤公式の応用として、離散モデルにおけるデリバティブ価格理論を述べ、第3節では、確率微分方程式、伊藤解析の応用として、ブラックショールズモデルにおけるデリバティブの価格理論を述べる。また、第3節では、エキゾチックオプションについても言及する。ランダムウォークやブラウン運動の知識を身に付けた大学院修士課程の1年生位にデリバティブ価格理論を概説することを想定しているが、第2節までなら学部生でも理解できるであろう。また、自分の手を実際に動かしながら、理論が理解できるよう数多くの計算できる具体例をだしておいた。本論説の研究論文的部分として、離散伊藤公式、離散ブラック・ショールズ偏差分方程式、離散モデルにおける複製ポートフォリオ構築、ギルサノフの公式の簡単な証明などが挙げられる。それらの部分は新しく、専門家がみても興味があるものと期待される。

1 無裁定とは？

デリバティブとは、株、債券、為替、商品などの原資産をもとに、それから派生 (Derive) した (新しく作られた) 金融商品で、主なものに、先物、オプション、スワップなどがある。さて、そのデリバティブの価格の決まり方であるが、それは「無裁定 (No arbitrage, No free lunch)」「裁定」とは、リスク無く (確率1で) 収益を得ることで、「無裁定」とは、その機会が存在しないこと) を基本的な前提とし理論が組み立てられている。しかし、その考え方は金融論において金融工学成立以前から使われており、金融工学におけるデリバティブの価格理論とは、その無裁定の考え方に新しい数学 (特に、伊藤の確率解析、マルチ

ンゲール理論)をミックスして出来た学問分野といえるだろう。まず、金融理論で以前からあった無裁定をいくつかの例を通してみておこう。

1番目は「先物と現物の無裁定関係」で、先物とは、一番簡単なデリバティブ(デリバティブの一般的定義は後ほど行う。)の一種で、先物買い(ロング)は満期時に受け取る金額(ペイオフという)が S_T を満期時 T における株価とすると $S_T - K$ で定義される契約(条件付請求権)である。もう少し詳しく説明すると、 K は受け渡し価格といわれるもので、「先物買い」契約とは、現時点において、「将来時点 T において、価格 K で株式を購入する」という契約を結ぶものである。オプションと違い、この契約は必ず履行しなければならないので、ペイオフが $S_T - K$ の意味は、 $S_T > K$ のときは、 K で買えて S_T で売れるので、 $S_T - K$ のもうけ、 $S_T < K$ のときは、 S_T で買えるのに、 K で買わなければならないので、 $K - S_T$ の損、つまり、 $S_T - K$ のもうけであることを注意する。

例 1.1 現物と先物の裁定

つぎの2つのポートフォリオを考え、その価値が、満期時にどのような不確実性であろうとも一致することを見る。それにもかかわらず、現在価値が異なれば、安い方を買って、高い方を売れば、リスク無しに収益を得ることになり、裁定機会が存在することになる。よって、現在価値も一致しなければならない。それにより、先物の受け渡し価格 K と株の現物の現在価格 S_0 に次の関係式が成立するのである。

- ・ポートフォリオA 時刻0(現在)で株の現物 S_0 を持つとする。
すると、満期(時刻 T)では、価値 $= S_T$
- ・ポートフォリオB 時刻0で先物契約(受け渡し価格 K での先物買い契約) $+ Ke^{-rT}$ のキャッシュボンド(安全債券、リスク無しに運用できる債券、通常、短期国債を想定)⁰⁾
すると 満期(時刻 T)では、価値 $= (S_T - K) + K = S_T$
(つまり、先物買い契約の価値 $= S_T - K$
キャッシュボンドの価値 $= Ke^{-rT}e^{rT} = K$)

このように未来の時点 T での価値はポートフォリオ A とポートフォリオ B の両方ともどのような不確実性があろうとも S_T である。よって、無裁定の仮定より、時刻 0 において、

$$S_0 = Ke^{-rT}$$

つまり、先物の受け渡し価格

$$K = S_0 e^{rT}$$

となる。また、以上は先物契約の価値 $= 0$ 、つまり、先物契約時にはお金のやりとりはおこなわれないとするときであったのだが、先物契約の価値 $= f$ (先物契約時に f を支払うこと) のときは、

$$S_0 = f + Ke^{-rT}$$

の関係式が得られることに注意しておく。

例 1.2 プット・コールパリティ

次にコールオプション価格とプットオプション価格の間に成立する関係式を求める。まず、コールオプションとは、先物買い契約に「契約を履行しなくともよい」という付帯条件 (オプション) を付けた契約で、そのペイオフは $\max(S_T - K, 0)$ である。ペイオフが $S_T - K$ の意味は、 $S_T > K$ のときは、 K で買って S_T で売れるので、 $S_T - K$ のもうけ、 $S_T < K$ のときは、契約を履行すると損になり契約を履行しないので、お金のやりとりは 0 である。同様にプットオプションは先物売り契約に「契約を履行しなくともよい」と言う付帯条件をつけた契約で、そのペイオフは $\max(K - S_T, 0)$ となる。

- ・ポートフォリオ A 時刻 0 (現在) で行使価格 K のコール・オプション (価格 C) $+ Ke^{-rT}$ のキャッシュボンドを持つ。

すると、満期 (時刻 T) では、 $S_T \geq K$ のとき、価値 $= (S_T - K) + K = S_T$

$S_T \leq K$ のとき、価値 $= 0 + K = K$

- ・ポートフォリオ B 時刻 0 で行使価格 K のプット・オプション (価格 P) $+ 株$ の現物 S_0 を持つ。

すると満期 (時刻 T) では、 $S_T \geq K$ のとき、価値 $= 0 + S_T = S_T$

$S_T \leq K$ のとき、価値 $= (K - S_T) + S_T = K$

このように未来の時点 T での価値はポートフォリオ A とポートフォリオ B の両方ともどのような不確実性であろうとも $\max(S_T, K)$ である。

よって、時刻 0 において、

$$C + Ke^{-rT} = P + S_0$$

という関係式 (プット・コールパリティ) が成立する。

上の二つの例は両方ともモデルフリー (不確実モデルを設定しなくとも成立していること) で、さらに、いったん、時刻 0 でポートフォリオを持てば、満期時まで何もしなくてもよいことに注意しよう。

今後、この無裁定の考え方をよりどころにし、離散モデルの場合はランダムウォークによるモデル、連続モデルの場合は確率微分方程式によるモデルをたて、伊藤解析という大事なメソッドでダイナミック・ヘッジ (満期までの各時点で、セルフファイナンス (自己資金調達、各時点でお金を投入したりひきあげたりしない) ポートフォリオによりデリバティブを複製すること) を構成し、それがデリバティブの価格を決定するのである。

2 離散モデルのデリバティブ価格理論

2.1 2 項 T 期間モデル

まず、2 項 T 期間モデルをみていく。これは、現時点での株価 S の株式が、ある 1 期間 ($t=0$ から $t=1$ とする) で $(1+\mu+\sigma)S$ に上昇するか $(1+\mu-\sigma)S$ に下降するかどうかだけを考えるもので、これを $\{-1, 1\}$ 値確率変数 ξ_1 を準備し 1 期間後の株価 S_1 が $S_1 = (1+\mu+\sigma\xi_1)S$ で与えられるものとする。さらに、確率 1 で (リスク無しに) 資金 1 が $1+r$ が増える安全債券も同時に考察する¹⁾。これを T 期間にわたり、確率変数 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_T$ を導入することにより考察する。

投資家は、これを、自分の観点から、 $P(\xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, \dots, \xi_T = i_T)$ という確率に評価しているとしよう。つまり、 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_T)$ の確率分布 P を考えているとするのである。しかし、後にすぐ見るようにデリバティブの価格はそれぞれの投資家の考え方 P によらないで、全投資家に共通のリスク中立確率測度 Q で決

定されてしまうのである。

まず、デリバティブの定義をしておこう。

デリバティブの定義 満期 T のデリバティブとは $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_T$ によってお金のやりとりが決まる契約。つまり一般的には $\sigma(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_T)$ 可測確率変数 ($(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_T)$ の値によって決まる確率変数) のことである。

