空売り制約と状態価格ベクトルの存在

星　野　良　明

1　はじめに

競争的な証券市場を含む経済の理論的分析において，状態価格ベクトル[1)]は基本的な概念のひとつである．本稿の目的は，空売り制約を考慮した場合の状態価格ベクトルの定義とその存在を，2時点の不完備金融証券市場モデルにおいて議論することである．

状態価格とは，直感的には，将来時点での不確実な経済状態の生起に依存して追加的に1円を受け取るために現時点で必要な金額である．状態価格ベクトルを通じた証券の価格とその配当の関係は，資産価格理論における基本的な原理のひとつである．また，不完備市場理論（Theory of Incomplete Markets）における競争均衡の存在証明においても，状態価格ベクトルは重要な役割を果たしている．

本稿では，状態価格ベクトルの存在を保証する条件として，無裁定条件に注目する．無裁定条件とは，証券価格ベクトルを所与として，費用ゼロで正の利得を確実に生じるポートフォリオが存在しないことである．無裁定条件は，競争的証券市場において決定される証券価格体系を合理的経済主体の行動の帰結と考えるとき，証券価格体系が満たすべき条件のひとつである．証券価格ベクトルが裁定取引を許容するならば，市場参加者の取引行動そのものが描写されないからである．この無裁定の概念は，価格を所与として行動するという意味の完全競争性と，市場参加者のうち少なくともひとりが強意単調増大性を満たす選好をもつことを前提とする．

無裁定条件から状態価格ベクトルの存在を示す代表的な方法は，分離超平面定理の利用である．無裁定条件を幾何学的に解釈して分離超平面定理を適用するこの方法は，モデルが離散的でも連続的でも適用可能である．しかしながら，時間に関しても状態に関しても離散的な証券市場モデルにおいては，無裁定条件から状態価格ベクトルを導くために，線形連立不等式における二者選一の定理（Theorems of Alternative）を利用できる．この方法は，裁定取引が存在するか，状態価格ベクトルが存在するか，いずれか一方のみが成立する，と二者選一の定理を読むことにより，二者選一の定理の成立の直接の帰結として状態価格ベクトルの存在を示すものである．

すべての証券について空売り制約が課されない証券市場モデルにおいて，無裁定条件から状態価格ベクトルの存在を示すために標準的に利用される二者選一の定理は，Stiemke の定理[2)]である．では，空売り制約を伴う証券市場モデルにおいて，二者選一の定理を利用して無裁定条件から状態価格ベクトルの存在を示すことは可能であろうか．本稿では，状態価格ベクトルの存在を「直接」意味する，線形連立不等式における二者選一の定理のひとつのバリエーションを証明する．そして，この命題を利用して，無裁定条件が状態価格ベクトルの存在の十分条件であることを証明する（本稿の設定では，必要条件にもなる）．空売り制約が課される場合，各証券価格とその配当の状態価格ベクトルによる加重和とを等しくさせるものとして，状態価格ベクトルを定義するならば，そのような状態価格ベクトルの存在は無裁定条件の帰結としては一般には保証されない．そこで空売り制約下では，証券の価格とその配当の状態価格ベクトルによる加重和とを等しくさせるという意味において本来的な状態価格ベクトルの概念を拡張する必要が生じる．本稿において，無裁定条件からその存在が証明される状態価格ベクトルは次のようなものである：空売り制約の課されない証券の価格はその配当の状態価格ベクトルによる加重和に等しく，かつ，空売り制約の課された証券の価格はその配当の状態価格ベクトルによる加重和を下まわることはない．

本稿における上述の状態価格ベクトルの概念の拡張は，He and Pearson

(1991) と Girotto and Ortu (1994) に依拠している．この二つの論文では，二者選一の定理のひとつのバリエーションである Motzkin's Transposition Theorem[3]を利用して，無裁定条件から上述の意味での状態価格ベクトルの存在が主張されている[4]．本稿で証明される二者選一の定理のひとつのバリエーションは，He and Pearson (1991) と Girotto and Ortu (1994) において状態価格ベクトルの存在の根拠とされる Motzkin's Transposition Theorem と違い，その主張が裁定取引が存在するか状態価格ベクトルが存在するか，いずれか一方のみが成立すると解釈できるものになっている．

