# Virasoro 代数のフュージョンルールと頂点作用素代数

山 田 裕 理

## 1 序

頂点作用素代数 (vertex operator algebra) は，物理学における共形場理論を数学的に定式化したものであり，Borcherds [1], Frenkel, Lepowsky, Meurman [10] らにより 1980 年代に考え出された．これは，無限個の演算をもつ無限次元のベクトル空間で，その構造は一般にきわめて複雑である．

複雑な構造を持つ頂点作用素代数の研究には多くの困難が伴うが，ひとつの方向として Dong, Mason, Miyamoto, Zhu らにより，頂点作用素代数をもっとも小さい頂点作用素代数である Virasoro 頂点作用素代数のいくつかのテンソル積の加群と見て，その既約加群の直和に分解する手法が開発されてきた．[9]，[17]，[18] などを参照のこと．この手法の創始者のひとりである宮本雅彦による論説が [19] にある．特に，中心電荷が 0 と 1 のあいだにある，いわゆる離散系列に属する Virasoro 頂点作用素代数については，それらの加群のフュージョンルールが決定されており (Wang [20])，与えられた頂点作用素代数の既約加群の直和への分解がわかると，フュージョンルールを効果的に利用することができる．

本論説では，頂点作用素代数の典型的な例である正定値格子から定義される頂点作用素代数について，Kitazume, Lam, Miyamoto, および筆者により最近得られた結果のうち，Virasoro 頂点作用素代数のフュージョンルールが有効に活用される事例について説明する．なお，本論説は [21] 以降に

進展した研究を中心にしたものである．

ここで用いる記号および用語は標準的なもので，［6］，［10］，［21］などに準ずる．

## 2　フュージョンルール

頂点作用素代数 $V$ の3つの加群 $K, L, M$ に対し，intertwining operator of type $\begin{pmatrix} & K & \\ L & & M \end{pmatrix}$ の全体はベクトル空間をなす．この空間の次元を $N_{L,M}^{K}$ で表し，フュージョンルールという．また，$V$ の既約加群の同型類全部の集合を $\mathcal{M}$ とするとき，$L, M \in \mathcal{M}$ に対して

$$L \times M = \sum_{K \in \mathcal{M}} N_{L,M}^{K} K$$

と書き，これをフュージョンルールと呼ぶこともある．

**定義 2.1**　頂点作用素代数 $V$ が次の2条件をみたすとき，有理型であるという．

（1）　$V$ の既約加群の同型類は有限個

（2）　$V$ の任意の加群は完全可約

本論説で大切なのは，Virasoro 頂点作用素代数のフュージョンルールである．$L(c, h)$ を Virasoro 代数の既約最高ウエイト加群とする．ここで $c$ は中心電荷，$h$ は最高ウエイトを表す．$h=0$ の場合の $L(c, 0)$ は頂点作用素代数の構造を持つこと，また $L(c, 0)$ の既約加群は $L(c, h)$ の形のものに限ることが Frenkel, Zhu［11］, Li［14］などにより知られている．$L(c, 0)$ を Virasoro 頂点作用素代数という．これは Virasoro 元と呼ばれる唯一つの元から生成され，頂点作用素代数としてはもっとも小さく，かつもっとも基本的なものであり，詳しく研究されている．

$L(c, 0)$ のうち，特に中心電荷 $c$ が $0 \leq c < 1$ で

$$c = c_{p,q} = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq}$$

の形で与えられるもの，ただし $p, q$ は2以上の整数で互いに素，は離散系列と呼ばれ，有理型の頂点作用素代数である．詳しくは，

$$h = h_{m,n} = \frac{(np-mq)^2-(p-q)^2}{4pq}, \quad 0 < m < p, \quad 0 < n < q$$

を最高ウエイトとする $L(c,h)$ が $L(c,0)$ の既約加群の同型類の代表すべてであることが Wang [20] により知られている.

たとえば, $p=3$, $q=4$ とすると, $c=1/2$ であり, $L\left(\frac{1}{2},0\right)$ という頂点作用素代数になる. また, $h$ としては $h_{1,1}=h_{2,3}=0$, $h_{1,2}=h_{2,2}=1/16$, $h_{1,3}=h_{2,1}=1/2$ の3通りがあるから, $L\left(\frac{1}{2},0\right)$ の既約加群は, 同型を除いて $L\left(\frac{1}{2},0\right)$, $L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)$ の3個である. なお, 一般に

$$h_{m,n} = h_{p-m,q-n}$$

であることに注意する.

$L(c,0)$ の既約加群のフュージョンルールは [20] で決定されている. すなわち

**定理 2.2**　$c=c_{p,q}$ に対し

$$L(c, h_{m',n'}) \times L(c, h_{m'',n''}) = \sum_{(m,n)} N^{(m,n)}_{(m',n'),(m'',n'')} L(c, h_{m,n})$$

ここで, $N^{(m,n)}_{(m',n'),(m'',n'')}$ は $((m,n),(m',n'),(m'',n''))$ が admissible triple のとき1で, その他の場合は0である. ただし, 整数の組 $((m,n),(m',n'),(m'',n''))$ が admissible triple とは,

$$0 < m, m', m'' < p, \qquad 0 < n, n', n'' < q,$$
$$m+m'+m'' < 2p, \qquad n+n'+n'' < 2q,$$
$$m+m'+m'',\ n+n'+n'' \text{ はともに奇数},$$
$$m < m'+m'', \qquad m' < m+m'', \qquad m'' < m+m',$$
$$n < n'+n'', \qquad n' < n+n'', \qquad n'' < n+n'$$

のすべての条件をみたすことである.