このモデルでは、以下の手順によって任意のデリバティブの価格が「無裁定の考え方」より導かれることを示す。

手順1：同値マルチンゲール測度の存在とその一意性

割引株価過程がマルチンゲールになるように確率測度 P を確率測度 Q に変更する。この確率測度 Q は同値マルチンゲール測度²⁾と呼ばれる。

手順2：マルチンゲール表現定理を用いることによるデリバティブの資金自己調達の複製ポートフォリオの構成

マルチンゲール表現定理を用いると、各時点 t で株 ϕ_t 単位、安全債券 ψ_t 単位を持つ³⁾ポートフォリオが資金自己調達（最初に投じた金額で購入した株と安全債券のポートフォリオを各時点でお金を投入したり、引きあげたりすることなく組替えること）であり、最終的に満期時 T にはデリバティブのペイオフと一致するような ϕ_t, ψ_t の組を見つけることができるのである。この組を見つけることができるのである。この組 ϕ_t, ψ_t をデリバティブの複製ポートフォリオという。そのような複製ポートフォリオを見つけることができると無裁定の仮定より、デリバティブの価格は $\phi_t S_t + \psi_t$ と一致しなければならないのである。以上がデリバティブ価格決定理論の骨子である。

2.1.1 同値マルチンゲール測度の存在とその一意性

まず、割引株価過程 $S'_t = (1+r)^{-t} S_t$ を $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$ マルチンゲール（マルチンゲールの定義はすぐ後の定理2.1または [9]）にする P に同値なマルチンゲール測度 Q が一意的に存在することを示す。

$$\begin{aligned} E^Q(S'_{t+1} | \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t) &= (E^Q(S'_{t+1} | \mathcal{F}_t)) \text{ と書く} \\ &= (1+r)^{-(t+1)} (E^Q(\Pi'_{t+1}(1+\mu+\sigma\xi_t) | \mathcal{F}_t)) \\ &= S'_t (1+r)^{-1} E^Q((1+\mu+\sigma\xi_{t+1}) | \mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

となるので、これが S'_i に等しくなるためには、

$$Q(\xi_{i+1} = 1 | \mathcal{F}_i) = \frac{r - \mu + \sigma}{2\sigma}$$

$$Q(\xi_{i+1} = -1 | \mathcal{F}_i) = \frac{-r + \mu + \sigma}{2\sigma}$$

この条件付期待値の値は $\mathcal{F}_i$ によらないので、この確率測度 Q のもとでは、 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_T$ は独立で同分布、

$$Q(\xi_i = 1) = \frac{r - \mu + \sigma}{2\sigma} \quad (=p \text{とおく.})$$

$$Q(\xi_i = -1) = \frac{-r + \mu + \sigma}{2\sigma} \quad (=1 - p = q \text{とおく.})$$

を満たすことがわかる。この p をリスク中立上昇確率、 q をリスク中立下降確率と呼ぶ。また、このような割引株価過程 S'_i を $\mathcal{F}_i$ マルチンゲールにするような確率測度は Q の作り方より、一意的であることもわかる。また、 P と Q の同値性もあきらかである。

この同値マルチンゲール測度 Q のもとでは、 $Z_i = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_i$ は、1次元非対称ランダムウォーク（右に行く確率と左に行く確率が一般には異なるランダムウォーク、独立同分布のベルヌーイ分布の和）となるのである。

2.2 1次元非対称ランダムウォークのマルチンゲール表現定理

定理 2.1 1次元非対称ランダムウォークのマルチンゲール表現定理

U_i が

1. U_i は $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i$ の関数、
2. $E^Q(U_{i+1} | \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i) = U_i$ 、

をみたす、すなわち $\xi_1, \xi_2, \dots$ に関するマルチンゲール（ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i$ マルチンゲール、 $\mathcal{F}_i$ マルチンゲールなどともいう）⁴⁾ならば、

$$U_i = a(\xi_1 - (p - q)) + f_1(\xi_1)(\xi_2 - (p - q)) + \dots$$

$$+ f_{i-1}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i-1})(\xi_i - (p - q))$$

となる定数 a 、関数 $f_1, \dots, f_{i-1}$ が存在する。

(注意 ここで $p - q = E^Q(\xi_i)$ のことである.)

証明。

$U_{t+1} - U_t = g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{t+1})$ とおくと,

$$E^q(g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{t+1}) | \xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \dots, \xi_t = x_t) = 0$$

となり, $g(x_1, x_2, \dots, x_t, 1) \times p + g(x_1, x_2, \dots, x_t, -1) \times q = 0$ となる. これを変形して

$$\frac{g(x_1, x_2, \dots, x_t, 1)}{1 - (p - q)} = \frac{g(x_1, x_2, \dots, x_t, -1)}{-1 - (p - q)}$$

を得る. $\frac{g(x_1, x_2, \dots, x_t, \xi_{t+1})}{\xi_{t+1} - (p - q)}$ は, $x_1, x_2, \dots, x_t$ だけの関数なので $h(x_1, x_2, \dots, x_t)$ とおける. (証明終).

2.3 2項T期間モデルにおけるデリバティブの価格理論

Y を時刻 T を満期とするあるデリバティブとする. Y は $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_T$ の関数 $Y = h(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_T)$ である. 例えば, コールオプションなら

$$h(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_T) = \max(\Pi_{i=1}^T (1 + \mu + \sigma \xi_i) S - K, 0)$$

である. ここでは Y を複製するポートフォリオと Y の価格を調べてみる. 結論からいうと Y の価格 $= E^q((1+r)^{-T} Y) (= E_0$ とおく) になる. Y を複製する株式と安全債券のポートフォリオ (ϕ_t, ψ_t) すなわち, $(t-1)$ 期間から t 期間にかけて株 S_{t-1} を ϕ_t 単位もち, 安全債券の $t-1$ 期間目の値 $(1+r)^{t-1}$ を ψ_t 単位もつ資金自己調達な複製ポートフォリオ $\phi_t S_{t-1} + \psi_t (1+r)^{t-1}$ は次のように決定される.

マルチンゲール表現定理2.1より,

$S'_t = (1+r)^{-t} S_t = a(\xi_1 - (p-q)) + f_1(\xi_1)(\xi_2 - (p-q)) + \dots + f_{t-1}(\xi_1, \dots, \xi_{t-1})(\xi_t - (p-q))$ と表せ, また $E^q((1+r)^{-T} Y | \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t)$ もマルチンゲールになるので,

$$E_t = E^q((1+r)^{-T} Y | \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t) = a'(\xi_1 - (p-q)) + g_1(\xi_1)(\xi_2 - (p-q)) + \dots + g_{t-1}(\xi_1, \dots, \xi_{t-1})(\xi_t - (p-q))$$

とすると

$$S'_t - S'_{t-1} = f_{t-1}(\xi_1, \dots, \xi_{t-1})(\xi_t - E(\xi_t))$$

$$E_t - E_{t-1} = g_{t-1}(\xi_1, \dots, \xi_{t-1})(\xi_t - E(\xi_t))$$

となり, $E_t - E_{t-1} = \phi_t (S'_t - S'_{t-1})$ となる $\xi_1, \dots, \xi_{t-1}$ のみの関数となる ϕ_t が定まる. これがポートフォリオの ϕ_t となる⁵⁾. また,

$$\phi_t = E^Q((1+r)^{-T} Y | \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{t-1}) - \phi_t S'_{t-1}$$

と定める。

以下、このポートフォリオを調べる。まず $t=0$ では $S=S_0$ を ϕ_0 、安全債券を $\phi_0 = E_0 - \phi_0 S_0$ だけでもつ。 $t=1$ では S が S_1 に、安全債券が 1 から $(1+r)$ に変わるので、このポートフォリオの価値は $\phi_1 S_1 + \phi_1 (1+r)$ となり、これは

$$\begin{aligned} \phi_1 S_1 + \phi_1 (1+r) &= \phi_1 S_1 + (E_0 - \phi_1 S_0) (1+r) \\ &= (1+r) E_0 + (1+r) (\phi_1 (S_1 (1+r)^{-1} - S_0)) \\ &= (1+r) E_0 + (1+r) \phi_1 (S'_1 - S_0) = (1+r) E_0 + (1+r) (E_1 - E_0) \\ &= (1+r) E_1 \end{aligned}$$