空売り制約を伴う証券市場の理論的分析には，例えば次のような研究がある．Jouini and Kallal (1995a, b) は，証券市場の連続的な一般均衡モデルにおいて空売り制約下の状態価格ベクトル（に対応する概念）の存在を証明している．また，平均・分散モデルの枠組みで，Jarrow (1980) は，市場均衡価格を計算することから，空売り制約の存在が証券価格に与える影響を分析している．Diamond and Verrecchia (1987) は，競争的な market maker が取引価格を決定する Glosten-Milgrom モデルを利用して，空売り制約が証券価格の情報伝達機能に与える影響を分析している．

本稿の構成は以下のようである．まず，第2節で，裁定を議論するための最小限の経済モデルを定義し，裁定取引と状態価格ベクトルの概念を導入する．空売り制約のない場合と比べて，空売り制約の導入がどのような問題を生じさせるのかについても言及する．第3節で，二者選一の定理のひとつのバリエーションを証明し，それを利用して状態価格ベクトルの存在を証明する．最後に第4節で本稿のまとめを行う．

2　経済モデル

2.1　空売り制約下の無裁定

2時点（0時点と1時点）の証券市場モデルを考える[5]．$\mathbf{S}=\{1, 2, \cdots, S\}$ を S 個の要素からなる自然の状態の集合とする．経済の不確実性は状態集合 $\mathbf{S}$ 上の分割の列 (F_0, F_1) であらわす．ただし，$F_0=\{\mathbf{S}\}$，$F_1=\{\{s\}|s=1, 2, \cdots, S\}$

を仮定する．つまり，0時点では情報は全くなく，1時点では不確実性はすべて解消すると仮定する．0期の事象 $\mathbf{S}$ を便宜的に $s=0$ であらわす．物理的に識別された財が L 種類存在する．0時点と1時点の事象ごとに識別した財，つまり状態依存財[6]は，$L(S+1)$ 種類ある．よって，状態依存財空間は $\mathbf{R}^{L(S+1)}$ である．

N 種類の金融証券が存在する．証券の添字集合を $\mathbf{N}=\{1,\cdots,N\}$ とする．0時点で証券が取引され，1時点において実現した状態に依存して貨幣単位（たとえば，円）の配当が支払われる．金融証券は $\mathbf{R}^S$ の一点 $D_n=(D_{n1},\cdots,D_{nS})$ として表現される．D_{ns} は証券 n を一単位保有している主体に1時点の状態 s において支払われる配当を表す．D_{ns} を第 n 行，第 s 列の要素とする行列を D で表し，証券行列とよぶ．

$\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_N)\in\mathbf{R}^N$ でポートフォリオを表す．各 θ は証券のネットの取引量をあらわすものとする．すべての証券について空売り制約のない場合，実行可能なポートフォリオの集合は $\Theta=\mathbf{R}^N$ である．本稿では，ある証券に対する空売り制約を，その証券のネットの取引量を非負に制限することにより表現する．$\mathbf{N}^+\subset\mathbf{N}$ で空売り制約の課された証券の集合をあらわし，N^+ で $\mathbf{N}^+$ の元の総数をあらわす．このとき，実行可能なポートフォリオの集合は

$$\Theta^+=\{\theta\in\mathbf{R}^N|\theta_n\geqq 0, n\in\mathbf{N}^+\}$$

となる．Θ^+ は，いくつかの証券の取引量について負の方向を取り除いたものであるから，$\mathbf{R}^N$ における凸錘である．

証券価格ベクトル $q\in\mathbf{R}^N$ を所与として，証券行列に列ベクトルとみなした $-q$ を付け加えた $N\times(1+S)$ 行列 W を

$$W=\begin{pmatrix} -q_1 & D_{11} & \cdots & D_{1S} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -q_N & D_{N1} & \cdots & D_{NS} \end{pmatrix}$$

と定義し，利得行列（payoff matrix）と呼ぶ．このとき，ポートフォリオ θ を選択したとき達成される状態依存所得，つまり，0時点の収益（ポートフォリオ購入の費用にマイナスを付けた値）と1時点の各状態での配当は，

