投資家の最適化条件による資産価格の決定

―― Esscher 原理の再検討 ――

大　橋　和　彦

1　基本的アイディアと論文の目的

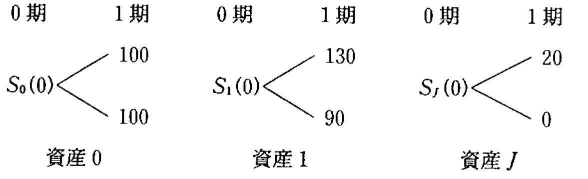
不確実性下における資産価値の評価．これは，ファイナンスの中心的課題の一つである．様々なデリバティブ公式からも分かるように，少しでも現実的な設定のもとこれを行うには難解な計算を避けて通れない．しかしながら，実はその原理は極めて単純であり，古典的な経済学が明らかにした簡明な数学的構造を基礎に構築されたものに過ぎない．そこで，まず，できるだけ単純な例から出発してこのことを理解しよう．

0 期と 1 期から成り，1 期に 2 つの状態がある経済を考える．各期各状態には，次の期までは保存できない財が一種類だけあるとする．さらに，1 期の各状態（状態 1 と状態 2）におけるペイオフが（1 期の各状態の財で計って）100，で 0 期の価格が（0 期の財で計って）$S_0(0)$である資産（これを資産 0 と呼ぶ．）が存在しこれが自由に取引できるものとする．但し，$S_0(0)$は既知であるとする．

ここで，この経済において，1 期の状態 1 で20，状態 2 で 0 のペイオフを持つ資産（これを資産 J と呼ぶ．）の 0 期における価格$S_J(0)$を求めることを考えよう．そのために，次の二つの場合について考察を行い，両者を比較する．

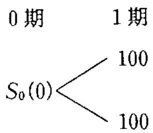
はじめに，資産 0 に加えて，1 期の状態1におけるペイオフが130，状態 2 におけるペイオフが90で，0 期の価格が$S_1(0)$である資産（これを資産 1 と呼ぶ．）が存在し，自由に取引できる場合を考える．但し，$S_1(0)$も既知である．このとき，資産 J の 0 期の価格$S_J(0)$はいくらになるだろうか？答えは$S_J(0)=(-0.45)S_0$

$(0)+(0.5)S_1(0)$となる．なぜならば，0期に資産0を0.45単位空売りし，同時に資産1を0.5単位購入するポートフォリオを構成すれば，1期の状態1に$(-0.45)100+(0.5)130=20$，1期の状態2に$(-0.45)100+(0.5)90=0$という，証券Jと全く同じ1期のペイオフを手に入れられるからである．裁定の機会が存在しないなら，同じペイオフには同じ価格がつかなくてはならない．よって，証券Jの0期の価格は，それと同じペイオフをもたらすポートフォリオの0期の価値$(-0.45)S_0(0)+(0.5)S_1(0)$と等しくなる．

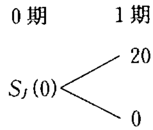


この「裁定が無い場合，同じペイオフには同じ価格がつく．」という理屈が，無裁定（no arbitrage）による価格決定の本質である．この場合，資産Jと同じペイオフを持つポートフォリオを構成できるだけ多くの種類の資産（資産0と資産1）が存在し，かつそれらのペイオフと価格が分かっているので，無裁定条件から資産Jの価格を求められるのである．

では，取引できる資産は資産0しかない，とするならどうであろう．この場合，資産0の1期のペイオフは（状態1，状態2の順番で）1単位あたり（100，100）．これを何単位保有しようと資産Jと同じペイオフ（20，0）は複製できない．よって，無裁定による価格決定の議論は使えない．資産Jと同じペイオフを生むポートフォリオを組めるだけ多くの種類の資産が存在しないので，無裁定では資産Jの価格を決められないのである．



資産0



資産J

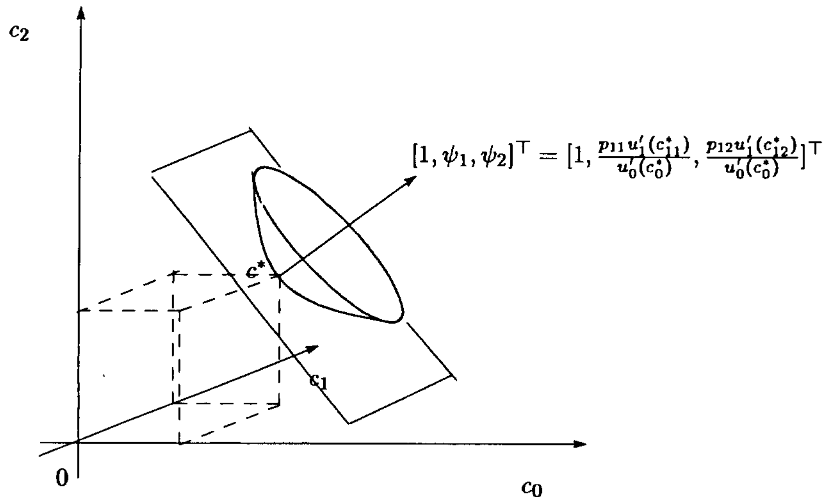
ここで，資産Jは，資産1を原資産とする満期1期，行使価格110のコールオプションであることに注意しよう．すると，以上の考察から，無裁定条件だけでデリバティブの価格が求められるには，価格とペイオフが既知の資産が十分多くの種類取引されていなければならない，ということになる．これが，無裁定による価格決定の限界である．