と価値が $(1+r) E_1$ になる。次はこの複製ポートフォリオを組み代えて、株 S_1 を ϕ_2 、安全債券を $\phi_2 = E_1 - \phi_2 S'_1$ だけでもつのである。このとき、組み代えたただけでお金を投入したり引き上げたりしていないことに注意する。(資金自己調達, *self-financing* という⁶⁾。すると次の期間 $t=2$ では複製ポートフォリオの価値は

$$\begin{aligned} \phi_2 S_2 + \phi_2 (1+r)^2 &= \phi_2 S_2 + (1+r)^2 (E_1 - \phi_2 S'_1) \\ &= (1+r)^2 E_1 + (1+r)^2 \phi_2 (S'_2 - S'_1) \\ &= (1+r)^2 E_1 + (1+r)^2 (E_2 - E_1) = (1+r)^2 E_2 \end{aligned}$$

を得る。以下同様にしていくと、最後に時刻 T では

$$\begin{aligned} \phi_T S_T + \phi_T (1+r)^T &= (1+r)^T E_T = (1+r)^T E^Q(Y(1+r)^{-T} | \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_T) \\ &= (1+r)^T (1+r)^{-T} Y = Y \quad (\because Y \text{ は } \mathcal{F}_T \text{ 可測}) \end{aligned}$$

となり、 Y を完全に複製できたことになる。つまり、最初の複製ポートフォリオの価値 $E_0 (= E^Q(Y(1+r)^{-T}))$ で、最後の複製ポートフォリオの価値は Y となり、途中でお金を投入したり引き上げてはいない(資金自己調達)ので、この複製ポートフォリオの価値とデリバティブの価値はずっと等価で、つまり Y の現在価格は $E_0 (= E^Q(Y(1+r)^{-T}))$ となるのである、またそうでなければ裁定がおきるのである。

以下は、このモデルで具体的に計算できる例をいくつか挙げる。その前に準備が必要で次の離散の伊藤の公式はそれ自身も大事であろうが、連続モデルへの橋

渡しとなるもので、マルチンゲール表現定理と並んで非常に大事なものである。

2.4 離散の伊藤公式と複製ポートフォリオ構築

$$Z_t = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_t$$

ここで

$$P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) = \frac{1}{2} \text{で } \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t \text{ は独立とする.}$$

つまり、 Z_t は 1 次元対称ランダムウォークである。このとき、

定理 2.2 1 次元対称ランダムウォークの離散伊藤公式

$$\begin{aligned} f(Z_{t+1}) - f(Z_t) &= \frac{f(Z_t + 1) - f(Z_t - 1)}{2} (Z_{t+1} - Z_t) + \\ &\quad \frac{f(Z_t + 1) - 2f(Z_t) + f(Z_t - 1)}{2} \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} f(Z_{t+1}, t+1) - f(Z_t, t) &= \frac{f(Z_t + 1, t+1) - f(Z_t - 1, t+1)}{2} (Z_{t+1} - Z_t) \\ &+ \frac{f(Z_t + 1, t+1) - 2f(Z_t, t+1) + f(Z_t - 1, t+1)}{2} + f(Z_t, t+1) - f(Z_t, t) \end{aligned}$$

また、証明の前にこの公式によってドゥープ・メイヤー分解が作れることを示しておこう。

$\sum_{i=0}^{t-1} \frac{f(Z_i + 1) - f(Z_i - 1)}{2} (Z_{i+1} - Z_i)$ はマルチンゲール表現定理によって $\mathcal{F}_t$ -マルチンゲールである。

$$\begin{aligned} f(Z_t) - f(Z_0) &= \sum_{i=0}^{t-1} \frac{f(Z_i + 1) - f(Z_i - 1)}{2} (Z_{i+1} - Z_i) \\ &+ \sum_{i=0}^{t-1} \frac{f(Z_i + 1) - 2f(Z_i) + f(Z_i - 1)}{2} \quad (f(Z_i) \text{ のドゥープ・メイヤー分解}) \end{aligned}$$

となり、右辺の第 2 項は $\mathcal{F}_{t-1}$ 可測、すなわち、*previsible* である。

証明.

$$Z_{t+1} = Z_t + \xi_{t+1} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} E'(f(Z_{t+1}) - f(Z_t) \mid \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t) &= E'(f(Z_t + \xi_{t+1}) - f(Z_t) \mid \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t) \\ &= \frac{f(Z_t + 1) + f(Z_t - 1) - 2f(Z_t)}{2}. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
 f(Z_{t+1}) - f(Z_t) &= \frac{f(Z_t+1) + f(Z_t-1) - 2f(Z_t)}{2} \\
 &= f(Z_t + \xi_{t+1}) - \frac{f(Z_t+1) + f(Z_t-1)}{2} \\
 &= \begin{cases} \frac{f(Z_t+1) - f(Z_t-1)}{2} & \text{if } \xi_{t+1} = 1 \\ -\frac{f(Z_t+1) + f(Z_t-1)}{2} & \text{if } \xi_{t+1} = -1 \end{cases} \\
 &= \frac{f(Z_t+1) - f(Z_t-1)}{2} \xi_{t+1} \\
 &= \frac{f(Z_t+1) - f(Z_t-1)}{2} (Z_{t+1} - Z_t)
 \end{aligned}$$

(証明終)

定理 2.3 1次元非対称ランダムウォークの離散伊藤公式

$$Z_t = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_t,$$

ここで,

$$P(\xi_i = 1) = p, P(\xi_i = -1) = q = 1 - p \quad \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t \text{ は独立とする.}$$

このとき, Z_t を 1次元非対称ランダムウォークという.

$$\begin{aligned}
 f(Z_{t+1}) - f(Z_t) &= \frac{f(Z_t+1) - f(Z_t-1)}{2} (\xi_{t+1} - (p - q)) \\
 &\quad + pf(Z_t+1) + qf(Z_t-1) - f(Z_t),
 \end{aligned}$$

が成立.

同様に

$$\begin{aligned}
 f(Z_{t+1}, t+1) - f(Z_t, t) &= \frac{f(Z_t+1, t+1) - f(Z_t-1, t+1)}{2} (\xi_{t+1} - (p - q)) \\
 &\quad + pf(Z_t+1, t+1) + qf(Z_t-1, t+1) - f(Z_t, t+1) + (f(Z_t, t+1) - f(Z_t, t)).
 \end{aligned}$$

説明 $\xi_1, \dots, \xi_t, \xi_{t+1}$ は独立. よって,

$$\begin{aligned}
 E^p[f(Z_{t+1}) - f(Z_t) \mid \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t] &= E^p[f(Z_t + \xi_{t+1}) \mid \mathcal{F}_t] - f(Z_t) \\
 &= pf(Z_t+1) + qf(Z_t-1) - f(Z_t).
 \end{aligned}$$

つまり,

$$\begin{aligned} & f(Z_{t+1}) - f(Z_t) - (pf(Z_{t+1}) + qf(Z_t - 1) - f(Z_t)) \\ &= f(Z_{t+1}) - (pf(Z_t + 1) + qf(Z_t - 1)) \\ &= \begin{cases} q(f(Z_t + 1) - f(Z_t - 1)) & \text{if } \xi_{t+1} = 1 \\ -p(f(Z_t + 1) + f(Z_t - 1)) & \text{if } \xi_{t+1} = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

また, $E^P[\xi_{t+1}] = p - q$,

$$\begin{aligned} \frac{f(Z_{t+1}) - (pf(Z_t + 1) + qf(Z_t - 1))}{\xi_{t+1} - E^P[\xi_{t+1}]} &= \begin{cases} \frac{q(f(Z_t + 1) - f(Z_t - 1))}{2q} & \text{if } \xi_{t+1} = 1 \\ \frac{-p(f(Z_t + 1) + f(Z_t - 1))}{-2p} & \text{if } \xi_{t+1} = -1 \end{cases} \\ &= \frac{f(Z_t + 1) - f(Z_t - 1)}{2}. \end{aligned}$$

つまり,

$$f(Z_{t+1}) - (pf(Z_t + 1) + qf(Z_t - 1)) = \frac{f(Z_t + 1) - f(Z_t - 1)}{2} (\xi_{t+1} - (p - q)).$$

(証明終)

以下, この離散伊藤公式を利用して, デリバティブの価格と複製ポートフォリオ構築の計算例を挙げる. その前に $1 + \mu + \sigma = e^{\mu + \sigma}$, $1 + \mu - \sigma = e^{\mu - \sigma}$, $1 + r = e^{r'}$ において, この 2 項 T 期間モデルを書き直しておく.⁷⁾ つまり, $S_t = \Pi_{i=1}^t (1 + \mu + \sigma \xi_i) = Se^{\mu t + \sigma \sum_{i=1}^t \xi_i} = Se^{\mu t + \sigma' Z_t}$ (ここで, Z_t は 1 次元非対称ランダムウォーク) と書き直せることに注意する. すると, 多くのデリバティブは, Z_t そのものの汎関数となり, 離散伊藤公式が使いやすくなる.