$W^{\top}\theta \in \mathbf{R}^{S+1}$ である．

定義 2.1　証券価格ベクトル $q \in \mathbf{R}^N$ を所与にして，以下の条件を満たすポートフォリオ $\theta \in \Theta^+$ が存在しないとき，裁定取引は存在しない（あるいは，無裁定条件が成立する）という．

$$W^{\top}\theta \geq 0.$$

定義から，裁定取引が存在するならば，

$$q \cdot \theta \leqq 0 \text{ and } D^{\top}\theta \geq 0$$

または，

$$q \cdot \theta < 0 \text{ and } D^{\top}\theta \geqq 0$$

を満たすポートフォリオ θ が存在する．以下では，このポートフォリオを裁定取引と呼ぶことにする．また，裁定取引を許容しない証券価格ベクトルを無裁定証券価格ベクトルと呼ぶ．

ポートフォリオの選択により達成される状態依存所得の集合を M^+ であらわす．つまり，

$$M^+ = \{m \in \mathbf{R}^{S+1} | m = W^{\top}\theta,\ \theta \in \Theta^+\}.$$

M^+ は状態依存所得空間 $\mathbf{R}^{S+1}$ の部分集合であり，各元 $m \in M^+$ は marketed claim と呼ばれる．空売り制約のない場合の marketed claim の集合は $M = \{m \in \mathbf{R}^{S+1} | m = W^{\top}\theta,\ \theta \in \Theta\}$ である．M は状態依存所得空間の線形部分空間である．一方，空売り制約の存在から M^+ は線形部分空間とはならず，凸錐にしかならない．ここで，M^+ を使った無裁定条件の表現を考えてみる．M^+ が状態依存所得空間の正象限 $\mathbf{R}_+^{S+1}$ と共通部分をもつことは，すべての状態において正の収益を実現するポートフォリオが存在することを意味する．よって，裁定取引が存在しないならば，M^+ と $\mathbf{R}_+^{S+1}$ との共通部分は原点のみである．また逆に，M^+ と $\mathbf{R}_+^{S+1}$ との共通部分が原点のみであるならば，裁定取引は存在しない．したがって，M^+ を使えば，無裁定条件は次の条件と同値である：q を所与として，

$$M^{+} \cap \mathbf{R}_{+}^{S+1} = \{0\}.$$

もちろん，空売り制約が存在しない場合も同様に，無裁定条件は $M \cap \mathbf{R}_{+}^{S+1} = \{0\}$ と同値である．M^{+} と $\mathbf{R}^{S+1}$ に分離超平面定理を適用することにより，無裁定条件から状態価格ベクトルの存在が示される．

2.2 空売り制約下の状態価格ベクトル

空売り制約のない証券市場モデルでは，状態価格ベクトルは，各証券についてその価格が状態価格ベクトルによる配当の加重和に等しくなるベクトルとして定義される．しかしながら，空売り制約が課される証券市場モデルでは，そのような本来的な意味での状態価格ベクトルの存在を，無裁定条件から一般的には示すことができない．まず，この点について以下に説明する．

空売り制約のもとでは，q を所与として裁定取引が存在しないとしても，1時点で同一の配当を実現するにも関わらず，0時点の費用が異なるポートフォリオのペアが存在する可能性がある．つまり，条件

$$D^{\top}\theta^{A} = D^{\top}\theta^{B} \text{ and } q \cdot \theta^{A} \neq q \cdot \theta^{B}$$

を満たすポートフォリオ θ^{A} と θ^{B} の存在を，無裁定条件は排除できない可能性がある．実際，このポートフォリオのペアの存在は無裁定条件の成立と矛盾するとは限らない．その理由：$q \cdot \theta^{A} > q \cdot \theta^{B}$ であるとする．このとき，ポートフォリオ $\theta^{B} - \theta^{A}$ は，$q \cdot (\theta^{B} - \theta^{A}) < 0$ かつ $D^{\top}(\theta^{B} - \theta^{A}) = 0$ を満たす．よって，$\theta^{B} - \theta^{A}$ は裁定取引である．しかし，$\theta^{B} - \theta^{A}$ は空売り制約を満たすとは限らない（つまり，ある空売り制約を課された証券 $n \in \mathbf{N}^{+}$ について $\theta_{n}^{B} - \theta_{n}^{A} < 0$ が成立している可能性がある）．したがって，ポートフォリオ θ^{A} と θ^{B} の存在は無裁定条件の成立と矛盾するとは限らない（$q \cdot \theta^{A} < q \cdot \theta^{B}$ である場合も同様）．