また, 和 $\sum_{(m,n)}$ は $((m,n),(m',n'),(m'',n''))$ が admissible triple であるようなすべての $(m,n)$ に関する和である. ただし $h_{m,n}=h_{p-m,q-n}$ であるので, 2重にかぞえることを避けるため, $((m,n),(m',n'),(m'',n''))$ と $((m,n),(p-m',q-n'),(p-m'',q-n''))$ を同一視して, 一方のみを考えて和をとることに注意する.

たとえば$p=3$，$q=4$のとき，$c=\frac{1}{2}$で$h\in\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right\}$であるが，一般的に成立する

$$L(c,h)\times L(c,h') = L(c,h')\times L(c,h)$$
$$L(c,0)\times L(c,h) = L(c,h)$$

および

$$L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\times L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = L\left(\frac{1}{2},0\right)$$
$$L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\times L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right) = L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)$$
$$L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)\times L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right) = L\left(\frac{1}{2},0\right)+L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

から，$L\left(\frac{1}{2},0\right)$のすべてのフュージョンルールがわかる．

$p=4$，$q=5$のときは，$c=\frac{7}{10}$で$h\in\left\{0, \frac{3}{80}, \frac{1}{10}, \frac{7}{16}, \frac{3}{5}, \frac{3}{2}\right\}$である．また，$p=5$，$q=6$のときは，$c=\frac{4}{5}$で$h\in\left\{0, \frac{1}{40}, \frac{1}{15}, \frac{1}{8}, \frac{2}{5}, \frac{21}{40}, \frac{2}{3}, \frac{7}{5}, \frac{13}{8}, 3\right\}$である．これらのフュージョンルールは，上記のWangの定理から容易に計算できる．

## 3　$V_L$の共形元とフュージョンルール

頂点作用素代数（$V, Y$）のウエイト2の元$v$で，その成分作用素全体がEnd $V$の中で中心電荷cのVirasoro代数をなすものを，中心電荷$c$の共形元という（Miyamoto [16]）．より正確には，通常の書き方である$Y(v,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}v_nz^{-n-1}$の$v_n\in$ End $V$の添字をひとつずらした$L_v(n)=v_{n+1}$がVirasoro関係式

$$[L_v(m), L_v(n)] = (m-n)L_v(m+n)+\frac{m^3-m}{12}c\delta_{m+n,0}$$

をみたすことである．

本論説では，正定値偶格子$L$から定義される頂点作用素代数$V_L$を扱うが，この頂点作用素代数は正定値不変内積を持ち，そのおかげで議論が大変しやすくなっている．Dong, Li, Mason, Norton [6] により，$L$として階数$l$の

$A$ 型，$D$ 型，あるいは $E$ 型のルート格子を $\sqrt{2}$ 倍したものをとると，$V_L$ の Virasoro 元 $\omega$ が，互いに直交する $l+1$ 個の共形元 $\omega^1, \omega^2, \cdots, \omega^{l+1}$ の和に分解できることが知られている．Virasoro 元は，物理学的には時間による微分あるいはエネルギー準位を統制しており，重要な意味を持つ元であるが，これをいくつかの共形元の和に分解することにより，Virasoro 元の作用よりさらに詳しい情報を得ることが可能になる．

$\omega^i$ の中心電荷を $c_i$ とおく．各共形元 $\omega^i$ の成分作用素たちのなす End $V_L$ の中の Virasoro 代数を $Vir^i$ とおくと，$V_L$ の真空 $\mathbf{1}$ から生成される $Vir^i$ の加群 $V(\omega^i)$ は，$\mathbf{1}$ を最高ウエイトベクトルとする既約最高ウエイト加群 $L(c_i, 0)$ に同型になる．特に，これは $V_L$ の部分頂点作用素代数である．$\omega^1$, $\omega^2, \cdots, \omega^{l+1}$ で生成される部分頂点作用素代数を $T$ とおくと，$\omega^i$ たちが互いに直交することから，$T$ は $V(\omega^i)$ たちのテンソル積になる：

$$
\begin{aligned}
T &= V(\omega^1)\otimes\cdots\otimes V(\omega^{l+1}) \\
&\cong L(c_1, 0)\otimes\cdots\otimes L(c_{l+1}, 0)
\end{aligned}
$$