これを応用して 満期時 T におけるペイオフが $f(S_T)$ のデリバティブに価格と複製ポートフォリオを求めてみよう. 勿論, $f(S) = S - K$ の場合が先物, $f(S) = (S - K, 0)$ の場合がコールオプション, $f(S) = \max(K - S, 0)$ の場合がプットオプションである.

例 2.1 デリバティブ $f(S_T)$

$S'_t = e^{-r't} S_t$ とおくと, 前にもみたように, 同値マルチンゲール測度 Q のもとではマルチンゲールになるので, これに離散伊藤公式を適用して, $S'_{t+1} - S'_t = S'_t \frac{e^{\sigma'} - e^{-\sigma'}}{2} (\xi_{t+1} - (p - q))$ となることに注意しておく.

まず, デリバティブの価格 $= E_0 = E^Q(e^{-r'T} f(S_T)) = e^{-r'T} E^Q((f(Se^{\mu T + \sigma' Z_T}))$

(= $C(T, S)$ とおく.)

$$\text{つまり, } C(T, S) = e^{-r'T} \sum_{k=-T}^T f(Se^{\mu'T} e^{\sigma'k}) \mathbf{Q}(Z_T = k)$$

ここで,

$$\mathbf{Q}(Z_T = k) = \begin{cases} \binom{(T+k)/2}{(T+k)/2} p^{(T+k)/2} q^{(T-k)/2} & (T+k = \text{偶数のとき}) \\ 0 & (T+k = \text{奇数のとき}) \end{cases}$$

次に複製ポートフォリオを求める.

$$\begin{aligned} E^Q(e^{-r'T} f(S_T) | \mathcal{F}_t) &= e^{-r't} E^Q(f(Se^{\mu't + \sigma'Z_t} e^{\mu'(T-t) + \sum_{i=1}^t \xi_i} | \mathcal{F}_t)) \\ &= e^{-r't} E^Q(f(Ae^{\mu'(T-t) + \sum_{i=1}^t \xi_i}) | A=S_t) = e^{-r't} C(T-t, S_t) \end{aligned}$$

$g(t, Z_t) = e^{-r't} C(T-t, S_t) = e^{-r't} C(T-t, Se^{\mu't + \sigma'Z_t})$ とおいて, 離散伊藤公式を適用すると,

$$\begin{aligned} g(t+1, Z_{t+1}) - g(t, Z_t) &= \frac{g(t+1, Z_{t+1}) - g(t+1, Z_t - 1)}{2} (\xi_{t+1} - (p-q)), \\ E_{t+1} - E_t &= \frac{e^{-r'(t+1)} C(T-(t+1), Se^{\mu'(t+1) + \sigma'(Z_{t+1})}) - e^{-r'(t+1)} C(T-(t+1), Se^{\mu'(t+1) + \sigma'(Z_t - 1)})}{2} \\ &\quad (\xi_{t+1} - (p-q)) \end{aligned}$$

$$S'_{t+1} - S'_t = S'_t \frac{e^{\sigma'} - e^{-\sigma'}}{2} (\xi_{t+1} - (p-q)); \quad E_t - E_{t-1} = \phi_t (S'_t - S'_{t-1}) \text{ と併せて,}$$

$$\phi_t = e^{-r'} S'_{t-1} \frac{C(T-t, e^{\mu'+\sigma'} S'_{t-1}) - C(T-t, e^{\mu'-\sigma'} S'_{t-1})}{e^{\sigma'} - e^{-\sigma'}}$$

$$\phi_t = E_{t-1} - \phi_t S'_{t-1}$$

と複製ポートフォリオ ϕ_t, ψ_t を求めることができた.

注 2.1

この例から離散のブラック・ショールズ偏差分方程式も導くことができることも注意する. 離散伊藤公式を適用したのであるが, そのドゥーブメイヤー分解([13])の *previsible* 項が 0 であった. ($\because$ マルチングール性により) $f(t, S) = e^{-r't} C(T-t, S)$ とおくと,

$$(bf(t+1, e^{\mu'+\sigma'} S_t) + qf(t+1, e^{\mu'-\sigma'} S_t) - f(t+1, S_t)) + f(t+1, S_t) - f(t, S_t) = 0 \text{ が成立.}$$

つまり,

$$(bf(t+1, e^{\mu'+\sigma'} S) + qf(t+1, e^{\mu'-\sigma'} S) - f(t+1, S)) + f(t+1, S) - f(t, S) = 0$$

を境界条件 $f(T, S) = e^{-rT} \max(S - K, 0)$ (行使価格 K のコールオプションの場合) のもとで解いても $C(=f(0, S))$ が得られることに注意しておく。

例 2.2 デリバティブ Z_t^q の価格と複製ポートフォリオ

$$\begin{aligned} \text{まず, デリバティブ } Z_t^q \text{ の価格} &= E^Q(e^{-rT} Z_T^q) \\ &= e^{-rT} E^Q(\sum_i \xi_i^2 + \sum_{i \neq j} \xi_i \xi_j) \\ &= e^{-rT} (T + (p-q)^2 T(T-1)) \end{aligned}$$

次に複製ポートフォリオを求める。

$$\begin{aligned} E_t &= E^Q(e^{-rT} Z_T^q | \mathcal{F}_t) = e^{-rT} E^Q((Z_T - Z_t)^2 + 2(Z_T - Z_t)Z_t + Z_t^2 | \mathcal{F}_t) \\ &= e^{-rT} ((T-t) + (p-q)^2(T-t)(T-t-1) + 2Z_t(p-q)(T-t) + Z_t^2) \\ E_{t+1} - E_t &= e^{-rT} (2(p-q)(T-t-1) + 2Z_t)(\xi_{t+1} - (p-q)) \\ \text{つまり } \phi_t &= 4e^{-rT} ((p-q)(T-t) + Z_{t-1}) \times (e^\sigma - e^{-\sigma})^{-1} (S_t')^{-1} \\ & \quad \phi_t = E_{t-1} - \phi_t S_{t-1} \text{ で求められる。} \end{aligned}$$

注2.2 他にも Z_t^q, e^{aZ_t} も具体的に計算できるデリバティブである。

2.5 離散モデルから連続モデルへ

2.1でみてきたモデルを連続モデルにもっていくために、 μ を $\mu\Delta t$ に、 σ を $\sigma\sqrt{\Delta t}$ に、 r を $r\Delta t$ に置き換え、また、時間間隔を1から、 Δt にスケール変換し、その後 Δt を0に近づける操作を行う。具体的には、リスク中立上昇確率 p が、

$$p = \frac{e^{(r-\mu)\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} \text{ に変わり,}$$

Z_t が、時間間隔 Δt 、空間間隔 $\sqrt{\Delta t}$ のランダムウォーク $Z_t^{\Delta t} = \sqrt{\Delta t} Z_{t/\Delta t}$ に置き換わることになる。すると、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限で、 $Z_t^{\Delta t}$ の中心化 $= Z_t^{\Delta t} - E(Z_t^{\Delta t}) = Z_t^{\Delta t} - (p-q)t$ はリスク中立確率測度 Q のもとで中心極限定理により標準ブラウン運動 W_t に法則収束することがわかる。つまり株価 S_t は

$$S_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} e^{(\mu\Delta t)(t/\Delta t) + \sigma\sqrt{\Delta t}(Z_t - (p-q)t/\Delta t) + \sigma\sqrt{\Delta t}(p-q)t/\Delta t} = e^{(r-(1/2)\sigma^2)t + \sigma W_t}$$

と幾何的ブラウン運動で表されることになる。この結果を例2.1に代入してみると、満期時 T におけるペイオフが $f(S_T)$ のデリバティブの現在価格 E_0 は

$$E_0 = e^{-rT} E^Q(f(S_T)) = e^{-rT} E^Q(f(Se^{(r-(1/2)\sigma^2)T + \sigma W_T})) \text{ となり}$$

とくに行使価格 K のコールオプションの場合には、この期待値計算を実行して

$$\begin{aligned} \text{コールオプション価格 } C = & S\Phi\left(\frac{\log\frac{S}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ & - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\log\frac{S}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \end{aligned}$$