ところが，近年，取引されている資産の種類が少なく無裁定による価格決定ができない状況（場合によっては原資産すら取引されていない状況）においてデリバティブ価格を求める，という問題がしばしば提起されるようになっている．無裁定で対応できる範囲を超えるこの問題にどう答えるか？実は，ここで，投資家の最適化と価格の関係という経済学の基礎的結果が利用されることになる．

上例に戻り，資産0と資産Jだけが与えられた経済に，投資家が存在するものとしよう．0期と1期の各々の状態における投資家の財の初期保有量は$e=[e_0, e_{11}, e_{12}]^T$，効用関数は$U(c)=u_0(c_0)+E[u_1(c_1)]=u_0(c_0)+p_1u_1(c_{11})+p_2u_1(c_{12})$で与えられるとする．但し$c=[c_0, c_{11}, c_{12}]^T$，$c_1=[c_{11}, c_{12}]^T$，$p_1(p_2)$は状態1（状態2）が起きる確率である．

このとき，この投資家が，資産0と資産Jを取引することで，最適消費$c^*=[c_0^*, c_{11}^*, c_{12}^*]^T$を達成したと仮定しよう．0期における資産0の取得量をθ_0，資産Jの取得量をθ_Jとするならば，c^*は次の最適化問題の解となる．

$$Max_{(\theta_0,\theta_J)}U(c)\text{s.t. } c\in\left\{c=\begin{bmatrix}c_0\\c_{11}\\c_{12}\end{bmatrix}\middle|\ \begin{matrix}c_0=e_0-(S_0(0)\,\theta_0+S_J(0)\,\theta_J)\\ \begin{bmatrix}c_{11}\\c_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_{11}\\e_{12}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}100\\100\end{bmatrix}\theta_0+\begin{bmatrix}20\\0\end{bmatrix}\theta_J\end{matrix}\right\}$$



このとき，最適化の一階の条件から０期の資産の価格について次の関係式を得る．

$$S_0(0) = \frac{p_{11}u_1'(c_{11}^*)100 + p_{12}u_1'(c_{12}^*)100}{u_0'(c_0^*)}, \quad S_J(0) = \frac{p_{11}u_1'(c_{11}^*)20 + p_{12}u_1'(c_{12}^*)0}{u_0'(c_0^*)}$$

即ち，無裁定条件では資産価格を求められない場合であっても，それらの資産を取引して最適消費を達成する投資家が存在すると仮定した上で，その投資家の効用関数と最適消費を定められるならば，最適化の一階の条件から資産価格を定めることができるのである．

この点をさらに整理するため，１期の状態１で１，状態２で０のペイオフを持つ資産と，逆に１期の状態１で０，状態２で１のペイオフを持つ資産を考え，前者を資産$A1$，後者を資産$A2$と呼ぼう．このとき，資産$A1(A2)$の０期の価格を$\psi_1(\psi_2)$で表すなら，$\psi_1(\psi_2)$は１期の状態１（状態２）における財１単位の０期における価値を表すことになる．この意味で，$\psi_1(\psi_2)$は，０期における１期の状態１（状態２）の状態価格と呼ばれる．

ここで，資産０と資産Jの適当なポートフォリオによって，資産$A1$と資産$A2$

の1期のペイオフが複製できることを確認しよう．逆に，資産$A1$と資産$A2$の適当なポートフォリオで，資産0と資産Jの1期のペイオフを複製できることは明らかである．よって，資産0と資産Jを取引することで最適消費$c^*=[c_0^*, c_{11}^*, c_{12}^*]^T$を達成することと，資産$A1$と資産$A2$を取引することで最適消費$c^*=[c_0^*, c_{11}^*, c_{12}^*]^T$を達成することは同値であり，最適消費$c^*$は以下の最適化問題の解となる．

$$Max_{(\theta_{A1},\theta_{A2})}U(c)\text{s.t. } c\in\left\{c=\begin{bmatrix}c_0\\c_{11}\\c_{12}\end{bmatrix}\middle|\ \begin{matrix}c_0=e_0-(\psi_1\theta_{A1}+\psi_2\theta_{A2})\\ \begin{bmatrix}c_{11}\\c_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_{11}\\e_{12}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\theta_{A1}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\theta_{A2}\end{matrix}\right\}$$

これより，最適化の一階の条件から次の関係式を得る．

$$\psi_n=\frac{p_{1n}u_1'(c_{1n}^*)}{u_0'(c_0^*)}\qquad (n=1,\ 2)$$

即ち，0期における1期の状態価格（0期の財で評価した1期の状態の財1単位の価値）は，投資家の最適消費点で評価した，1期の状態と0期における消費の限界代替率に等しい．