さらに，$V_L$ は $T$-加群として完全可約で，既約 $T$-加群の直和に分解される．このようなことは，$V_L$ が正定値不変内積を持つことからわかる．なお，既約 $T$-加群は

$$
L(c_1, h_1)\otimes\cdots\otimes L(c_{l+1}, h_{l+1})
$$

の形である．

この既約 $T$-加群は，最高ウエイトベクトル $v(h_1, \cdots, h_{l+1})$ により $T$-加群として生成される．生成元としては，0 以外の定数倍の違いを無視すれば，既約 $T$-加群に対して一意的である．ここで，$v=v(h_1, \cdots, h_{l+1})$ が最高ウエイトベクトルとは，

(i)　$(\omega^i)_1 v = h_i v$　for all　$1 \leq i \leq l+1$

(ii)　$(\omega^i)_n v = 0$　for all　$2 \leq n,\ 1 \leq i \leq l+1$

の 2 つの条件をみたすことである．$V_L$ の既約 $T$-加群の直和への分解を決定することと，$V_L$ の中の最高ウエイトベクトルをすべて決定することは同値である．$h_1+\cdots+h_{l+1}$ は最高ウエイトベクトル $v(h_1, \cdots, h_{l+1})$ のウエイトで

ある．

[6] による $l+1$ 個の互いに直交する共形元の取り方は，$V_L$ に対して一通りではない．また，その取り方に依存して中心電荷 $c_i$ も変わる．実際，[6] では階数がひとつづつ小さくなる部分格子の列に対応して共形元が定義されるのであるが，このような部分格子の列は一般に何通りもある．第4節では，いくつかの例について，共形元の取り方と $V_L$ の既約 $T$-加群の直和への分解を紹介する．また，$L(c,h)$ たちのフュージョンルールがどのように頂点作用素代数 $V_L$ の構造に反映されるかも論じる．

Virasoro 頂点作用素代数のフュージョンルールと，頂点作用素代数 $V_L$ の構造とは，次のような原理で関係している．

(I)　2つの $T$-加群

$$M = L(c_1, h_1)\otimes\cdots\otimes L(c_{l+1}, h_{l+1})$$
$$M' = L(c_1, h'_1)\otimes\cdots\otimes L(c_{l+1}, h'_{l+1})$$

のフュージョンルール $M\times M'$ は，各フュージョンルール $L(c_i, h_i)\times L(c_i, h'_i)$ のテンソル積である．したがって，Virasoro 頂点作用素代数のフュージョンルールがわかれば，フュージョンルール $M\times M'$ もわかる．

(II)　$V_L=\oplus_i M_i$ と，$V_L$ が既約 $T$-加群 $M_i$ の直和に分解されているとする．また，$\mathrm{pr}_i : V_L \longrightarrow M_i$ を $V_L$ から $M_i$ への射影とする．$j$ と $k$ を任意に固定し，$u\in M_j$，$v\in M_k$ をとる．$V_L$ の頂点作用素 $Y(u,z)$ について，

$$Y(u,z)v = \sum_{n\in Z} u_n v z^{-n-1}$$

であるが，$u, v$ に対し $\mathrm{pr}_i(u_n v)\in M_i$ を対応させることにより得られる写像

$$M_j \otimes M_k \longrightarrow M_i$$

の母関数は，intertwining operator of type $\begin{pmatrix} & M_i & \\ M_j & & M_k \end{pmatrix}$ である．したがって，(I) によりフュージョンルール $M_j\times M_k$ がわかっていれば，$u_n v$ の可能性がわかる．

ここで注意すべきは，$u_n v$ の可能性がわかるのであって，実際に $u_n v$ が決定できるわけではないということである．すなわち，intertwining operator of type $\begin{pmatrix} & M_i & \\ M_j & & M_k \end{pmatrix}$ 全体のなす空間が 0 でないとしても，$\mathrm{pr}_i(u_n v)=0$ ということはありうる．しかし，$V_L$ 自身が既約 $V_L$- 加群であることから，Dong, Lepowsky [5, Proposition 11. 9] により，次のことがわかる．

(III)　$u\neq 0$, $v\neq 0$ なら，$Y(u,z)v\neq 0$，すなわち $u_n v\neq 0$ となる $n$ が存在する．このとき，少なくともひとつの $i$ に対し $\mathrm{pr}_i(u_n v)\neq 0$ である．

このような $i$ については，$V_L$ の中に intertwining operator of type $\begin{pmatrix} & M_i & \\ M_j & & M_k \end{pmatrix}$ で 0 でないものが存在することになるので，$i$ はフュージョンルール $M_j\times M_k$ に現れる $i$ のうちのいずれかでなければならない．

このようにして，$u_n v$ の可能性がフュージョンルール $M\times M'$ からある程度わかるのである．

## 4　いくつかの例

この節では，通常の階数 $l$ の $A$ 型あるいは $D$ 型ルート格子を $\sqrt{2}$ 倍して得られる格子を $L$ とし，$L$ から定義される頂点作用素代数 $V_L$ について考える．簡単に $L=\sqrt{2}A_l$ あるいは $L=\sqrt{2}D_l$ のように書くことにする．

