

公平な賭けはいつまで続けても 本当に公平か？

高岡 浩 一 郎

1 はじめに

表裏が同じ確率で出るコインを投げ、その度に表が出たら 100 円もらい、裏が出たら 100 円払うことを続けていくというゲーム（賭け）を考える。直ちに分かるように、コインを 1 回投げるとの損益の期待値はゼロなので、 n 回投げた後このゲームをやめた場合の合計損益の期待値もゼロ。つまりこのゲームは公平であるといえる。

ここで、ゲームの胴元から「この賭けを好きなだけ長く続け、いつやめてもいいですよ」と言われたとする。このとき、いつやめても合計損益の期待値はやはりゼロだろうか？ いえ、実は「合計損益が 1 万円になったところでやめる」と決めてゲームを続けた場合、必ず（確率 1 で）いつかは 1 万円を実現できることが知られている。合計損益が永遠に 1 万円を下回っている確率は、ゼロなのである¹⁾。これはハードルが 1 万円よりも高い金額、例えば 100 万円や 1 億円でも事情は全く同じ。つまり、1 回 1 回が公平でも、いつまでも賭けを続けてよい場合は最終的に公平にならないことがあるのだ。

ゆえに胴元はプレーヤーにこのゲームをいつまでも続けさせるわけにはいかない（簡単に破産してしまう）が、では、いつまでならプレーヤーに途中でやめられても、合計損益の期待値がゼロなのだろうか？ ある回数 n を予め決めておいて「 n 回までならいいですよ」とすれば大丈夫なのだが、その他にも大丈夫なケースはあるのだろうか。

次の第2, 3節ではこの問題を数学的に定式化し, 問いに対する答えも含め議論を展開する. また数学の研究対象としては, 上の問題は通常「マルチンゲールの一様可積分性」という話題の特殊なケースとして扱われるので, その一般的な話を第4節で述べたい.

- 1) ただし, 何回コインを投げれば1万円に到達するのか, 途中どれくらい合計損益がマイナスになり得るかは分からないので, 実際の問題に適用するときには注意が必要である.

2 数学的定式化

$X_1, X_2, \dots$ は互いに独立な実数値確率変数で, 確率 $\frac{1}{2}$ ずつで ± 1 の値をとるものとする. さらに $n=1, 2, \dots$ に対し

$$S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n X_i$$

と定義する ($S_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$ とする). $(S_n)_{n=0,1,\dots}$ は1次元単純ランダムウォークと呼ばれる確率過程である. 前節において n 回コインを投げた後の合計損益は, この S_n の100倍ということになる. 以後, n は時刻とみなして議論をすすめる.

いつまでもゲームを続けてよい場合には確率1で合計損益がいつかは1万円(100万円や1億円でもよい)になることは大昔から知られていて, それは次のように示される. $k=0, 1, 2, \dots$ に対し, 「 S_n がいつかは k に到達する確率」を $p(k)$ と記す. 式で書けば

$$p(k) \stackrel{\text{def}}{=} P\{S_n = k \text{ となるような非負整数 } n \text{ が存在する}\}.$$

S_1 は $\frac{1}{2}$ の確率ずつで ± 1 という値をとるので, そこからランダムウォークが再出発すると考えると, 1以上の全ての k に対し

$$p(k) = \frac{p(k+1) + p(k-1)}{2}$$

が成立する, つまり $p(k)$ は k について等差数列をなすのである. $S_0=0$ な

ので $p(0)=1$ は自明であり、また確率を考えているので $0 \leq p(k) \leq 1$ が成り立つから、結局すべての k に対して $p(k)=1$ となる。

さて、この確率過程が k に最初に到達する時刻は

$$T(k) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{n | S_n = k\}$$

と定義される。 $T(k)$ は確率変数になるが、 $T(k)=n$ となる事象を時刻 n までの情報を用いて確定できる。このような確率変数は停止時刻 (stopping time) と呼ばれている。ゲームをやめる時刻は、それまでの情報に基づいたものでなければならないので、停止時刻の概念は自然なものであろう。前節の「いつまでならプレーヤーに途中でやめられても、合計損益の期待値がゼロなのだろうか」という問いも、この概念を用いて次のように定式化される。

問題 確率 1 で $\tau < \infty$ となるような停止時刻 τ が、さらにどんな条件を満たせば

$$\tau \text{ 以下の任意の停止時刻 } \sigma \text{ に対し } E(S_\sigma) = 0 \quad (\text{性質 } (*))$$