空売り制約のない場合と同様に，各証券についてその配当の状態価格ベクトルによる加重和とその価格を等しくするものとして，状態価格ベクトルを定義してみよう：各証券 $n = 1, \cdots, N$ について，

$$q_{n} = \sum_{s=1}^{S} D_{ns} \pi_{s}.$$

ただし，$\pi_0=1$ とする．π_s は，状態 s において追加的に1円受け取り，その他の状態においては何も受け取らない，という条件付き契約に対して0時点で必要な費用を表している．

このとき，次の主張が成立する：前述の条件をみたすポートフォリオのペア θ^A, θ^B が存在するならば，状態価格ベクトルは存在しない．その理由：状態価格ベクトルが存在すると仮定する．$D^{\top}\theta^A=D^{\top}\theta^B$ を書き直せば，各状態 s について，$\sum_{n=1}^{D}D_{ns}\theta_n^A=\sum_{n=1}^{N}D_{ns}\theta_n^B$．両辺に s における状態価格 π_s をかけて，s について両辺で和をとれば，$\sum_{s=1}^{S}\sum_{n=1}^{N}D_{ns}\pi_s\theta_n^A=\sum_{s=1}^{S}\sum_{n=1}^{N}D_{ns}\pi_s\theta_n^B$．状態価格ベクトルの定義から，$q\cdot\theta^A=q\cdot\theta^B$．この等式は，$\theta^A$ と θ^B の定義に矛盾する．

上述の主張は，空売り制約を考慮する場合，状態価格ベクトルの定義を変更する必要があることを示している．空売り制約下の経済主体の最適なポートフォリオ選択において，効用最大化の一階条件から限界効用による状態価格ベクトルの表現を求めることを考えよう．このとき，端点解のケースを一般に排除できないから，無裁定証券価格は，最適消費点のおける限界効用による配当の加重和よりも低くなることはない．そこで，状態価格ベクトルの定義を次のように修正してみる[7]．各証券 $n=1,\cdots,N$ について，

$$q_n \geqq \sum_{s=1}^{S}D_{ns}\pi_s$$

ただし，$\pi_0=1$ とする．もちろん，たとえ空売り制約があったとしても，すべての証券について等号が成立することもあり得る．

このように状態価格ベクトルの定義を修正するならば，上述のポートフォリオ θ^A, θ^B が存在することは状態価格ベクトルの存在と矛盾しない．ある証券について強い意味の不等号が成り立つ（つまり，$q_n>\sum_{s=1}^{S}D_{ns}\pi_s$）状況（証券価格ベクトルと配当ベクトルの組）の存在は，一般には排除できないから，空売り制約を考慮した価格付けと空売り制約のない価格付けとを区別することには意味がある．

いくつかの証券に空売り制約が課される証券市場では，実行可能なポートフォリオが制限されるため，経済主体に裁定を許容しない証券価格ベクトル

の集合が広がる．そのために，状態価格ベクトルが関連づけなければならない，証券配当ベクトルと価格ベクトルの組み合わせの総数は，空売り制約のない場合と比べて多くなる．よって，状態価格ベクトルの定義を拡張する必要が生じる．

本稿では，上述の状態価格ベクトルの概念の拡張をもう一歩進め，状態価格ベクトルを，$\mathbf{R}^{S+1}$ におけるベクトルで，空売り制約の課されない証券に関しては，価格をそのベクトルによる配当の加重和に等しくさせ，かつ，空売り制約の課された証券に関しては，価格をそのベクトルによる配当の加重和を下まわらせないものと定義する．

定義 2.2　状態価格ベクトルとは次の条件を満たす強意正のベクトル $\pi=(\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_S) \in \mathrm{R}^{S+1}_{++}$ である．

$$q_n \geqq \frac{1}{\pi_0}\sum_{s=1}^{S} D_{ns}\pi_s \quad \text{if} \quad n \in \mathbf{N}^+;$$

$$q_n = \frac{1}{\pi_0}\sum_{s=1}^{S} D_{ns}\pi_s \quad \text{if} \quad n \in \mathbf{N}\backslash\mathbf{N}^+.$$