一般に，1期に状態がN個ある場合についても同様の関係が成り立つ．このとき，1期のペイオフが$D=[D_{11}, D_{12}, \cdots, D_{1N}]^T$である資産$j$の0期の価格は，$S_j(0)=\psi_1D_{11}+\psi_2D_{12}, \cdots, +\psi_ND_{1N}$で与えられるので，状態価格と投資家の限界代替率との関係$\psi_n=\frac{p_{1n}u_1'(c_{1n}^*)}{u_0'(c_0^*)}$ $(\forall n)$から，$S_j(0)=p_{11}\frac{u_1'(c_{11}^*)}{u_0'(c_0^*)}D_{11}+p_{12}\frac{u_1'(c_{12}^*)}{u_0'(c_0^*)}D_{12}+,\cdots+p_{1N}\frac{u_1'(c_{1N}^*)}{u_0'(c_0^*)}D_{1N}$．即ち，ペイオフ$D$を持つ資産$j$の価格は，$S_j(0)=E\left[\frac{u_1'(c_1^*)}{u_0'(c_0^*)}D_1\right]$と求まる．

よって，無裁定では価格を求められない場合であっても，投資家の最適消費点と効用関数を定められるなら，「(状態) 価格＝限界代替率」という最適投資の一階の条件を利用することで，ペイオフを与えられた任意の資産の価格を決定できるのである．

この関係式は，Lucas (1978) が動学モデルにおける定式化を与えて以来，資産価格と最適投資の基本的関係式として広く利用されている．特に，マクロ経済

学では，代表的経済主体（representative agent）に関して成り立つこの資産価格と総消費との関係について過去20年間広範な研究が続けられ，関連する文献のリストだけで一冊の本になる．（サーベイ論文のKocherlakota（1996），Saito（1999），祝迫（2001），堀（1999）等を参照．）

ファイナンスにおいても，例えば有名なCIRモデル（Cox, Ingersoll, and Ross (1985a, 1985b)）は，代表的経済主体の最適消費と資産価格に成り立つこの関係を利用して均衡金利過程を導くものである．また，無裁定では価格を定められない場合についても，例えばNaik and Lee（1990）ではジャンプ・リスク下における資産価格が，この関係式を利用して分析されている．さらに最近では，原資産が取引されていない天候デリバティブの価格決定や保険数理での保険料算出式の解釈に，この関係式が利用されているのである．

以上のように，無裁定では価格を求められない場合であっても，投資家の最適化条件を利用すれば資産価格を求めることができる．よって，どうしても価格を求めたいとき，この手法は便利な道具となろう．しかしながら，ここで注意しなければならないことがある．それは，資産価格を求めるために仮定した投資家（最適消費と効用関数）が現実の経済と整合的なものなのか，という問いである．もしも整合的であるなら，求められた資産価格は現実の良い近似となっているであろう．しかし，もしも整合的でないなら，求めた資産価格も信頼できない．投資家の最適化条件から資産価格を求める場合，仮定する投資家が現実の経済の良い描写になっているかどうか，必ず吟味しなければならないのである．

それだけではない．いま，何らかの理由である資産価格式を利用しているが，この価格式の現実妥当性を調べたいと考えているしよう．このとき，もしも価格式を投資家の最適化条件として導けるならば，この問いに答えることができる．その投資家と現実の経済の整合性を吟味することで，導出された資産価格式が妥当なものかどうか確かめられるからである．実は，経済モデルを使って資産価格を求める本当の利点はここにある．

そこで，本論文は，マクロ経済学やファイナンスで明らかにされた研究成果をもとに，最適化条件を用いた資産価格の決定に用いられる投資家の効用関数を吟味し，特にそのような経済モデルからの再解釈を与えられた保険料算出式を経済学的見地から検討する.

構成は以下の通り．第2章では基本的なモデル提示し，投資家が一般の期待効用関数を持つ場合について，動学的設定において成立する資産価格式を報告する．第3章ではこの結果を特定化し，投資家が指数型（CARA（constant absolute risk aversion）型）期待効用関数を持つ場合の資産価格式を示す．そして，この資産価格式と保険料算出に関するEsscher原理が（適当な条件のもと）同値であることを示す．第4章では，指数型期待効用関数から導出される投資行動の現実妥当性を議論することによって，この効用関数を持つ投資家の最適化条件と同値であるEsscher原理の現実妥当性を再検討する．最後に，第5章で，投資家の最適化条件のファイナンスにおける他の利用法を報告して本論文の結論とする.

2　モデルと資産価格決定式

Lucas（1978）以来のマクロ経済学での定式化に従い，ここでは離散時間モデルを考える．（連続時間モデルに関する同様の結果についてはDuffie（1991, 1996）等を参照.）

$0, 1, \cdots, T$の期があり，不確実性が完備な確率空間（$\Omega, \mathcal{F}, P$）で表される経済を想定する．各期の情報は，完備化されたσ加法族の増大列$\mathrm{F}=\{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_T\}$で表される．但し，$\mathcal{F}_0$は$\{\phi, \Omega\}$を含む最小の完備な$\sigma$加法族であり，$\mathcal{F}_T=\mathcal{F}$であるとする.