**例 1**　$L=\sqrt{2}A_1$ の場合

$V_L$ の Virasoro 元は，$\omega=\omega^1+\omega^2$ と 2 つの互いに直交する中心電荷 $\frac{1}{2}$ の共形元の和となる．

$$T\cong L\left(\frac{1}{2},0\right)\otimes L\left(\frac{1}{2},0\right)$$

で，$V_L$ は

$$\left(L\left(\frac{1}{2},0\right)\otimes L\left(\frac{1}{2},0\right)\right)\oplus\left(L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\otimes L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$$

と，2 つの既約 $T$-加群の直和に分解される．Dong [2] により，$V_L$ の既約加群の同型類は全部で 4 個あることがわかる．そのひとつ

$$\left(L\left(\frac{1}{2},0\right)\otimes L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)\oplus\left(L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\otimes L\left(\frac{1}{2},0\right)\right)$$

と $T$ を合せたものから，$(\omega^1)_1$ で 0 に写る元全体として $M^0+M^1$ を取り出す．ここで，

$$M^0 = \mathbf{1}_{L(1/2,0)} \otimes L\left(\frac{1}{2},0\right) \cong L\left(\frac{1}{2},0\right)$$

$$M^1 = \mathbf{1}_{L(1/2,0)} \otimes L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \cong L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

である．フュージョンルール

$$L\left(\frac{1}{2},0\right) \times L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \times L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = L\left(\frac{1}{2},0\right)$$

により，binary code $D$ の code word を使って $M^0$ と $M^1$ を組み合せて，新しい頂点作用素代数 $M_D$ を作ることが可能である．これが Miyamoto [17] により構成された code VOA である．

code VOA は，さらに Dong, Griess, Höhn [4] により framed VOA として定式化された．上記のフュージョンルールは簡単に見えるが，binary code $D$ として種々のものを考えることにより，多数の頂点作用素代数を作ることができる．Miyamoto は，[8, 4, 4] extended Hamming code $H_8$ から定義される code VOA に誘導と制限を繰り返して，モンスター加群と呼ばれる頂点作用素代数 $V^\natural$ を再構成することに成功した（[19] を参照のこと）．$V^\natural$ は Frenkel, Lepowsky, Meurman [10] により最初に構成されたが，Miyamoto の構成は，別の方法による見通しの良いものになっている．これは，code VOA の理論の大きな成果のひとつである．

**例2**　$L=\sqrt{2}A_2$ の場合

この場合は [21] でも一部論じている．共形元の取り方は一意的ではないが，中心電荷が $c_1=\frac{1}{2}$，$c_2=\frac{7}{10}$，$c_3=\frac{4}{5}$ となるような取り方が標準的である．このときは，

$$T \cong L\left(\frac{1}{2},0\right) \otimes L\left(\frac{7}{10},0\right) \otimes L\left(\frac{4}{5},0\right)$$

である．Kitazume, Miyamoto, Yamada [13] では，$V_L$ が次の8個の既約 $T$-加群の直和に分解することを示した．

$$L\left(\frac{1}{2},0\right)\otimes L\left(\frac{7}{10},0\right)\otimes L\left(\frac{4}{5},0\right)$$

$$L\left(\frac{1}{2},0\right)\otimes L\left(\frac{7}{10},\frac{3}{5}\right)\otimes L\left(\frac{4}{5},\frac{7}{5}\right)$$

$$L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\otimes L\left(\frac{7}{10},\frac{1}{10}\right)\otimes L\left(\frac{4}{5},\frac{7}{5}\right)$$

$$L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\otimes L\left(\frac{7}{10},\frac{3}{2}\right)\otimes L\left(\frac{4}{5},0\right)$$

$$L\left(\frac{1}{2},0\right)\otimes L\left(\frac{7}{10},\frac{3}{5}\right)\otimes L\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)$$

$$L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\otimes L\left(\frac{7}{10},\frac{1}{10}\right)\otimes L\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)$$

$$L\left(\frac{1}{2},0\right)\otimes L\left(\frac{7}{10},0\right)\otimes L\left(\frac{4}{5},3\right)$$

$$L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\otimes L\left(\frac{7}{10},\frac{3}{2}\right)\otimes L\left(\frac{4}{5},3\right)$$

$L$ の元をすべて$-1$倍する作用は，格子 L の位数 2 の自己同型であるが，これは頂点作用素代数 $V_L$ の位数 2 の自己同型 $\theta$ を引き起こす．上記の既約 $T$-加群のうち，最初の 4 個は $\theta$ の固有値 1 に属する固有空間 $V_L^+$ に含まれ，残りの 4 個は固有値$-1$に属する固有空間 $V_L^-$ に含まれる．

第 3 節で説明したように，$V_L$ の既約 $T$-加群の直和への分解を知ることと，最高ウエイトベクトルをすべて知ることとは同値である．最高ウエイトベクトル $v(h_1,\cdots,h_{l+1})$ は共形元の成分作用素 $(\omega^i)_1$, $1\leq i\leq l+1$ の同時固有ベクトルである．ウエイト $h_1+\cdots+h_{l+1}$ が 2 以下なら，このような同時固有ベクトルを決定することは比較的容易である．このようにして，上記の 8 個の既約 $T$-加群のうち最初の 6 個が決定できる．さらに [13] では，最高ウエイトベクトル $v(0,0,3)$ を具体的に計算で求めている．こうして，最後から 2 番目の既約 $T$-加群が $V_L$ の中に存在することがわかる．ここでフュージョンルール

$$\left(L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\otimes L\left(\frac{7}{10},\frac{3}{2}\right)\otimes L\left(\frac{4}{5},0\right)\right)\times\left(L\left(\frac{1}{2},0\right)\otimes L\left(\frac{7}{10},0\right)\otimes L\left(\frac{4}{5},3\right)\right)$$

$$= L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\otimes L\left(\frac{7}{10},\frac{3}{2}\right)\otimes L\left(\frac{4}{5},3\right)$$