となる。ここで Φ は標準正規分布の分布関数⁸⁾である。これがいわゆるブラック・ショールズのコールオプション価格式といわれるものである。またこの複製ポートフォリオについては、次章で求める。また、注2.1で求めたブラック・ショールズ偏差分方程式において、この節の置き換えを行うと、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限でいわゆるブラック・ショールズ偏微分方程式 ([2])

$$\begin{aligned} -\frac{\partial C}{\partial T} + (1/2)\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \quad (C = C(T-t, S)) \\ + \text{境界条件 } C(0, S) = \max(S - K, 0) \end{aligned}$$

が得られ、これを解いてもブラック・ショールズのコールオプション価格式が得られることを注意しておく。

注 2.3 対称な場合のランダムウォーク $Z_t^{\Delta t}$ の離散伊藤公式を書いてみると、

$$\begin{aligned} f(Z_t + \Delta t) - f(Z_t) = & \frac{f(Z_t + \sqrt{\Delta t}) - f(Z_t - \sqrt{\Delta t})}{2\sqrt{\Delta t}} (Z_{t+\Delta t} - Z_t) + \\ & \left(\frac{f(Z_t + \sqrt{\Delta t}) - 2f(Z_t) + f(Z_t - \sqrt{\Delta t}))}{2} \right) \end{aligned}$$

となり、

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} Z_t^{\Delta t} = W_t$ に注意して近似を考えると、

$$\begin{aligned} f(W_{t+\Delta t}) - f(W_t) = & \frac{f(W_t + \sqrt{\Delta t}) - f(W_t - \sqrt{\Delta t})}{2\sqrt{\Delta t}} (W_{t+\Delta t} - W_t) + \\ & \frac{(f(W_t + \sqrt{\Delta t}) - 2f(W_t) + f(W_t - \sqrt{\Delta t}))}{2\Delta t} \Delta t \end{aligned}$$

と、ブラウン運動の伊藤の公式

$$df(W_t) = f'(W_t) dW_t + (1/2) f''(W_t) dt$$

を示唆していることに注意しておく。また、同様に非対称ランダムウォークの場合にこれと同じことをやると、ドリフト付ブラウン運動の場合の伊藤の公式が得られることもわかる。

3 連続モデルのデリバティブ価格理論

3.1 ブラックショールズモデル

前節の最後でみたように離散モデルの極限として、ブラウン運動で記述される連続モデルが得られる。そこで、本節では最初から、株のモデルとしてブラックショールズモデルをとり、この場合に価格決定理論を構築してみよう。

株価モデルの仮定 株価は次の確率微分方程式にしたがっていると仮定する。

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

ここで、 W_t は確率測度 P のもとで標準ブラウン運動、 μ, σ はある定数である。伊藤の公式を用いてこの S_t は $S_t = S_0 e^{(\mu - (1/2)\sigma^2)t + \sigma W_t}$ と表されることに注意する。この S_t は幾何的ブラウン運動とも呼ばれる。

また、それと同時に

$$dB_t = rB_t dt \quad B_0 = 1$$

に従う安全債券 $B_t = e^{rt}$ も市場にあり自由に売り買いできるものとしよう。勿論、このモデルは前節で見た離散モデルの連続版であり、ブラック・ショールズモデルと呼ばれるものである。また、この μ は投資家の思う株価の期待収益率、 σ は株価のボラティリティである。

このとき、以下の手順で任意のデリバティブの価格が「無裁定の考え方」より決定できる。また、それは、各投資家が株価に見る期待収益率 μ や各投資家の見方（確率測度 P ）に依存しないことがわかる。

手順1：同値マルチンゲール測度の存在とその一意性

割引株価過程がマルチンゲールになるように確率測度 P を確率測度 Q に変更する。この確率測度 Q は同値マルチンゲール測度と呼ばれる。

手順2：マルチンゲール表現定理を用いることによるデリバティブの資金自己調達の複製ポートフォリオの構成

マルチンゲール表現定理を用いると、各時点 t で株 ϕ_t 単位、安全債券 ψ_t 単位を持つ⁹⁾ポートフォリオが資金自己調達の(意味は離散モデルの場合と同じであるがすぐに連続モデルでこの概念を定式化する。)であり、最終的に満期時 T にはデリバティブのペイオフと一致するような ϕ_t, ψ_t の組を見つけることができるのである。この組 ϕ_t, ψ_t をデリバティブの複製ポートフォリオという。そのような複製ポートフォリオを見つけることができると無裁定の仮定より、デリバティブの価格は $\phi_0 S + \psi_0$ と一致しなければならないのである。以上がブラックショールズモデルにおけるデリバティブ価格決定理論の骨子である。このように、形式的には離散モデルの場合とまったく変わらないことに注意しよう。

3.2 同値マルチンゲール測度の存在とその一意性

まず、割引株価過程 $S'_t = e^{-rt} S_t$ を $\mathcal{F}_t$ マルチンゲールにする $\mathbf{P}$ に同値なマルチンゲール測度 $\mathbf{Q}$ が一意的に存在することを示す。

$$\begin{aligned} \text{伊藤の公式より, } dS'_t &= e^{-rt} (\sigma S_t dW'_t + (\mu - r) S_t dt) \\ &= e^{-rt} \sigma S_t (d(W'_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t)) \end{aligned}$$

よって、 $W_t = W'_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$ が標準ブラウン運動になるように確率測度 $\mathbf{Q}$ を設定できれば、 S'_t は $\mathcal{F}_t$ マルチンゲールとなる。それは、ギルサノフの定理¹⁰⁾によって、

$$E^{\mathbf{Q}}(A) = E^{\mathbf{P}}(e^{-\frac{t}{\sigma} W_t - \frac{1}{2}(\frac{t}{\sigma})^2 r} 1_A) \quad \text{ここで, } A \text{ は } \mathcal{F}_t \text{ 可測集合}$$

ととればよい。一意性の証明は、もし2つの確率測度 $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}'$ が S'_t を $\mathcal{F}_t$ マルチンゲールにしたとすると、 $\int_0^T \alpha(t)^2 dt < \infty$ をみたす $\alpha(t)$ に対して、 $\mathbf{Q}(e^{\int_0^t \alpha(s) dW_s}) = \mathbf{Q}'(e^{\int_0^t \alpha(s) dW_s}) (= e^{(1/2) \int_0^t \alpha(s)^2 ds})$ となるので $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}'$ である。

3.3 ギルサノフの定理

定理 3.1 確率測度 $\mathbf{P}$ のもとで、 W_t がブラウン運動なら確率測度 $\mathbf{Q}$ のもとで、 $W_t - \int_0^t b(s) ds$ はブラウン運動である。ここで、 $\mathbf{P}(\int_0^T b(s)^2 ds < C_T) = 1$ (C_T はある定数)を仮定する。(注意 この条件は $e^{\int_0^T b(s) dW_s - (1/2) \int_0^T b(s)^2 ds}$ が $t \leq T$ でマルチン

ゲールになるための十分条件である.)

また, $E^Q(f) = E^P(e^{\int_0^t b(s) dW_s - (1/2) \int_0^t b(s)^2 ds} f)$ ここで, $t \leq T$ として f は $\mathcal{F}_t$ 可測 P 可積分確率変数とする. つまり, この関係によって, 確率測度 Q が確率測度 P から作られるものとする.

(つまり, $A \in \mathcal{F}_t$ にたいして,

$Q(A) = E^Q(1_A) = E^P(e^{\int_0^t b(s) dW_s - (1/2) \int_0^t b(s)^2 ds} 1_A)$ で定められるのである.) また, この P と Q は同値な確率測度である.