経済には$J+1$種類の資産が存在する．（資産の意味する対象は広く，株式・債券・それらのデリバティブの他，保険契約や天候デリバティブ等も含まれる．経済モデルでは，そもそもそれらのどの一つも排除されていない.）資産$j(j=0, \cdots, J)$のt期の価格を$S_j(t)$，配当を$\delta(t)$，それらの列を$S(t)=(S_0(t), S_1(t), \cdots, S_J(t))^{\mathrm{T}}$及び$\delta(t)=(\delta_0(t), \delta_1(t), \cdots, \delta_J(t))^{\mathrm{T}}$で表す．任意の$t$について$S(t)$及び$\delta(t)$は$\mathcal{F}_t$可測であるとする.

投資家の t期における財の初期賦存量（endowment）を$e(t)$，消費量を$c(t)$，t期から $t+1$ 期まで保有する資産のポートフォリオを$\theta(t)=(\theta_0(t),\theta_1(t),\cdots,\theta_J(0))^{\mathrm{T}}$で表す．ここで，$e(t)$，$c(t)$，及び$\theta(t)$は$\mathcal{F}_t$可測であるとする．この投資家が消費の過程$c=(c(0),c(1),\cdots,c(T))$から得る満足は，効用関数$\mathrm{U}(c)=E[\Sigma_{t=0}^{T}e^{-\beta t}u(c(t))]$で表される．但し，$u$は狭義増加で可微分な狭義凹関数とする．投資家の目的は，各期に資産を取引し，予算制約の範囲内で最も高い効用を与える消費を達成することにある．即ち，

$$Max_{c\in C}E[\Sigma_{t=0}^{T}e^{-\beta t}u(c(t))]s.t.\ c(t)=$$
$$e(t)+\delta(t)^{\mathrm{T}}\theta(t-1)-S(t)^{\mathrm{T}}(\theta(t)-\theta(t-1)) \quad (1)$$

の解である最適消費$c^*=(c^*(0),c^*(1),\cdots,c^*(T))$を達成することが，投資家の目的である．（$C$は選択可能な消費過程の集合を表し，効用関数$U(\cdot)$は$C$上で定義されるものとする.）

ここで，最適消費c^*が存在するとしよう．（この十分条件については Duffie (1991, 1996) 等を参照.）最適化の一階の条件から以下を得る．

補題（確率オイラー方程式）：

$$S_j(t)=E[e^{-\beta}\frac{u'(c^*(t+1))}{u'(c^*(t))}(S_j(t+1)+\delta_j(t+1))|\mathcal{F}_t] \quad \text{a.s.} \qquad \forall j \quad (2)$$

(2)式は前節に示した関係式の多期間への一般化であり，確率オイラー方程式 (stochastic Euler equation) と呼ばれる．既に述べたように，この結果は投資家の最適化から資産価格を特徴付ける上で重要な役割を果たす．実際，T期から帰納的に以下の資産価格式を得る．

命題１（最適化条件による資産価格式）：

$$S_j(t)=E[\Sigma_{s=t+1}^{T}e^{-\beta(s-t)}\frac{u'(c^*(s))}{u'(c^*(t))}\delta_j(s)|\mathcal{F}_t] \quad \text{a.s.} \qquad \forall j \text{ and } t \quad (3)$$

もしもこの経済が生産の行われない交換経済（exchange economy）であり，投資家が代表的経済主体（representative agent）で，$e=(e(0),e(1),\cdots,e(T))$が財の総初期賦存量（経済全体に与えられた財の量）であるなら，代表的

経済主体の均衡における最適消費はeとなるので，命題1においてc^*をeで置き換えた式が代表的経済主体による均衡資産価格を与えることになる．（代表的経済主体の構成は，Huang and Litzenberger（1988）やDuffie（1991，1996）等の教科書に詳しく説明されている．ファイナンスへの適用に関する主要論文としては，Rubinstein（1974），Huang（1987），Karatzas et. al（1990）等を参照.）

資産価格を求めるだけなら一人の投資家の最適化条件さえ分かれば十分であり，必ずしも代表的経済主体を利用する必要がないことは，命題1から自明であろう．それにもかかわらず，しばしば代表的経済主体モデルが資産価格評価に利用される理由は，均衡における資産価格の性質を探求する必要があるためである．この意味で，代表的経済主体は，分析の目的に応じて課される制約であることに注意されたい．（例えば，Davis（2001）参照.）

任意の資産jについて，任意のtに関して$\phi(t)$は$\mathcal{F}_t$可測であり，かつ以下の式

$$\phi(t)S_j(t)=E[\Sigma_{s=t+1}^{T}\phi(s)\delta_j(s)|\mathcal{F}_t] \quad \text{a.s.} \qquad \forall j \text{ and } t \tag{4}$$

を満たす確率過程$\phi=(\phi(0),\phi(1),\cdots,\phi(T))$を，価格密度（price density）過程と呼ぶ．いま，(3)式を利用して，投資家の最適化行動から価格密度過程を以下のように定義しよう．

$$\phi(t)=e^{-\beta t}\frac{u'(c^*(t))}{u'(c^*(0))} \quad \text{a.s.} \qquad \forall_t \tag{5}$$

t期の任意の事象Aについて$E[\phi(t)1_A]=E[e^{-\beta t}\frac{u'(c^*(t))}{u'(c^*(0))}1_A]$であることに注意せよ．この左辺は0期における$t$期の事象$A$の状態価格，右辺は0期と$t$期の事象$A$の間の消費の限界代替率なので，(5)式が前節に示された状態価格表現の一般化であることが分かる．