$\dfrac{\pi_s}{\pi_0}$ は状態 s において追加的に1円受け取り，その他の状態では何も受け取らないという条件付き契約に対して0時点で必要な費用の「下界」を表している．

3　空売り制約下での状態価格ベクトルの存在

まず，記号の説明をする．A，B は $m\times n$ 行列とする．そして，$u \in \mathbf{R}^m$ は $m\times 1$ 行列，$x, y \in \mathbf{R}^n$ は $n\times 1$ 行列とみなす．

すべての証券の取引量に空売り制約が課される場合に，無裁定条件から状態価格ベクトルの存在を示すために直接利用可能な命題としては，以下のものが知られている[8)]．

定理 3.1　(**二階堂 (1961)**)　もし，$x \in \mathbf{R}^n$ に関する連立不等式 $Ax \geqq 0$，$x \geqq 0$

が解をもたなければ，$u \in \mathbf{R}^m$ に関する連立不等式 $A^{\top}u \leqq 0$, $u > 0$ の解が存在する．

この命題は次の Tucker の定理[9]から証明される．

定理 3.2 (**Tucker (1956)**) $x \in \mathbf{R}^n$ に関する非負条件付きの連立方程式 $Ax=0$, $x \geqq 0$ と $u \in \mathbf{R}^m$ に関する連立不等式 $A^{\top}u \geqq 0$ は，条件 $A^{\top}u + x > 0$ を満たす解をもつ．

本稿では，いくつかの証券について空売り制約が課される状況を考えている．以下の命題は，このような場合においても，無裁定条件から状態価格ベクトルの存在を示すために直接利用可能なものである．

補題 3.1　もし，$x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^n$ に関する連立不等式

$$Ax + By \geq 0,\ x \geqq 0$$

が解をもたなければ，$u \in \mathbf{R}^m$ に関する連立不等式

$$A^{\top}u \leqq 0,\ B^{\top}u = 0,\ u > 0$$

の解が存在する．

この主張は，定理 3.1 の証明と Tucker (1961) による Transposition 定理[10]の証明を，定理 3.2 に応用することにより証明される．

証明：x, y に関する連立不等式 $Ax + By \geq 0$, $x \geq 0$ が解をもたないと仮定する．定理 3.2 を次の $(m+3n) \times 3n$ 行列に対して適用することを考える：

$$\left(\begin{array}{ccc} A & B & -B \\ \hline & I_{3n} & \end{array}\right).$$

ここで，I_{3n} は $3n$ 次の単位行列をあらわす．$y^1, y^2 \in \mathbf{R}^n$ を $n \times 1$ 行列，$z \in \mathbf{R}^{3n}$ を $3n \times 1$ 行列とする．定理 3.2 から，x, y^1, y^2 に関する連立不等式と

u, z に関する非負制約付きの連立方程式,

$$\left(\frac{A \quad B \quad -B}{I_{3n}}\right)\begin{pmatrix} x \\ y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} \geqq 0, \tag{1}$$

$$\left(\frac{A \quad B \quad -B}{I_{3n}}\right)^\top \begin{pmatrix} u \\ z \end{pmatrix} = 0, \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ z \end{pmatrix} \geqq 0 \tag{3}$$

は,

$$\left(\frac{A \quad B \quad -B}{I_{3n}}\right)\begin{pmatrix} x \\ y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ z \end{pmatrix} > 0 \tag{4}$$

を満たす解をもつ. (1) 式は,

$$Ax + By^1 - By^2 \geqq 0, \quad x \geqq 0, \quad y^1 \geqq 0, \quad y^2 \geqq 0$$

に等しい. ここで, $y \equiv y^1 - y^2$ と定めれば,

$$Ax + By \geqq 0 \qquad x \geqq 0$$

をみたす x と y が存在することになる. このとき仮定から, $Ax+By=0$ を得る. (4) 式を整理すれば,

$$\begin{pmatrix} Ax+By \\ x \\ y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ z \end{pmatrix} > 0$$

となる. $Ax+By=0$ であるから, $u>0$ である.