証明

$Y_t = W_t - \int_0^t b(s) ds$ とおいたとき $t_1 < t_2 < \dots < t_n < T$ として

$(Y_{t_1}, Y_{t_2} - Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n} - Y_{t_{n-1}})$ の n 次元モーメント母関数

$$E^Q(e^{a_1 Y_{t_1} + a_2 (Y_{t_2} - Y_{t_1}) + \dots + a_n (Y_{t_n} - Y_{t_{n-1}})}) = e^{(1/2)(a_1^2 t_1 + a_2^2 (t_2 - t_1) + \dots + a_n^2 (t_n - t_{n-1}))}$$

が示されればよい.

$$\begin{aligned} & E^Q(e^{a_1 Y_{t_1} + a_2 (Y_{t_2} - Y_{t_1}) + \dots + a_n (Y_{t_n} - Y_{t_{n-1}})}) \\ &= E^P(e^{\int_0^{t_1} b(s) dW_s - (1/2) \int_0^{t_1} b(s)^2 ds} e^{a_1 Y_{t_1} + a_2 (Y_{t_2} - Y_{t_1}) + \dots + a_n (Y_{t_n} - Y_{t_{n-1}})}) \\ &= E^P(e^{\int_0^{t_1} (b(s) + a_1) dW_s - (1/2) \int_0^{t_1} (b(s) + a_1)^2 ds} + \int_{t_1}^{t_2} (b(s) + a_2) dW_s - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (b(s) + a_2)^2 ds + \dots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} b(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} b(s)^2 ds}) \\ &= E^P(e^{(1/2)(a_1^2 t_1 + a_2^2 (t_2 - t_1) + \dots + a_n^2 (t_n - t_{n-1}))}) \\ &= E^P(e^{\int_0^{t_1} c(s) dW_s - (1/2) \int_0^{t_1} c(s)^2 ds}) (e^{(1/2)(a_2^2 t_1 + a_2^2 (t_2 - t_1) + \dots + a_n^2 (t_n - t_{n-1}))}) \\ &= e^{(1/2)(a_1^2 t_1 + a_2^2 (t_2 - t_1) + \dots + a_n^2 (t_n - t_{n-1}))} \end{aligned}$$

ここで,

$$c(s) = \begin{cases} b(s) + a_1 \cdots 0 \leq s \leq t_1 \\ b(s) + a_2 \cdots t_1 < s \leq t_2 \\ \dots \\ b(s) + a_n \cdots t_{n-1} < s \leq t_n \\ b(s) \cdots t_n < s \leq T \end{cases}$$

また, $P(\int_0^T b(s)^2 ds) < C_T = 1$ より, $c(s)^2 \leq 2(b(s)^2 + (-b(s) + c(s))^2)$ とあわせて, 明らかに $P(\int_0^T c(s)^2 ds) < C_T = 1$ となり, ここで (C_T はある定数) $e^{\int_0^t c(s) dW_s - (1/2) \int_0^t c(s)^2 ds}$ はマルチンゲールとなる. したがって, $E(e^{\int_0^t c(s) dW_s - (1/2) \int_0^t c(s)^2 ds}) = 1$, これを途中に用いた.

(証明終)

注 3.1 ブラック・ショールズモデルで用いる場合は $b(s) = -\frac{\mu-r}{\sigma}$ に注意しておく。

3.4 ブラック・ショールズモデルにおけるデリバティブ価格理論と色々な例

まず、ブラウン運動に関するマルチンゲール表現定理を述べておく。

定理 ブラウン運動に関するマルチンゲール表現定理

M_t が二乗可積分 $\mathcal{F}_t$ マルチンゲールなら、ある $\mathcal{F}_t$ 可予測過程 ϕ_t と定数 M_0 が存在して、

$$M_t = M_0 + \int_0^t \phi_s dW_s \text{ と確率積分で表現できる。}$$

この定理を用いて複製ポートフォリオを作るのである。

資金自己調達のポートフォリオの定義

ポートフォリオ $\phi_t S_t + \psi_t e^{rt} (= V_t$ とおく) が資金自己調達のポートフォリオであるとは

$$dV_t = \phi_t dS_t + \psi_t d(e^{rt})$$

を満たすことである。この意味は、短い時間 t から $t+\Delta t$ の間にポートフォリオの価値の増分は $V_{t+\Delta t} - V_t$ で、その増分が、 $\phi_t(S_{t+\Delta t} - S_t) + \psi_t(e^{r(t+\Delta t)} - e^{rt})$ に等しいことまた、同じことであるが $\phi_{t+\Delta t} S_{t+\Delta t} + \psi_{t+\Delta t} e^{r(t+\Delta t)} = \phi_t S_{t+\Delta t} + \psi_t e^{r(t+\Delta t)}$ と短い時間 t から $t+\Delta t$ の間のポートフォリオの組替えに資金を投入もしくは引き上げをおこなわないことを示している。

デリバティブの定義 満期 T のデリバティブとは $W_s (s \leq T)$ によってお金のやりとりが決まる契約。つまり一般的には $\sigma(W_s (s \leq T))$ 可測確率変数 $= \mathcal{F}_T$ 可測確率変数 ($(W_s, (s \leq T))$ の値によって決まる確率変数) のことである。

Y を時刻 T を満期とするあるデリバティブとする。

まず、 $E^Q(e^{-rT} Y) = E_0$ がデリバティブ Y の価格となる。 Y を複製する株式と安全債券のポートフォリオ (ϕ_t, ψ_t) すなわち、 t 期間目で株 S_t を ϕ_t 単位もち、安全債券の t 期間目の値 e^{rt} を ψ_t 単位もつ $\phi_t S_t + \psi_t e^{rt}$ は次のように決定される。 $E_t = E(e^{-rT} Y | \mathcal{F}_t)$ は $\mathcal{F}_t$ マルチンゲールになるので、マルチンゲール表現定理より、 $E_t = E_0 + \int_0^t g_s dW_s$ すなわち $dE_t = g_t dW_t$ と表すことができる。これと、 $dS_t = \sigma S_t$

dW_t より, $\phi_t = (\sigma S_t')^{-1} g_t$ とおけば, $dE_t = \phi_t dS_t'$ を満たす. また, $\phi_t = E_t - \phi_t S_t'$ ととる. すると, このポートフォリオは 資金自己調達のである. 何故なら,

$$\begin{aligned} dV_t &= d(\phi_t S_t + \psi_t e^{rt}) = d(\phi_t S_t + (E_t - \phi_t S_t') e^{rt}) \\ &= d(e^{rt} E_t) = re^{rt} E_t dt + e^{rt} dE_t = re^{rt} E_t dt + e^{rt} \phi_t dS_t' \\ &= re^{rt} E_t dt + e^{rt} \phi_t (-re^{-rt} dt + e^{-rt} dS_t) = \phi_t dS_t + re^{rt} \psi_t dt \end{aligned}$$

となるからである. また, 満期時 T では, $\phi_T S_T + \psi_T e^{rT} = e^{rT} E_T = E(Y | \mathcal{F}_T) = Y$ となり, 満期時には完全に Y と一致している. さらに, 途中では資金自己調達なので, もしどこの時点で, デリバティブの価値がこの複製ポートフォリオの価値と違えば裁定がおきることになってしまう. よって, デリバティブの現在価格 $= E_0$, 複製ポートフォリオ $= (\phi_t, \psi_t)$ であることがわかる.

これを用いれば, 色々なデリバティブの価格計算, 複製ポートフォリオ構築が可能となるので以下にそれを示していこう.

例 3.1 デリバティブ W_T^2

まず, 価格 $= E^Q(e^{-rT} W_T^2) = e^{-rT} (V^Q(W_T) + E^Q(W_T)^2) = T e^{-rT}$

次に $E_t = E^Q(e^{-rT} W_T^2 | \mathcal{F}_t) = e^{-rT} E^Q((W_T - W_t)^2 + 2(W_T - W_t) W_t + W_t^2 | \mathcal{F}_t) = e^{-rT} (T - t + W_t^2)$ よって $dE_t = 2e^{-rT} W_t dW_t$. つまり, $\phi_t = (\sigma S_t')^{-1} 2e^{-rT} W_t$ また, $\psi_t = E_t - \phi_t S_t' = e^{-rT} (W_t^2 - t + T - (2/\sigma) W_t)$

例 3.2 デリバティブ W_T^3

まず, 価格 $= E^Q(e^{-rT} W_T^3) = e^{-rT} E(N(0, T)^3) = 0$

次に $E_t = E^Q(e^{-rT} W_T^3 | \mathcal{F}_t) = e^{-rT} E^Q((W_T - W_t)^3 + 3(W_T - W_t)^2 W_t + 3(W_T - W_t) W_t^2 + W_t^3 | \mathcal{F}_t) = e^{-rT} (3(T - t) W_t + W_t^3)$ よって $dE_t = 3e^{-rT} (W_t^2 + (T - t)) dW_t$. つまり, $\phi_t = (\sigma S_t')^{-1} 3e^{-rT} (W_t^2 + (T - t))$ また, $\psi_t = E_t - \phi_t S_t' = e^{-rT} (W_t^3 + 3(T - t) W_t - (3/\sigma) (W_t^2 + T - t))$

例 3.3 デリバティブ e^{aW_T}

まず, 価格 $= E^Q(e^{-rT} e^{aW_T}) = e^{-rT + (1/2)a^2 T}$

また, $E(e^{-rT} e^{aW_t} | \mathcal{F}_t) = E(e^{-rT} e^{aW_t} e^{a(W_T - W_t)} | \mathcal{F}_t) = e^{-rT + aW_t + (1/2)(T-t)a^2}$, よって伊藤の公式を用いて,

$$dE_t = \alpha e^{-rT + (1/2)\alpha^2 T + \alpha w_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t} dW_t$$

$dE_t = \phi_t dS'_t$ となる ϕ_t がデルタなので、 $\phi_t = (\sigma S'_t)^{-1} \alpha e^{-rT + \alpha W_t + (1/2)\alpha^2(T-t)}$ 、 $\phi_t = (1 - (\alpha/\sigma)) e^{-rT + \alpha W_t + (1/2)\alpha^2(T-t)}$.