そこで，t期のキャッシュフロー$D(t)$の0期における価値$S_{D(t)}(0)$を以下で定める．

$$S_{D(t)}(0)=E[\phi(t)D(t)]=E[e^{-\beta t}\frac{u'(c^*(t))}{u'(c^*(0))}D(t)] \tag{6}$$

(6)式に従えば，t期のキャッシュフロー$D(t)$が資産0，1，…，Jのポートフォリオの取引で複製できない場合についても，その0期の価値$S_{D(t)}(0)$が定められるこ

となる．これが，多期間モデルにおける投資家の最適化条件による資産価格決定式に他ならない．

3　効用関数uの特定化とEsscher原理の導出

(6)式を実際に利用するためには，投資家の最適消費c^*と効用関数uを特定化する必要がある．このうち最適消費については，例えばマクロ経済学では，代表的経済主体モデルを想定することによって一国の総消費を最適消費c^*とすることを正当化する．もちろん，それ以外の場合には，モデルに応じて最適消費c^*を適宜選ばれなければならない．

一方，効用関数については，研究が進んだマクロ経済学では単純な期待効用では表現できない関数を想定する場合も多いが，資産価格の計算でこれまで主に利用されている関数は最も基本的な次の2タイプとなる．(ここで，$-\infty<\alpha<1$，$\gamma>0$とする．)

(a)べき型$u(c)=\gamma^{1-\alpha}\dfrac{c^{\alpha}}{\alpha}$（$\alpha=0$の場合が，対数型$u(c)=\gamma\, log(c)$に対応する．），

(b)指数型$u(c)=\dfrac{-exp(-\gamma c)}{\gamma}$

最適化を行う投資家の効用関数がこのうちのどれかであると仮定し，最適消費c^*を先見的に選んでしまえば，それらを(6)式に代入することで，ともかくt期のキャッシュフロー$D(t)$の0期の価値$S_{D(t)}(0)$を求められることは明らかであろう．この意味で，どうしても価格を求めなければならない場合(6)式は便利な道具となる．

しかしながら，こうして得た価格を利用するには，それが妥当なものであるかどうか検証しなければならない．それには，価格式の導出のために仮定した効用関数と最適消費の妥当性を吟味する必要がある．マクロ経済学では，この点について長い研究の歴史があり，それによれば上記のべき型・指数型の効用関数を持つ単純な期待効用関数を想定した代表的経済主体モデルは，残念ながらあまり現実のデータと適合しないことが分かっている．(展望論文のKocherlakota

(1996)，Saito (1999)，祝迫 (2001)，堀 (1999) 等を参照.）近年，天候デリバティブの価格を計算するために上記3種類の関数を(6)式に用いるモデルが多数報告されているが (Cao and Wei (1998)，Davis (2000)，佐藤 (2001))，その利用にあたっては，このようなマクロ経済学の先行研究の結果を考慮する必要があろう.

一方，保険の世界では，投資家の最適化条件である(6)式から保険料算出式を導出する作業が行われている．そして特に，保険数理の代表的な保険料計算方法の一つである Esscher 原理が，(6)式で指数型期待効用関数を仮定した場合に等しいことが示されている．(Bühlmann (1980)，Bühlmann et. al. (1998)，Iwaki et. al. (2001) 等.）即ち，Esscher 原理を利用することは，指数型の期待効用関数を仮定することに他ならないのである.

これは(6)式から，以下のように簡単に示される．まず，$D(t)$をt期の保険金支払額としよう．また，この保険に対して0期に支払う保険料を$P(D(t):0)$としよう．このとき，Bühlmann et. al. (1998) の表記を援用すれば，割引率を考慮した Esscher 原理は，パラメーターλと割引率$K>0$に関して$P(D(t):0)$を次式で定めることと定義される.

$$P(D(t):0)=K\frac{E[D(t)exp(\lambda D(t))]}{E[exp(\lambda D(t))]} \quad . \tag{7}$$

(割引率を“考慮しない”通常の Esscher 原理は，$K=1$と置いた場合に対応する.）

ここで，$S_d(t:0)\equiv E[e^{-\beta t}\frac{u'(c^*(t))}{u'(c^*(0))}1]$で$S_d(t:0)$を定義しよう．$S_d(t:0)$は$t$期に確実に1支払う割引債の0期の価格である．この定義と(5)式から以下を得る.

$$\phi(t)=S_d(t:0)\frac{e^{-\beta t}u'(c^*(t))}{E[e^{-\beta t}u'(c^*(t))]} \tag{8}$$

.