(2) 式を整理すれば,

$$(A \quad B \quad -B)^\top u + z = 0$$

である. $z \geqq 0$ であるから, $(A \quad B \quad -B)^\top u = -z \leqq 0$ となる. これを書き直せば, $A^\top u \leqq 0$, $B^\top u \leqq 0$, $-B^\top u \leqq 0$ である. すなわち, $A^\top u \leqq 0$, $B^\top u = 0$. 以上より, $A^\top u \leqq 0$, $B^\top u = 0$, $u > 0$ である. ■

上述の補題の直接の帰結として，無裁定条件から状態価格ベクトルの存在を示すことができる．

命題 3.1　状態価格ベクトルが存在することの必要十分条件は，裁定取引が存在しないことである．

補題を命題3.1の証明に適用するために，次のように記号を定める．ポートフォリオ $\theta\in\mathbf{R}^{N}$ において，空売り制約の課された証券に対応する成分のみを抜き出したベクトルを $\theta_{+}\in\mathbf{R}^{N+}$ で，空売り制約のない証券に対応する成分を抜き出したベクトルを $\theta_{0}\in\mathbf{R}^{N-N+}$ であらわす．同様にして，利得行列 W において空売り制約を課された証券に対応する行ベクトルのみを抜き出した $N^{+}\times(S+1)$ 行列を W_{+} で，空売り制約のない証券に対応する行ベクトルのみを抜き出した $(N-N^{+})\times(S+1)$ 行列を W_{0} であらわす．

命題の証明：（十分性）　裁定取引が存在しないとする．補題3.1において，$A=W_{+}^{\top}$ $B=W_{0}^{\top}$，$x=\theta_{+}$，$y=\theta_{0}$，$u=\pi$ とおく．このとき，裁定取引が存在しないことは，命題3.1の仮定の成立と同値である．よって，補題3.1から，$W_{+}\pi\leqq 0$，$W_{0}\pi=0$，$\pi>0$ を満たすベクトル π が存在する．つまり，裁定取引が存在しないならば，状態価格ベクトル $\pi\in\mathbf{R}_{++}^{S+1}$ が存在する．

（必要性）　状態価格ベクトル π が存在するとする．そして，裁定取引が存在すると仮定する．つまり，ある $\theta\in\Theta^{+}$ が存在して $W^{\top}\theta\geq 0$ を満たす．この不等式の左辺に左から $\pi>0$ を掛ければ，$\pi(W^{\top}\theta)>0$．また，状態価格ベクトルの定義から，$(W\pi)\theta=\pi(W^{\top}\theta)\leqq 0$ を得る．これは矛盾．よって，状態価格ベクトルが存在するならば，裁定取引は存在しない．　■

4　終わりに

本稿では，2時点の不完備金融証券市場モデルにおいて，空売りが禁止された場合にも，無裁定証券価格ベクトルに対して状態価格ベクトルが存在す

ることを確認した．ただし，各状態における状態価格は，その状態において追加的に1円受け取り，その他の状態では何も受け取らない，という条件付き契約に対して0時点で必要な費用の「下界」を表すと定義した．言い換えれば，本稿では，ある証券に空売り制約が課されるとき，その証券の無裁定価格がその配当の0時点における価値を下まわることはないことを確認した．

空売り制約の導入は，同一の状態所得移転を達成する異なるポートフォリオの市場価値を一致させる役割を果たす裁定取引を実行不可能にする．このために，状態価格ベクトルの定義の変更が必要となる．本稿の定義での空売り制約下の状態価格ベクトルは分離超平面定理を通じても，その存在を示すことができる．しかし，本稿ではより初等的な二者選一の定理から，状態価格ベクトルの存在を示した．

本稿では，証券価格に対する基本的制約のひとつである無裁定条件から，証券価格とその配当の関係を分析した．一方，Jarrow (1980) と Diamond and Verrecchia (1987) では，証券価格に対するもうひとつの基本的制約である市場均衡条件から，証券価格とその配当の関係を分析している．そして，空売り制約の存在が空売り制約のない場合と比較して均衡証券価格を上昇させるとは限らないことを示している．