および第3節の（II）と（III）より，最後の既約 $T$-加群が $V_L$ の中に存在することがわかる．

$V_L$ はウエイト1および2の元で頂点作用素代数として生成されるが，

(1)　$V_L$ のウエイト2以下の元はすべて上記8個の既約 $T$-加群に含まれること，

(2)　Virasoro 頂点作用素代数 $L\left(\frac{1}{2},0\right)$，$L\left(\frac{7}{10},0\right)$，$L\left(\frac{4}{5},0\right)$ のフュージョンルールをすべて調べると，これら8個の既約 $T$-加群たちがフュージョンルールに関して閉じていることがわかること，

の2つのことから，$V_L$ がこれら8個の既約 $T$-加群の直和であることが証明される．

[13] では，$V_L$ のほか，$V_L$ の2つの既約加群 $V^1$ と $V^2$ についても，それらの既約 $T$-加群の直和への分解を考えている．この $V^1$ と $V^2$ は同型であり，既約 $T$-加群

$$L\left(\frac{1}{2},0\right)\otimes L\left(\frac{7}{10},0\right)\otimes L\left(\frac{4}{5},\frac{2}{3}\right)$$

$$L\left(\frac{1}{2},0\right)\otimes L\left(\frac{7}{10},\frac{3}{5}\right)\otimes L\left(\frac{4}{5},\frac{1}{15}\right)$$

$$L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\otimes L\left(\frac{7}{10},\frac{1}{10}\right)\otimes L\left(\frac{4}{5},\frac{1}{15}\right)$$

を重複度1で含むことは，[13] に書いてある．実は，フュージョンルール

$$\left(L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\otimes L\left(\frac{7}{10},\frac{3}{2}\right)\otimes L\left(\frac{4}{5},0\right)\right)\times\left(L\left(\frac{1}{2},0\right)\otimes L\left(\frac{7}{10},0\right)\otimes L\left(\frac{4}{5},\frac{2}{3}\right)\right)$$

$$= L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\otimes L\left(\frac{7}{10},\frac{3}{2}\right)\otimes L\left(\frac{4}{5},\frac{2}{3}\right)$$

に注意すると，

$$L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\otimes L\left(\frac{7}{10},\frac{3}{2}\right)\otimes L\left(\frac{4}{5},\frac{2}{3}\right)$$

も存在すること，さらに $V^1$ と $V^2$ はこれら4個の既約 $T$-加群の直和である

ことがわかる．このことは，[12] で指摘してある．[12]，[15] では，このほかの既約 $V_L$- 加群についても，既約 $T$-加群の直和への分解を決定している．

**例 3**　$L=\sqrt{2}A_3$ の場合

この場合の標準的な共形元の取り方では，中心電荷は $c_1=\frac{1}{2}$，$c_2=\frac{7}{10}$，$c_3=\frac{4}{5}$，$c_4=1$ となる．$c_1, c_2, c_3$ は離散系列に属するが，$c_4=1$ は離散系列には属さない．中心電荷 1 の Virasoro 頂点作用素代数 $L(1,0)$ は無限個の既約加群の同型類を持ち，フュージョンルールは何も情報を与えない．ウエイトが小さい最高ウエイトベクトルは計算可能であり，したがって $V_L$ の中の既約 $T$-加群もいくつかはわかるが，$L=\sqrt{2}A_2$ の場合の方法では，既約 $T$-加群の直和への分解を決定することはできない．

Dong, Lam, Yamada [7] では，別の方法でこの分解を決定している．ここでは，簡単に証明の方針を紹介する．基本的なアイデアは，$V_{\sqrt{2}A_3}$ を $V_{A_1}$ 3 つのテンソル積の中で考えることである．

階数 1 の格子 $\mathbf{Z}\alpha$，ただし $\langle\alpha,\alpha\rangle=2$，から定義される頂点作用素代数 $V_{\mathbf{Z}\alpha}$ を考える．格子 $\mathbf{Z}\alpha$ は，$A_1$ 型ルート格子にほかならない．$V_{\mathbf{Z}\alpha}$ のウエイト 1 の部分空間 $\mathfrak{g}=(V_{\mathbf{Z}\alpha})_{(1)}$ は $[u,v]=u_0v$ により Lie 代数の構造が入る．さらに，$\langle u,v\rangle\mathbf{1}=u_1v$ により対称不変形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が定義できる．この Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は 3 次元で，基底として $\{\alpha(-1), e^{\alpha}, e^{-\alpha}\}$ をとることができる．容易にわかるように，この基底は $\mathfrak{g}\cong sl_2(\mathbf{C})$ の標準基底である．Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の位数 2 の自己同型 $\theta_1, \theta_2, \sigma$ を，次のように定義する．