これを(6)式に代入して以下を得る.

$$S_{D(t)}(0)=E[\phi(t)D(t)]=S_d(t:0)\frac{E[e^{-\beta t}u'(c^*(t))D(t)]}{E[e^{-\beta t}u'(c^*(t))]} \tag{9}$$

さらに，$u(c)=\frac{-exp(-\gamma c)}{\gamma}$とするならば，　$u'(c)=exp(-\gamma c)$ なので

$$S_{D(t)}(0)=E[\phi(t)D(t)]=S_d(t:0)\frac{E[e^{-\beta t}exp(-\gamma c^*(t))D(t)]}{E[e^{-\beta t}exp(-\gamma c^*(t))]} \tag{10}$$

となる．これより次の結果を得る．

命題 2 （指数型期待効用関数と Esscher 原理）：

$u(c)=\frac{-exp(-\gamma c)}{\gamma}$かつある$\nu$に対し$\nu D(t)=c^*(t)$ならば，$\lambda\equiv-\gamma\nu$に対し，

$$S_{D(t)}(0)=S_d(t:0)\frac{E[exp(\lambda D(t))D(t)]}{E[exp(\lambda D(t))]} \tag{11}$$

即ち，最適化を行う投資家が指数型の期待効用関数を持ち，t期の保険支払金$D(t)$がこの投資家のt期の最適消費$c^*(t)$のスカラー倍になっているのなら，t期の保険支払金$D(t)$の 0 期の価値$S_{D(t)}(0)$は，投資家の絶対的リスク回避度γと最適消費と保険金支払額の比率$\nu=c^*(t)/D(t)$の積×(-1)である$-\gamma\nu$をパラメーターλとし，満期t期の無リスク割引債の 0 期における価格$S_d(t:0)$を割引率Kとして計算された，（割引率を考慮した）Esscher 原理によって与えられる 0 期の保険料$P(D(t):0)$に等しい．

よって，Esscher 原理による保険料算出式と，指数型期待効用関数を持つ投資家の最適化条件から得られる保険料算出式は，（適当な条件のもと）同値となるのである[1)]．

4　経済学的見地からの Esscher 原理の再検討

投資家の最適化条件から資産価格式を導出する本当の利点は，仮定された投資家が現実の良い近似であるかどうかを吟味することで，得られた価格式の妥当性を評価できることにある．よって，Esscher 原理を指数型期待効用を持つ投資家の最適化条件として表現することの利点も，指数型期待効用で現実を記述することの妥当性を吟味することで，伝統的に利用されている Esscher 原理の妥当性を調べられることにある．

Bühlmann（1980）は，このように投資家の最適化条件から得られる資産価格式を用いて保険料を計算することを，経済学的保険料計算原理（economic premium principle）と呼び，1期間モデルにおいて⑾式に対応する価格式を導いた．Bühlmann et. al.（1998），Iwaki et. al.（2001）でも，経済学的保険料計算原理として⑼式と同値な保険料計算式を導き，Esscher 原理にも⑾式と同様の表現を与えている．しかしながら，これらの論文では保険料計算式の数学的導出を示すにとどまり，背景に仮定された経済モデル－特に効用関数－の現実妥当性の吟味はなされていない．その意味で，経済モデルを用いる利点が十分には生かされていないのである．

マクロ経済学では，利用する効用関数の現実的妥当性について長い研究の歴史がある．そのような研究成果を活用して行くことこそ，これまでになされた経済学的保険料計算原理の成果を発展させて行くべき方向となろう．ここでは，そのような方向への一歩として，指数型効用関数の現実妥当性を吟味することで Esscher 原理の妥当性を再検討したい．

そのために，まず経済モデルに解釈を与え，最適化をする投資家が一国全体もしくは保険業界全体を表すと考えよう．一つの国や業界全体があらかじめ定まった将来の時点に存在しなくなってしまうとは想定し難いので，投資家の効用をあらかじめ定められたT期までの期待効用とすることも解釈上困難である．そこで，⑴式において$T=\infty$と置き，投資目標にあらかじめ定められた最終時点は存在しないとして投資家の目的を表現することにする．（マクロ経済学ではこれは通常の設定である．）また，投資家は何らかの投資活動の結果として各期の所得を得るものと想定し，$e(t)=0$ $(t\geq 1)$と置く．

このような設定のもとでも，投資家が最適消費を実現するならば⑶式から⑾式までと同様の結果が得られることが分かっている．（Duffie（1996）参照．）従って，Esscher 原理による保険料算出式と，指数型期待効用関数を持つ投資家の最適化条件から得られる保険料算出式は，やはり（適当な条件のもと）同値なものとなる．

ここで，資産$j(=0,1,\cdots,J)$の$t-1$期からt期への粗収益率を$R_j(t)\equiv\dfrac{S_j(t)+\delta(t)}{S_j(t-1)}$と定義しよう．まず，将来のリスクの在り方が一定である場合の，指数型効用関数を持つ投資家の最適投資を求めたい．そこで，$R(t)\equiv(R_1(t),\cdots,R_J(t))^T$と定義し，$\{R(t)\}_{t\geq 1}$はi.i.d.であり，かつ資産0は無リスク資産である－即ち，ある定数$R_0>1$に対し$R_0(t)=R_0(\forall t\geq 1)$である－と仮定する．さらに，$t$期の所得を$W(t)$，リスクのある資産$j$への投資比率を$h_j(t)\,(j=1,\cdots,J)$，そのベクトルを$h(t)=(h_1(t),\cdots,h_J(t))$，無リスク資産への投資比率を$1-\Sigma_{j=1}^J h_j(t)$，この投資の粗収益率を$R(h(t),\ t+1)=\Sigma_{j=1}^J h_j(t)(R_j(t+1)-R_0)+R_0$とする．また，これより，リスクのある資産$j$への$t$期の投資額を$g_j(t)\equiv h_j(t)(W(t)-c(t))\,(j=1,\cdots,J)$，そのベクトルを$g(t)=(g_1(t),\cdots,g_J(t))$で表記する．このとき，投資家の最適化問題は，必要な技術的条件のもとベルマン方程式