となるだろうか。できれば必要十分条件を与えたい。

「いつまでなら」とは τ までのことであり、「プレーヤーに途中でやめられ」る停止時刻が σ だと考えている。

3 知られている事実および今回改良した結果

第1節でも述べたとおり、 τ が恒等的に n に等しい場合は問題の性質 (*) が成立する²⁾。一方前節で定義した $T(k)$ に対しては、 $k > 0$ ならば (*) が成立しない。「停止時刻 τ が大きすぎると性質 (*) が不成立ではないか」という予想がたつが、どれくらい大きければ不成立になってしまうのだろうか。

以前から知られている事実として

定理 1' $E(\tau^{1/2}) < \infty$ ならば, 性質 (*) が成立する.

これは次節で紹介する Burkholder-Davis-Gundy の不等式と呼ばれるものから導かれる.

定理 1' は十分条件を与えたものであるが, 必要条件ではない. はじめて必要十分条件を与えたのは, 1980 年の Azéma, Gundy, and Yor の論文である.

定理 2' (Azéma, Gundy, and Yor [1]) $\sup_n E(|S_{\tau \wedge n}|) < \infty$ を仮定する, ただし $\tau \wedge n \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\tau, n\}$. このとき, 性質 (*) が成立するための必要十分条件は

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda P\{\tau^{1/2} > \lambda\} = 0.$$

つまり τ の分布の裾に関する極限の言葉で, 性質 (*) を特徴づけることに成功した. ちなみに $E(\tau^{1/2}) < \infty$ ならば $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda P\{\tau^{1/2} > \lambda\} = 0$ は満たされるので, 定理 2' の条件は定理 1' よりも確かに弱くなっている. また前節の $T(k)$ に対しては $k=0, 1, 2, \dots$ のとき

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda P\{T(k)^{1/2} > \lambda\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k$$

になることが (直接計算しても³⁾, 次節の定理 3 から) わかるので, $k > 0$ ならば確かに性質 (*) は満たされない.

次に, 定理 2' に現れる極限

$$l^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda P\{\tau^{1/2} > \lambda\}$$

が (値が 0 でないときも含め) どのような条件の下で存在するかという興味が生まれた. Tauber 型定理を用いて次の定理が示された.

定理 3' (Novikov [8]) 停止時刻 τ で止めたランダムウォーク $(S_{\tau \wedge n})_{n=0,1,\dots}$ が上か下に有界であると仮定する. このとき極限 $l^{(1)}$ が存在する. さらに性質 (*) が成立する $\iff l^{(1)} = 0$.

ただ「 $(S_{\tau \wedge n})_{n=0,1,\dots}$ が上か下に有界」というのは仮定として強すぎて, 定理 2' を完全に含んだものにはなっていない. そこで, 田中の公式を応用することによって筆者は最近次の定理を示した. この定理 4' は定理 2' と 3' を完全に含んでいる.

定理 4' (Takaoka [10]) 確率 1 で $\tau < \infty$ であり, かつ $E(|S_\tau|) < \infty$ であると仮定する. このとき極限 $l^{(1)}$ が存在する. さらに性質 (*) が成立する $\iff l^{(1)} = 0$.

なお, 第 1 節の最後で述べたように, この問題は「マルチンゲールの一様可積分性」という話題の特殊なケースとして扱うことができる. 本節の定理 1'~4' は次節の定理 1~4 にそれぞれ対応している.

- 2) 正確に言えば, 任意抽出定理 (optional sampling theorem) と呼ばれる定理から導かれる. 次節の定理 0 を用いて示すこともできる.
- 3) $T(k)$ の分布は, Feller [4] の第 3 章に載っている.

4 マルチンゲールの一様可積分性

一般に「公平な賭け」という概念は, 数学的には「マルチンゲール」と呼ばれるクラスの確率過程として表わされる. 最近では金融派生商品の価格付け理論などにもマルチンゲールが (少しひねった形で) 頻繁に現れるので, 金融工学関連の多くの書籍にも入門的解説がなされている. 数学書としては, 和書は長井 [7] などが挙げられるし, 洋書の入門書は Williams [11], Brzeźniak and Zastawniak [2], 専門書は Revuz and Yor [9] や Long [6] などがある. 連続時間の設定でのマルチンゲールの定義は次のとおり. 通常の