$$\theta_1:\alpha(-1)\longrightarrow\alpha(-1),\quad e^{\alpha}\longrightarrow -e^{\alpha},\quad e^{-\alpha}\longrightarrow -e^{-\alpha},$$
$$\theta_2:\alpha(-1)\longrightarrow -\alpha(-1),\quad e^{\alpha}\longrightarrow e^{-\alpha},\quad e^{-\alpha}\longrightarrow e^{\alpha},$$
$$\sigma:\alpha(-1)\longrightarrow e^{\alpha}+e^{-\alpha},\quad e^{\alpha}+e^{-\alpha}\longrightarrow\alpha(-1),\quad e^{\alpha}-e^{-\alpha}\longrightarrow -(e^{\alpha}-e^{-\alpha}).$$

$\sigma\theta_1\sigma=\theta_2$ である．これら 3 つの自己同型は，対称不変形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を保存し，したがって一意的に頂点作用素代数 $V_{\mathbf{Z}\alpha}$ の自己同型に拡張できる．こうして得られる $V_{\mathbf{Z}\alpha}$ の自己同型も同じ記号 $\theta_1, \theta_2, \sigma$ で表すことにする．

$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$，ただし $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle = 2\delta_{ij}$，を基底とする階数3の格子を $K$ とおく．$K$ は $A_1$ 型ルート格子3つの直和である．すなわち，$K = A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$.

$$\beta_1 = (\alpha_1 + \alpha_2)/\sqrt{2}, \quad \beta_2 = (-\alpha_2 + \alpha_3)/\sqrt{2}, \quad \beta_3 = (-\alpha_1 + \alpha_2)/\sqrt{2},$$

とおくと，$\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ は $A_3$ 型の単純ルート系をなす．$\gamma = -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ とおく．

$$N = \sum_{i,j=1}^{3} \mathbf{Z}(\alpha_i \pm \alpha_j), \qquad D = E \oplus F,$$

を考える．ただし，$E = \mathbf{Z}(\alpha_1 + \alpha_2) + \mathbf{Z}(-\alpha_2 + \alpha_3)$ で $F = \mathbf{Z}\gamma$ である．$N = \sqrt{2}A_3$ および $E = \sqrt{2}A_2$ に注意する．また，

$$K = D \cup (D + \alpha_2) \cup (D - a_2)$$

および

$$\alpha_2 = \sqrt{2}(\beta_1 - \beta_2)/3 + \gamma/3$$

であること，さらに $D + \alpha_2$ の各元は $E + \sqrt{2}(\beta_1 - \beta_2)/3$ の元と $F + \gamma/3$ の元の直交和として一意的に表せることに注意する．

$V_K = V_{\mathbf{Z}\alpha_1} \otimes V_{\mathbf{Z}\alpha_2} \otimes V_{\mathbf{Z}\alpha_3}$ であるが，上で考えた $V_{\mathbf{Z}\alpha_i} \cong V_{A_1}$ の位数2の自己同型 $\theta_1, \theta_2, \sigma$ を3つづつ合せて，

$$\phi_1 = \theta_1 \otimes \theta_1 \otimes \theta_1, \qquad \phi_2 = \theta_2 \otimes \theta_2 \otimes \theta_2, \qquad \tau = \sigma \otimes \sigma \otimes \sigma,$$

という3つの $V_K$ の自己同型が定義できる．これらの自己同型は位数2であり，$\tau\phi_1\tau = \phi_2$ をみたす．また，$\phi_2$ は格子 $K$ に $-1$ 倍として作用する $K$ の自己同型から引き起こされる $V_K$ の自己同型である．

$$\tau(V_N) = V_K^+$$

なので，$V_N \cong V_{\sqrt{2}A_3}$ の分解を知るには，$V_K^+$ の分解がわかればよい．ところで，

$$V_K^+ \cong V_D^+ \oplus V_{D+\alpha_2}$$
$$V_D^+ = (V_E^+ \otimes V_F^+) \oplus (V_E^- \otimes V_F^-)$$
$$V_{D+\alpha_2} = V_{E+\sqrt{2}(\beta_1-\beta_2)/3} \otimes V_{F+\gamma/3}$$

が成り立つ．

$$\varphi : u \otimes e^\beta \longrightarrow (-1)^{\langle\alpha_2+\alpha_3, \beta\rangle/2} u \otimes e^\beta$$