$$J(w(t),t)=Max_{c(t),h_j(t)(j=1,\cdots,J)}\{e^{-\beta t}\frac{-exp(-\gamma c(t))}{\gamma}+E[J(w(t+1),t+1)]|\mathcal{F}_t]\}$$

$$\text{s.t.}\quad W(t+1)=R(h(t))(W(t)-c(t)) \tag{12}$$

を満たすバリュー関数$J(w,t)$，最適消費$c^*(t)$，最適投資額$g^*(t)$を求めることで解かれる．最適投資で達成されるt期の所得を$W^*(t)$とすれば以下の結果を得る．

命題３：

$J(W,t)=e^{-\beta t}\dfrac{-exp(-AW)}{A}\quad(A\equiv\dfrac{\gamma(R_0-1)}{R_0})$，$c^*(t)=\dfrac{R_0-1}{R_0}W^*(t)$，かつ，$g^*(t)$は，$0=E[exp\{-A[\Sigma_{j=1}^J g_j^*(t)(R_j(t+1)-R_0)]\}(R_j(t+1)-R_0)]|\mathcal{F}_t]$ $(\forall_j=1,\cdots,J)$の解で与えられる．

$\{R(t)\}_{t\geq 1}$がi.i.d.であることから，t期の最適投資額$g^*(t)$がt期の所得$W^*(t)$に依存しないで定まることに注意せよ．よって，将来のリスクの在り方が一定である場合，指数型効用関数を持つ投資家の各t期の最適投資額は，リスクのある資産については所得水準$W^*(t)$とは無関係に決まることになるのである．

この「リスクの在り方が変わらない限り最適投資額は所得水準に依存しない.」という性質は，Merton（1971）が連続時間モデルで示して以来，指数型効用関数によって課される強い制約として広く知られて来た．投資額に所得効果が無い経済主体を想定すること，特に一国の経済の動きの描写にそのような経済主体を想定することは，無理があると言わざる得ない．このため，マクロ経済学では，指数型期待効用関数はほとんど利用されない．この事実からすれば，指数型効用関数を想定することと同値であるEscher原理を，代表的経済主体の行動から導かれるものとすることは難しい．

では，Esscher原理の背景にある指数型効用関数を持つ投資家を，保険業界全体とみなすことはできるだろうか．これについては，Froot and O'Connell（1999）が参考になる．Froot and O'Connell（1999）は，大規模自然災害への再保険の保険料と契約量の決定要因を分析し，大規模災害発生後保険料が高騰した主因は，災害発生後のリスクに対する評価の変化ではなく，保険金支払いによって引き起こされたキャパシティー減少とそれによる保険の供給減少である，としている．この結果は指数型効用関数の適合性を直接調べたものではないが，保険業界全体での保険リスクの引受量がキャパシティーという所得水準に強く依存するということを示し，指数型効用関数を持つ投資家の行動とは適合しないことを示唆するものである．よって，Esscher原理の背景にある指数型効用関数を持つ投資家が保険業界全体の行動を表すという解釈も，実証研究の結果とは矛盾することになる．

以上のように，指数型効用関数を持つ投資家が一国全体もしくは保険業界全体を表すとする考え方は，現実とは適合しない．一方，経済学的保険料計算原理では，Esscher原理が指数型効用関数を持つ投資家の最適化条件と同値であることが示されている．よって，少なくとも一国経済全体もしくは保険業界全体での正当な保険料を計算する方法として，Esscher原理の適用は適切ではない．これが，経済学的な見地からのEsscher原理の再評価である．

5　結語

本論文では，投資家の最適化条件と資産価格の関係を報告し，その一例としてEsscher原理と指数型期待効用を持つ投資家の最適化条件の同値性を示すとともに，議論を一歩進め，指数型効用関数を持つ投資家の現実妥当性からEsscher原理の妥当性を再検討した．

投資家の最適化条件と資産価格との関係は，この点以外にも，ファイナンスの様々な部分で幅広く利用されていることに注意しよう．例えば，天候デリバティブやジャンプがある資産価格の計算のように，市場の不完備性から無裁定による価格決定の議論が使えない場合であっても，(5)式を利用することで状態価格を求めそれを(6)式に適用することで価格を求めることができる．このような不完備市場における価格計算への利用は最近特に盛んである．もちろん，マクロ経済学におけるこれまでの研究への利用は言うまでも無い．

さらに，投資家の最適化条件と資産価格の関係は次のような場面でも利用されている．まず，最適投資問題では，与えられた証券価格から状態価格を求め，(5)式に対応する関係式から最適消費を求める．そして，その最適消費を達成する投資戦略として最適投資を求めるのである．（Huang (1987)，Cox and Huang (1989, 1991)，He and Pearson (1991)，Karatzas et. al (1990) 等参照．）また，より一般的な選好関係を用いているが，実は Harrison-Kreps (1979) による同値マルチンゲール測度の存在証明でも同様の関係が利用されている．即ち，最適な投資戦略を達成する投資家が存在するならば，その投資家は最適消費も達成しているので，(5)式に対応する一般的な関係から状態価格が存在する．状態価格が存在すれば，対応する同値マルチンゲール測度も存在するのである．