例 3.4 先物 $S_T - K$

まず、価格 $= E^Q(e^{-rT}(S_T - K)) = S - Ke^{-rT}$.

$E_t = E^Q(e^{-rT}(S_T - K) | \mathcal{F}_t) = S'_t - Ke^{-rT}$ よって $dE_t = dS'_t$ つまり、 $\phi_t = 1$ また、 $\phi_t = E_t - \phi_t S'_t = -Ke^{-rT}$ となり前にみた現物と先物の無裁定関係で求めたものと一致する。

例 3.5 コールオプション $\max(S_T - K, 0)$

まず、価格

$$E_0 = E^Q(e^{-rT}(\max(S_T - K, 0))) = C(T, S)$$

$$= S\Phi\left(\frac{\log\frac{S}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\log\frac{S}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right). \quad (\text{ブラック ショールズ式})$$

また

$$E_t = E^Q(e^{-rT}(\max(S_T - K, 0)) | \mathcal{F}_t) = e^{-rt} E^Q(e^{-r(T-t)} \max(S_t e^{\sigma(W_T - W_t) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} - K, 0) | \mathcal{F}_t) = e^{-rt} C(T-t, S_t)$$

よって、 E_t はマルチングールなので、伊藤の公式を用い、ドリフト項=0 に注意して

$$\begin{aligned} dE_t &= e^{-rt} \frac{\partial C}{\partial S}(T-t, S_t) \sigma S_t dW_t \\ &+ e^{-rt} \left(-rC(T-t, S_t) - \frac{\partial C}{\partial T}(T-t, S_t) + rS_t \frac{\partial C}{\partial S}(T-t, S_t) + (1/2) \right. \\ &\quad \left. \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(T-t, S_t) \right) dt = e^{-rt} \frac{\partial C}{\partial S}(T-t, S_t) \sigma S_t dW_t \end{aligned}$$

よって $dE_t = \phi_t dS'_t$ となるデルタ ϕ_t は

$$\phi_t = \frac{\partial C}{\partial S}(T-t, S_t) = \Phi\left(\frac{\log\frac{S}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

となりよく知られた結果に一致する。さらに ϕ_t を計算すると、 $\phi_t = -Ke^{-rT}\Phi$

$\left(\frac{\log \frac{S}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)$ となり, つまり, ブラック・ショールズ・コール

オプション価格式自体が複製ポートフォリオを表していることもわかる. ([3], [9])

注 3.2 ブラックショールズ偏微分方程式

上の例で実はドリフト項 = 0 という式がブラックショールズ偏微分方程式となるのである. 実際,

$$-rC(T-t, S_t) - \frac{\partial C}{\partial T}(T-t, S_t) + rS_t \frac{\partial C}{\partial S}(T-t, S_t) + (1/2)\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(T-t, S_t) = 0$$

これに境界条件 $C(0, S) = \max(S - K, 0)$ をつけて解いてもブラック・ショールズ式が得られる.

例 3.6 デリバティブ $f(S_T)$

上の例と同様に 価格 = $E^Q(e^{-rt}f(S_T))$ ($=u(T, S)$ とおく)

すると, $E_t = E(e^{-rt}f(S_T) | \mathcal{F}_t) = e^{-rt}u(T-t, S_t)$, よって伊藤の公式を用いて,

$$\begin{aligned} dE_t &= e^{-rt} \frac{\partial u}{\partial S}(T-t, S_t) \sigma S_t dW_t \\ &+ e^{-rt} \left(-ru(T-t, S_t) - \frac{\partial u}{\partial T}(T-t, S_t) + rS_t \frac{\partial u}{\partial S}(T-t, S_t) + (1/2)\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2}(T-t, S_t) \right) dt \\ &= e^{-rt} \frac{\partial u}{\partial S}(T-t, S_t) \sigma S_t dW_t. \end{aligned}$$

よって $dE_t = \phi_t dS_t$ となるデルタ ϕ_t は

$$\frac{\partial u}{\partial S}(T-t, S_t)$$

となる. さらに ϕ_t を計算すると,

$$\phi_t = e^{-rt}u(T-t, S_t) - e^{-rt}S_t \frac{\partial u}{\partial S}(T-t, S_t).$$

ブラックショールズ偏微分方程式は,

$$-ru(T-t, S_t) - \frac{\partial u}{\partial T}(T-t, S_t) + rS_t \frac{\partial u}{\partial S}(T-t, S_t) + (1/2)\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2}(T-t, S_t) = 0$$

これに境界条件 $u(0, S) = f(S)$ をつけて解いても解が得られる。

例 3.7 デリバティブ S_t^2 (パワーオプション)

上の例で $f(S) = S^2$ としたもので、計算結果だけを書いておくと 価格 = $S_t^2 e^{(r+\sigma^2)T}$, $\phi_t = 2S_t e^{(r+\sigma^2)(T-t)}$, $\psi_t = -e^{-rt} S_t^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)}$.

例 3.8 デリバティブ $\int_0^T W_s ds$

これも結果だけを書いておこう。 価格 = 0, $\phi_t = (\sigma S_t)^{-1} e^{-rt} (T-t)$, $\psi_t = e^{-rt} (\int_0^T W_s ds + W_t(T-t) - \frac{T-t}{\sigma})$.

注 3.3 他にも、計算できるデリバティブの例として、 W_T^2 , $e^{aW_T} \beta^{W_T^2}$, $\int_0^T W_s^2 ds$, S_T^2 などを挙げておく。

例 3.9 エキゾティック・オプション

通常、デリバティブは次の2種類に分類される。

デリバティブ $\left\{ \begin{array}{l} \text{標準的デリバティブ (先物, コール, プットなどの標準的金融派生商品)} \\ \text{エキゾティック・オプション} \end{array} \right.$

上の分類からもわかるようにエキゾティック・オプションは標準的ではないオプションで通常相対取引で売買される。種類も豊富であるがそのうちいくつかを挙げてみよう。また、通常のオプションはそのペイオフが満期時の株価のみに依存するのに対し、エキゾティック・オプションは経路依存型(株価の過去の履歴に依存する)ものが多い。以下はその満期時におけるペイオフ X で例示する。また、ここ挙げたエキゾティック・オプションの価格と複製ポートフォリオは、すべて計算されているが、紙面の関係上省略せざるを得ない。エキゾティック・オプションといってもすべて数学的には、 $\mathcal{F}_T$ 可測確率変数(時刻 T までの W_s で決まる確率変数(Wiener 汎関数))であり、あとは、この節で述べた処方箋にのっとって計算を実行すればよいのである。といっても実際の計算は大変であり、closed form が求まらない場合も沢山存在する。また、価格が求まったとしてもそれから複製ポートフォリオを求めるにはマルチンゲール表現定理を用いてデルタヘッジを計算しなければならず(デルタヘッジは抽象的には存在は示されているがすべての Wiener 汎関数に通用する求め方は存在せず個々にあたらねばなら

ない.), 大変であることのほうが多いことに注意する.¹¹⁾ ([1] [4] [5] [6] [7] [8] [10] [11] [12] [13] [14])

・アベレージ・オプション (アジアンオプションともいう)

はずれ値に影響されにくいという特徴があり, とくに取引高の少ない商品に使われることが多い. また, ボラティリティも小さいためオプション料も安く, ヘッジングコストを軽減できる. ([6] [11] [14])

- 相加平均・フィックスド・ストライク・オプション ($\max(A_T - K, 0)$)
  - 相加平均・フローティング・ストライク・オプション ($\max(S_T - A_T, 0)$)
  - 幾何平均・フィックスド・ストライク・オプション ($\max(G_T - K, 0)$)
  - 幾何平均・フローティング・ストライク・オプション ($\max(S_T - G_T, 0)$)
- などがある.