仮定を満たすフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}, P)$ を考える。ここで $\mathcal{F}_t$ は、時刻 t までに得られた情報と解釈することができる。実数値確率過程 $M = (M_t)_{t \in [0, \infty)}$ がマルチンゲールであるとは、任意の t に対し $E(|M_t|) < \infty$ で、かつ任意の $0 \leq s \leq t$ に対し

$$E(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$$

が成り立つことをいう。つまり s 時点までの情報を用いて将来の値 M_t の条件付き期待値をとれば、 M_s と等しくなる。簡単のため、以下では常に $M_0 = 0$ と仮定しておく。

前節において、停止時刻 τ で止めたランダムウォーク $(S_{\tau \wedge n})_{n=0,1,\dots}$ を考えたが、 $n \leq t < n+1$ のとき $M_t \stackrel{\text{def}}{=} S_{\tau \wedge n}$ と定義しフィルトレーション $\mathcal{F}_t$ などにもそれに合わせて定義すれば、本節の設定下で扱うことができる。この場合さらに確率1で $\tau < \infty$ ならば、 $M_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} M_t = S_\tau$ かつ $[M]_\infty = \tau$ になる。ただし、 $[M]_t$ はマルチンゲール M の時刻 t までの2次変分 (quadratic variation) とする。

定理0 (Doob らによる古典的結果) マルチンゲール M に対し、次の5つの性質は同値である。なお以下において、「収束する」とは「 $M_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} M_t$ が確率1で存在する」ことを指すものとする。

- ・ 収束し、かつ任意の停止時刻 σ に対し $E(M_\sigma) = 0$ 。(性質 (*))
- ・ 収束し、かつ任意の時刻 t に対し $M_t = E(M_\infty | \mathcal{F}_t)$ 。
- ・ 収束し、かつ $\lim_{t \rightarrow \infty} E(|M_t - M_\infty|) = 0$
- ・ 収束し、かつ $\lim_{t \rightarrow \infty} E(|M_t|) = E(|M_\infty|) < \infty$ 。
- ・ $\{M_t\}$ が一様可積分である

$$\left(\Longleftrightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_t E(|M_t|; |M_t| > \lambda) = 0 \right).$$

に基づき、第2節で定式化した性質 (*) を満たすものを一様可積分マルチンゲールと呼んでいる。上の2番目の性質から分かるように、これは時刻が $t \in [0, \infty)$ のみならず ∞ もこめて $t \in [0, \infty]$ でマルチンゲールになっている。

さてマルチンゲールに対し、その絶対値の上限 $\sup_t |M_t|$ と 2 次変分 $[M]_\infty$ との間に次のような著しい関係式が成り立つことが、1970 年代に明らかにされた。

定理 1 (Burkholder-Davis-Gundy の不等式) $1 \leq p < \infty$ となる定数 p を 1 つ固定する。このとき、 p のみに依存する⁴⁾ 2 つの正定数 c_p と C_p が存在し、全てのマルチンゲール M に対し

$$c_p E([M]_\infty^{p/2}) \leq E(\sup_t |M_t|^p) \leq C_p E([M]_\infty^{p/2})$$

が成立する。

特に $p=1$ のとき、上の不等式から

$$E([M]_\infty^{1/2}) < \infty \iff E(\sup_t |M_t|) < \infty$$

が成り立ち、このうちの後者の条件から、定理 0 の 5 番目の性質が導かれる。前節の定理 1' はこのようにして証明される。

以後、マルチンゲール M のジャンプが有界であると仮定する。以下の定理 2~4 は、原論文では ([5] を除き) 連続マルチンゲールに限定されているが、ジャンプが有界なマルチンゲールに拡張することは難しくないので、前節の定理 2'~4' をより一般的な枠組みで示していることになる。

定理 2 (Azéma, Gundy, and Yor [1]) $\sup_t E(|M_t|) < \infty$ を仮定する。このとき、次の 3 つの性質は同値である。

- M は一様可積分マルチンゲール
- $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda P\{[M]_\infty^{1/2} > \lambda\} = 0$.
- $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda P\{\sup_t |M_t| > \lambda\} = 0$.