以上のように，投資家の最適化条件による資産価格の特徴付けは，資産の価値評価に関わるあらゆる分野で利用される，極めて強力な道具である．強力であるからこそ，これを単なる数学的関係式として，十分な考察を行うことなく使って

しまうことは危険である．最適化条件による資産価値の評価という方法の有効な利用のためには，常に背景に仮定された経済モデルの現実適合性の吟味を怠らない姿勢が不可欠なのである．

＊ 本論文の作成にあたり，斎藤誠，本多俊毅の両氏より有益な助言をいただいた．ここで改めて謝意を表したい．もちろん，記述に誤りがある場合，その責任はすべて筆者に帰するものである．

1）(11)式として示される（割引率を考慮した）Esscher原理の表現は，Iwaki et. al.（2001）における表現とは異なることに注意せよ．これは，Esscher原理を導出する際に使用した割引率が，本論文とIwaki et. al.（2001）では異なるためである．（本論文では無リスク割引債の価格を用いた．）また，Bühlmann (1980)，Bühlmann et. al. (1998)，Iwaki et. al.（2001）では保険支払金$D(t)$が投資家の最適消費$c^*(t)$と等しい場合についてEsscher原理が導出できることを示しているが，ここでは同様の主張がスカラー倍の範囲まで広げられることを指摘している．

参考文献

Bühlmann, H., "An Economic Premium Principle," Astin Bulletin 11 (1980) 52-60

Bühlmann, H., F. Delbaen, P. Embrecht, and A. Shiryaev, "On Esscher transforms in discrete time finance models," Astin Bulletin 28 (1988) 171-186

Cao, M. and J. Wei, "Equilibrium Valuation of Weather Derivatives," mimeo, York university and University of Tronto (1988)

Cox, J. and C. Huang, "Optimum Consumption and Portfolio Policies when Asset Prices Follow a Diffusion Process," Journal of Economic Theory 49 (1989) 33-83

Cox, J. and C. Huang, "A Variational Problem Arising in Financial Economics," Journal of Mathematical Economics 20 (1991) 465-487

Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S Ross, "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices," Econometrica 53 (1985a) 363-384

Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. Ross, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," Econometrica 53 (1985b) 385-407

Davis, M., "Pricing weather derivatives by marginal value," Quantitative Finance 1 (2001) 1-4

Duffie, D., "The Theory of Value in Security Markets," Chapter 13 in 'Handbook of Mathematical Economics,' Vol. IV (1991) ed. by W. Hildenbrand and H. Sonnenschein, North-Holland

Duffie, D., "Dynamic Asset Pricing Theory 2nd ed.," (1996) Princeton Press

Froot, K. A. and P. G. J. O'Connell, "The Pricing of U S. Catastrophe Reinsurance," Chapter 5 in The Financing of Catastrophe Risk, ed. by K. A. Froot (1999) University of Chicago Press

Harrison, J. M. and D. Kreps, "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets," Journal of Economic Theory 30 (1979) 381-408

He, H. and N. Pearson, "Consumption and Portfolio Policies with Incomplete Markets and Short-Sales Constraints: The Infinite Dimensional Case," Journal of Economic Theory 54 (1991) 259-304

Huang, C., "An Intertemporal General Equilibrium Asset Pricing Model: The Case of Diffusion Information," Eonometrica 55 (1987) 117-142

Huang, C. and R. H. Litzenberger, "Foundations for Financial Economics," (1988) North-Holland

Iwaki, H., M. Kijima, amd Y. Morımoto, "An economic premium principle ina multiperiod economy," Insurance: Mathematics and Economics 28 (2001) 325-339

Karatzas, I., J. Lehoczky, adb S. Shreve, "Existence and Uniqueness of Multi-Agent Equilibrium in Stochastic Dynamic Consumption/Investment Model," MAthematics of Operations Research (1990) 80-128

Kocherlakota, N. R., "The Equity Premium: It's Still a Puzzle," Journal of Economic Literature 34 (1996) 42-71

Lucas, R. E., "Asset Prices in An Exchange Economy," Econometrica 46 (1978) 1426-1446

Merton, R. C., "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model," Journal of Economic Theory 3 (1971) 373-413

Naik, V. and M. Lee, "General Equilibrium Pricing of Options on the Market Portfolio with Discontinuous Returns," Review of Financial Studies 3 (1990) 493-521

Rubinstein, M., "An Aggregation Theory for Securities Markets," Journal of Financial Economics 1 (1974) 225-244

Saito, M., "Dynamic Allocation and Pricing in Incomplete Markets: A Survey," Monetary and Economic Studies (1999) 45-76

Sargent, T. J., "Dynamic Macroeconomic Theory," (1987) Harvard University Press

祝迫得夫「資産価格モデルの現状：消費と資産価格の関係をめぐって」現代ファイナンス 9 (2001) 3-40

佐藤賢一「ウェザー・デリバティブの価格分析」MTECジャーナル13 (2001) 71-90

堀敬一「資産価格モデルの実証研究：展望」現代ファイナンス 6 (1999) 47-97

（一橋大学大学院国際企業戦略研究科助教授）