ここで, $A_T = (1/T) \int_0^T S_t dt$, $G_T = e^{\frac{1}{T} \int_0^T \log S_t dt}$, S_t は t 時点の株価

・ノックイン, ノックアウト・オプション

「満期以前に株価がある値 L に到達すれば, そこからオプション契約発生, もし満期時まで株価がその値に到達しなければオプション契約消滅」という付帯条件付のオプション契約がノックインオプションで, 「満期以前に株価がある値 L に到達すれば, オプション契約消滅, もし満期時まで株価がその値に到達しなければオプション契約発生」という付帯条件付のオプション契約がノックアウト, ノックインオプションで, どちらも付帯条件のついている分オプション料が安くてすむという特徴がある. ([10], [13])

- ノックイン・オプション $1_{\{\tau < T\}} \max(S_T - K, 0)$
- ノックアウト・オプション $1_{\{\tau > T\}} \max(S_T - K, 0)$

ここで, $\tau = \inf\{t | S_t = L\}$, $1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

・コンパウンド・オプション

$T_2 > T_1$ として, 時点 T_1 で満期 T_2 のオプションを K で買う (または売る) ことの出来る権利. コール・プットそのものがボラティリティと密接な関係があり, オプションの意味を考えてもすぐわかるようにボラティリティが大きければ大きいほどオプション保有は有利であり, ボラティリティが小さいとオプション保有

は不利である。こういった意味でボラティリティそのものをオプションとある意味で同一視し、ボラティリティそのものは売買されていないので、それをヘッジする代替手段としてコンパウンドオプションを用いるのである。ボラティリティはマーケットにとって非常に大事な指標であり、したがって

コンパウンド・オプションも重要な存在意義がある。([10], [13])

— コンパウンド・オプション $\max(C(T_1, S_{T_1}) - K, 0)$

ここで、 $C(t, S_t)$ は時点 t 、株価 S_t における満期 T_2 、行使価格 K のコールオプションの価値

・ルックバック・オプション

満期以前の株価の最大値(または最小値)に関するオプション、どちらにしてもはずれ値を相手にするのでボラティリティが高くなり権利行使されやすくオプション保有者は有利である。もちろん、その分オプション料は非常に高くなってしまう。([10], [13])

— ルックバックオプション $\max(M_T - K, 0)$

ここで、 $M_T = \max_{0 \leq t \leq T}(S_t)$

・ α パーセンタイルオプション (クオンタイルオプションともいう)

株価過程の順序統計量に基づくオプションでははずれ値に強いという特徴がある。例えば上で述べたルックバックオプションでの最大値(100%点)の代わりに株価過程の(75%点, 4分位点)を用いるのである。一橋大学大学院国際企業戦略研究科の三浦教授が考案された。また、価格計算と複製ポートフォリオ構築は立命館大学の赤堀氏と筆者が行った。([12], [1], [5], [7], [8])

— α パーセンタイル・フィックスド・ストライク・オプション

$\max(A(T, \alpha) - K, 0)$

— α パーセンタイル・フローティング・ストライク・オプション

$\max(S_T - A(T, \alpha), 0)$

— α, β パーセンタイル・オプション $\max(A(T, \alpha) - A(T, \beta), 0)$

ここで、 $A(T, \alpha)$ は株価過程の上側 α パーセンタイル点

- 0) ここで r は安全連続利子率で現在価値1のものが、 t 期間後に e^{rt} になる。
- 1) $\mu + \sigma > r > 0 > \mu - \sigma$ と仮定するのは意味を考えれば自然である。そうでなければ、株と安全債券の取引だけで裁定が起きてしまう。
- 2) 確率測度 P と確率測度 Q が同値であるとは、 $P(A) = 1 \iff Q(A) = 1$ であること。つまり、確率1の事象が変わらないことである。
- 3) ここで、 ϕ_t は時刻 $t-1$ から時刻 t までの株の持ち単位数で、 ψ_t は時刻 $t-1$ から時刻 t までの安全債券の持ち単位数である。この ϕ_t のことをデルタヘッジと呼ぶこともある。
- 4) マルチンゲールについて、もっと詳しくは [9],[13]
- 5) ϕ_t, ψ_t は定数である。
- 6) 勿論、後に述べる連続モデルと同じように ポートフォリオ $V_t = \phi_t S_t + \psi_t e^{rt}$ が資金自己調達であるとは、 $V_t - V_{t-1} = \phi_t (S_t - S_{t-1}) + \psi_t ((1+r)^t - (1+r)^{t-1})$ となることで、これも同様にして証明できる。
- 7) (μ, σ) と (μ', σ') の関係は $\mu' = (1/2)(\log(1+\mu+\sigma) + \log(1+\mu-\sigma)) \approx \mu - (1/2)(\mu^2 + \sigma^2)$, $\sigma' = (1/2)(\log(1+\mu+\sigma) - \log(1+\mu-\sigma)) \approx \sigma - \mu\sigma$ また、 $r' \approx r - (1/2)r^2$ であることに注意する。 $\mu \approx 0, \sigma \approx 0, r \approx 0$ なので、1次近似ではほとんど、 $\mu' \approx \mu, \sigma' \approx \sigma, r' \approx r$ である。
- 8) $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy$
- 9) ここで、 ϕ_t は時刻 t から少し時間のたった時刻 $t+\Delta t$ までの株の持ち単位数で、 ψ_t は時刻 t から少し時間のたった時刻 $t+\Delta t$ までの安全債券の持ち単位数である。
- 10) 関係する数学者の名前をとって、カメロン・マルチン・ギルサノフ・丸山の定理といわれることもある。
- 11) その分、数学的には興味深い対象でもあるのだが。

参考文献

- [1] Akahori, J., Some formulae for a new type of path-dependent option. Ann. Appl. Probab. 5, (1995), 383-388.
- [2] Black F. and Sholes M. The pricing of options and corporate liabilities Journal of Political Economics 81, (1973) 637-659.
- [3] Baxter, M. and Rennie, A., Financial Calculus, Cambridge University Press, 1996. (バクスター・レニー著, 藤田岳彦・高岡浩一郎・塩谷匡介訳, デリバティブ価格理論入門, シグマベイスキャピタル社, 2001)

- [4] Dassios, A. The distribution of the quantile of a Brownian motion with drift and the pricing related path-dependent options, *Ann. Appl. Probab.*, 5 (1995), 389-398.
- [5] Fujita T., On the price of the α -percentile options., Hitotsubashi University Faculty of Commerce Working Paper Series No.24 (1997).
- [6] Fujita, T. and Futagi, S., On the replicating portfolio of some exotic options, *Proceeding of the 31st ISIE International Symposium on Stochastic systems Theory and Its Applications Yokohama (1999)*, 107-112.
- [7] Fujita, T., A Note on the Joint Distribution of α , β -Percentiles and Its Application to the Option Pricing, *Asia-Pacific Financial Markets*, 7 (49) December (2000) 339-344.
- [8] 藤田岳彦, デリバティブの価格理論 (エキゾチックオプションを中心に), 応用数理, 第11巻 4号, 岩波書店, (2001).
- [9] 藤田岳彦, (森真と共著) 確率・統計入門 数理ファイナンスへの適用, 講談社サイエンティフィク, 1999.
- [10] Karatzas, I. and Shreve, S. E. *Methods of Mathematical Finance*, Springer-verlag, New York 1998.
- [11] Kemna, A. G. Z. and Voast, A. C. F. A pricing method for options based on average asset values, *Journal of Banking and Finance*, 14 (1990), 113-129.
- [12] Miura, R. A note on look-back option based on order statistics, *Hitotsubashi Journal of Commerce and Management*, 27 (1992), 15-28.
- [13] Musiela M and Rutokowski P. *Martingale methods in Financial Modeling* Springer-Verlag New York, 1997.
- [14] Yor, M., On some exponential functionals of Brownian motion, *Advances in Applied Probability*, 24 (1992), 509-531.

(一橋大学大学院商学研究科教授)