定理 3 (Elworthy, Li, and Yor [3], Galtchouk and Novikov [5]) M が上に有界であると仮定する⁵⁾。このとき 2 つの極限

$$l^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda P\{[M]_\infty^{1/2} > \lambda\} \text{ と } l^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda P\{\sup_t |M_t| > \lambda\}$$

が存在して,

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} l^{(1)} = l^{(2)} = E(M_\infty)$$

を満たす. さらに

$$M \text{ が一様可積分マルチンゲール} \iff l^{(1)} = l^{(2)} = 0.$$

定理4 (Takaoka [10]) 確率1で $[M]_\infty < \infty$ であり, かつ $E(|M_\infty|) < \infty$ であると仮定する. このとき2つの極限

$$l^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda P\{[M]_\infty^{1/2} > \lambda\} \text{ と } l^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda P\{\sup_t |M_t| > \lambda\}$$

が存在して,

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} l^{(1)} = l^{(2)} = \lim_{t \rightarrow \infty} E(|M_t|) - E(|M_\infty|)$$

を満たす. さらに

$$M \text{ が一様可積分マルチンゲール} \iff l^{(1)} = l^{(2)} = 0.$$

定理4において, 極限 $l^{(2)}$ の存在は比較的容易に証明できる. しかし $l^{(1)}$ の存在を示すことは直接的には難しいので, 別の(局所)マルチンゲール

$$N_t \stackrel{\text{def}}{=} \int_{0+}^t \text{sgn}(M_s) dM_s$$

に変換し (N は M と同一の2次変分を持つことに注意), これに田中の公式や定理3などを適用して $l^{(1)}$ の存在を示していくのが, 証明の主なアイデアである. なお, M が上に有界の時には以下のようにして

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(|M_t|) - E(|M_\infty|) = E(M_\infty)$$

が示されるので, 定理4は定理2, 3を両方とも含んでいることになる. M が上に有界であるとき $M^+ \stackrel{\text{def}}{=} \max\{M, 0\}$ は有界になるから, 優収束定理より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(M_t^+) = E(M_\infty^+)$$

が成り立ち, ゆえに

$$\begin{aligned}
 \lim_{l \rightarrow \infty} E(|M_l|) - E(|M_\infty|) &= 2 \lim_{l \rightarrow \infty} E(M_l^+) - E(|M_\infty|) \\
 &= 2 E(M_\infty^+) - E(|M_\infty|) \\
 &= E(M_\infty).
 \end{aligned}$$

定理 4 において $\sup_l |M_l|$ に関する極限 $l^{(2)}$ のほうは、もっと一般的に $E(\sup_l |M_l|) < \infty$ という仮定の下で存在することがわかっているの、 $\sup_l |M_l|$ と $[M]_\infty^{1/2}$ との間の強い対称性を考えれば、定理 4 自体もより弱い仮定の下で成立することが期待される。

- 4) マルチンゲール M の選び方には依存しない。
- 5) 下に有界な場合は、 -1 倍すればよい。

5 おわりに

マルチンゲールの一様可積分性は、確率論以外にも、解析学における調和関数の境界での振る舞いと深く関係していることが知られている。賭け事の問題と、調和関数の挙動という、一見何の関係もなさそうな両者が裏で実は結びついているというのも、数学の奥深い点だと思われる。

参考文献

- [1] Azéma, J., R. F. Gundy & M. Yor, Sur l'intégrabilité uniforme des martingales continues. *Séminaire de Probabilités XIV*, Lecture Notes in Mathematics vol. 784, Springer (1980), pp. 53-61.
- [2] Brzeźniak, Z. & T. Zastawniak, *Basic Stochastic Processes*. Springer, 1999.
- [3] Elworthy, K. D., X. M. Li & M. Yor, On the tails of the supremum and the quadratic variation of strictly local martingales. *Séminaire de Probabilités XXXI*, Lecture Notes in Mathematics vol. 1655, Springer (1997), pp. 113-125.
- [4] Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. I, Third edition. Wiley, 1968.
- [5] Galtchouk, L. I. & A. A. Novikov, On Wald's equation. Discrete time

- case. *Séminaire de Probabilités XXXI*, Lecture Notes in Mathematics vol. 1655, Springer (1997), pp. 126-135.
- [6] Long, R., *Martingale Spaces and Inequalities*. Peking University Press and Vieweg Publishing, 1993.
- [7] 長井英生『確率微分方程式』, 共立出版1999年.
- [8] Novikov, A. A., The crossing time of a one-sided nonlinear boundary by sums of independent random variables. *Theory of Probability and Its Applications* 27 (1982), 688-702.
- [9] Revuz, D. & M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Second edition. Springer, 1994.
- [10] Takaoka, K., Some remarks on the uniform integrability of continuous martingales. *Séminaire de Probabilités XXXIII*, Lecture Notes in Mathematics vol. 1709, Springer (1999), pp. 327-333.
- [11] Williams, D., *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, 1991.

(一橋大学専任講師)