は $V_K$ の自己同型である．これを用いて，

$$\rho = (\theta_2 \otimes 1 \otimes 1)\varphi\tau$$

という $V_K$ の自己同型を定義し，$\tilde{\omega}^i=\rho(\omega^i)$ とおくと，$\tilde{\omega}^1,\tilde{\omega}^2,\tilde{\omega}^3$ はそれぞれ例 2 の $\omega^1,\omega^2,\omega^3$ に一致し，$\tilde{\omega}^4$ は $V_F$ の Virasoro 元になる．したがって，$\tilde{T}=\rho(T)$ とおくと，$\tilde{T}=\tilde{T}'\otimes\tilde{T}''$ である．ここで，$\tilde{T}'$ は $\tilde{\omega}^1,\tilde{\omega}^2,\tilde{\omega}^3$ で生成される部分頂点作用素代数，$\tilde{T}''$ は $\tilde{\omega}^4$ で生成される部分頂点作用素代数である．$V_E^{\pm}=V_{\sqrt{2}A_2}^{\pm}$ および $V_{E+\sqrt{2}(\beta_1-\beta_2)/3}$ を $\tilde{T}'$- 加群として分解することは，例 2 にある通りである．$V_F^{\pm}$ と $V_{F+\gamma/3}$ の $\tilde{T}''$- 加群としての分解は，Dong, Griess [3] により知られている．これらの結果により，$V_{\sqrt{2}A_3}\cong V_K^+$ の既約 $T$-加群の直和への分解が決定できる．結果は次の通りである．

$$\begin{aligned}
V_{\sqrt{2}A_3} = \Big(&L\Big(\frac{1}{2},0\Big)\otimes L\Big(\frac{7}{10},0\Big)\otimes L\Big(\frac{4}{5},0\Big)\\
&\oplus L\Big(\frac{1}{2},0\Big)\otimes L\Big(\frac{7}{10},\frac{3}{5}\Big)\otimes L\Big(\frac{4}{5},\frac{7}{5}\Big)\\
&\oplus L\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)\otimes L\Big(\frac{7}{10},\frac{1}{10}\Big)\otimes L\Big(\frac{4}{5},\frac{7}{5}\Big)\\
&\oplus L\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)\otimes L\Big(\frac{7}{10},\frac{3}{2}\Big)\otimes L\Big(\frac{4}{5},0\Big)\Big)\\
&\otimes\Big((\bigoplus_{m\geq 0}L(1,4m^2))\oplus(\bigoplus_{m\geq 1}L(1,3m^2))\Big)\\
&\oplus\Big(L\Big(\frac{1}{2},0\Big)\otimes L\Big(\frac{7}{10},\frac{3}{5}\Big)\otimes L\Big(\frac{4}{5},\frac{2}{5}\Big)\\
&\oplus L\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)\otimes L\Big(\frac{7}{10},\frac{1}{10}\Big)\otimes L\Big(\frac{4}{5},\frac{2}{5}\Big)\\
&\oplus L\Big(\frac{1}{2},0\Big)\otimes L\Big(\frac{7}{10},0\Big)\otimes L\Big(\frac{4}{5},3\Big)\\
&\oplus L\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)\otimes L\Big(\frac{7}{10},\frac{3}{2}\Big)\otimes L\Big(\frac{4}{5},3\Big)\Big)\\
&\otimes\Big((\bigoplus_{m\geq 0}L(1,(2m+1)^2))\oplus(\bigoplus_{m\geq 1}L(1,3m^2))\Big)\\
&\oplus\Big(L\Big(\frac{1}{2},0\Big)\otimes L\Big(\frac{7}{10},0\Big)\otimes L\Big(\frac{4}{5},\frac{2}{3}\Big)
\end{aligned}$$

$$\oplus L\left(\frac{1}{2},0\right)\otimes L\left(\frac{7}{10},\frac{3}{5}\right)\otimes L\left(\frac{4}{5},\frac{1}{15}\right)$$

$$\oplus L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\otimes L\left(\frac{7}{10},\frac{1}{10}\right)\otimes L\left(\frac{4}{5},\frac{1}{15}\right)$$

$$\oplus L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\otimes L\left(\frac{7}{10},\frac{3}{2}\right)\otimes L\left(\frac{4}{5},\frac{2}{3}\right)\Big)$$

$$\otimes\Big(\bigoplus_{m\in\mathbf{Z}}L(1,(3m+1)^2/3)\Big).$$

**例4**　$L=\sqrt{2}A_l, l\geq 4$ の場合

標準的な共形元の取り方では，中心電荷は

$$c_i=\begin{cases}1-\dfrac{6}{(i+2)(i+3)} & \text{if}\quad 1\leq i\leq l\\[2ex] \dfrac{2l}{l+3} & \text{if}\quad i=l+1\end{cases}$$

となる．$1\leq i\leq l$ の範囲では $c_i$ は離散系列に属するが，$c_{l+1}$ は1より大きくなり，Virasoro頂点作用素代数 $L(c_{l+1},0)$ からは有用な情報が得られない．この場合でも，ウエイトが2以下の最高ウエイトベクトルは，[22] によりすべて決定されている．頂点作用素代数として $V_L$ はウエイトが2以下の元で生成されており，このような生成元はすべてどの既約 $T$-加群に含まれるのかはわかっているのであるが，$c_{l+1}>1$ のため，$V_L$ がどのように既約 $T$-加群の直和に分解されるのかを調べる方法は，現在のところ知られていない．$c_i, 1\leq i\leq l$ の部分はわかるのであるから，何か良い方法があるのかもしれないが，これを研究することは将来の課題である．

なお，$l=2$ のときは $2l/(l+3)=4/5$ となり，たまたま離散系列に属する例外的な場合であることに注意しておく．

**例5**　$L=\sqrt{2}D_l, l\geq 4$ の場合

標準的な共形元の取り方として，中心電荷が

$$\text{(A)}\quad c_1=\frac{1}{2},\ c_2=\frac{7}{10},\ c_3=\frac{4}{5},\ c_i=1\quad(4\leq i\leq l+1)$$

となるものと，

$$\text{(B)}\quad c_i = 1-\frac{6}{(i+2)(i+3)}\quad (1 \le i \le l-1),\quad c_l = \frac{2(l-1)}{l+2},\quad c_{l+1} = 1$$

となるものの2通りがある．

(A) の場合は，例3で説明した $L=\sqrt{2}A_3$ のときの手法を拡張して，$V_L$ の既約 $T$-加群の直和への分解が Dong, Lam, Yamada [8] により決定されている．(B) の場合は，例4の $L=\sqrt{2}A_l, l\geq 4$ のときと同様に，ウエイトが2以下の最高ウエイトベクトルはすべて決定されているが，既約 $T$-加群の直和への分解はわかっていない．

$l=4$ の場合，$V_L^+$ は [8, 4, 4] extended Hamming code $H_8$ から定義される code VOA に一致すること，また $D_4$ 型ルート系が位数6の対称性を持つことなどから，$V_{\sqrt{2}D_4}$ は特に興味深い頂点作用素代数である．

## 参考文献


[1] R. E. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **83** (1986), 3068-3071.

[2] C. Dong, Vertex algebras associated with even lattices, *J. Algebra* **160** (1993), 245-265.

[3] C. Dong and R. L. Griess Jr., Rank one lattice type vertex operator algebras and their automorphism groups, *J. Algebra* **208** (1998), 262-275.

[4] C. Dong, R. L. Griess Jr. and G. Höhn, Framed vertex operator algebras, codes and the moonshine module, *Comm. Math. Phys.* **193** (1998), 407-448.

[5] C. Dong and J. Lepowsky, *Generalized Vertex Algebras and Relative Vertex Operators*, Progress in Math., Vol. 112, Birkhäuser, Basel, 1993.

[6] C. Dong, H. Li, G. Mason and S. P. Norton, Associative subalgebras of the Griess algebra and related topics, in : Proceedings of the Conference on the Monster and Lie Algebras at the Ohio State University, May 1996 (J. Ferrar and K. Harada, Eds.), pp. 27-42, Walter de Gruyter, Berlin/New York, 1998.

[7] C. Dong, C. H. Lam and H. Yamada, Decomposition of the vertex operator algebra $V_{\sqrt{2}A_3}$, *J. Algebra* **222** (1999), 500-510.

[8] C. Dong, C. H. Lam and H. Yamada, Decomposition of the vertex operator algebra $V_{\sqrt{2}D_l}$, preprint.

[9] C. Dong, G. Mason and Y. Zhu, Discrete series of the Virasoro algebra and the Moonshine module, *Proc. Symp. Pure Math., Amer. Math. Soc.* **56** II (1994), 295-316.

[10] I. B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Pure and Applied Math., Vol. **134**, Academic Press, 1988.

[11] I. B. Frenkel and Y.-C. Zhu, Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras, *Duke. Math. J.* **66** (1992), 123-168.

[12] M. Kitazume, C. H. Lam and H. Yamada, Decomposition of the moonshine vertex operator algebra as Virasoro modules, *J. Algebra* **226** (2000), 893-919.

[13] M. Kitazume, M. Miyamoto and H. Yamada, Ternary codes and vertex operator algebras, *J. Algebra* **223** (1999), 379-395.

[14] H.-S. Li, Local system of vertex operators, vertex superalgebras and modules, *J. Pure Appl. Alg.* **109** (1996), 143-195.

[15] C. H. Lam and H. Yamada, $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ codes and vertex operator algebras, *J. Algebra* **224** (2000), 268-291.

[16] M. Miyamoto, Griess algebras and conformal vectors in vertex operator algebras, *J. Algebra* **179** (1996), 523-548.

[17] M. Miyamoto, Binary codes and vertex operator (super)algebras, *J. Algebra* **181** (1996), 207-222.

[18] M. Miyamoto, Hamming code vertex operator algebra and construction of vertex operator algebras, *J. Algebra* **215** (1999), 509-530.

[19] 宮本雅彦，符号と頂点作用素代数の構成，『数学』第52巻第2号，2000年，159-171頁.

[20] W. Wang, Rationality of Virasoro vertex operator algebras, *Duke Math. J. Internat. Math. Res. Notices* **71** (1993), 197-211.

[21] 山田裕理，ある種の格子から定義される頂点作用素代数の最高ウエイトベクトル，『一橋論叢』第120巻第3号，1998年，362-378頁.

[22] H. Yamada, Highest weight vectors with small weights in the vertex operator algebra associated with a lattice of type $\sqrt{2}A_l$, to appear in *Comm. Algebra.*

（一橋大学大学院経済学研究科教授）