証券の空売りは現実には規制の対象とされている．その根拠のひとつとして，証券の空売りは証券価格の下落傾向を強め，価格操作に利用される可能性があるという見解がある．この見解では，本稿の前提のひとつである市場の完全競争性が仮定されていない．この見解の検討には，本稿とは異なる証券の市場取引の定式化のもとで，証券需要と均衡証券価格を明示的に分析する必要があるだろう．

1) 状態価格の概念は Arrow (1953) によって不確実性下の経済の一般均衡分析にはじめて導入された．

2) Stiemke の定理とその証明については，例えば，二階堂 (1961), pp. 116-120 を参照のこと．

3）Kuhn（1956), Corollary 2A（ii), p. 10.

4）He and Pearson（1991), p. 4では，無裁定条件から状態価格ベクトルの存在を示すことは

… a straightforward application of Motzkin's Transposition Theorem (see, e. g., Tucker 1956, Corollary 2A).

と主張されている．しかし，具体的な証明は与えられていない．

5）本稿の議論は，2時点以上の有限多期間の離散的モデルにおいても，以下に定義する利得行列 W を適切に定義し直すことにより成立する．この点については，Magill and Quinzii（1996), Chapter 4を参照のこと．

6）厳密には，事象依存財と呼ぶべきである．

7）空売り制約の存在する証券市場モデルにおける，このような状態価格ベクトルの定義は標準的なものである．たとえば，Jouini and Kallal（1995a, b). Allen, Morris and Postlewaite（1993）を参照のこと．

8）二階堂（1961)，補助定理1, pp. 157-158. この命題の分離超平面定理を利用した証明については，二階堂（1960)，系2（ii), p. 210を参照のこと．

9）Tucker（1961), Theorem 1, pp. 8-9. Tuckerの定理とStiemkeの定理の関係については，Nikaido（1968), Theorem 3. 7, Proof（I)-(II), pp. 36-37を参照のこと．

10）Tucker（1961), Theorem 2, p. 9.

参考文献

[1] Allen, F., S. Morris and A. Postlewaite (1993), "Finite Bubbles with Short Sale Constraints and Asymmetric Information," *Journal of Economic Theory*, Vol. 61, 206-229.

[2] Arrow, K. J. (1953), "Le Rôle des Valueurs Boursières Pour la Repartition la Meillure des Risques," *Econometrie, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique*, No. 40, 41-47 ; discussion, 47-48 ; Translated as "The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-bearing," *Review of Economic Studies*, Vol. 31, 91-96, (1964).

[3] Diamond, D. W. and R. E. Verrecchia (1987), "Constraints on Short-Selling and Asset Price Adjustment to Private Information," *Journal of Financial Economics*, Vol. 18, 277-311.

[4] Duffie, D. (1996), *Dynamic Asset Pricing Theory*, Second Edition. Princeton : Princeton University Press.（大橋和彦・桑名陽一・本多俊毅・山崎昭訳

『資産価格の理論』東京：創文社，1998 年）

[5] Girotto, B. and F. Ortu (1994), "Consumption and Portfolio Policies with Incomplete Markets and Short-Sale Constraints in the Finite-Dimensional Case : Some Remarks," *Mathematical Finance*, Vol. 4, No. 1, 69-73.

[6] He, H. and N. D. Pearson (1991), "Consumption and Portfolio Policies with Incomplete Markets and Short-Sale Constraints : the Finite-Dimensional Case," *Mathematical Finance*, Vol. 1, No. 3, 1-10.

[7] Jarrow, R. (1980), "Heterogenous Expectations, Restrictions on Short Sales, and Equilibrium Asset Prices," *Journal of Finance*, Vol. 35, 1105-1113.

[8] Jouini, E. and H. Kallal (1995a), "Arbitrage in Securities Markets with Short-Sales Constraints," *Mathematical Finance*, Vol. 5, No. 3, 197-232.

[9] Jouini, E. and H. Kallal (1995b), "Martingales and Arbitrage in Securites Marktes with Transaction Costs," *Journal of Economic Theory*, Vol. 66, 178-197.

[10] 倉澤資成（1996），"派生証券の経済機能，" 堀内昭義編『金融の情報通信革命』第 8 章，pp. 203-228. 東京：東洋経済新報社.

[11] Magill, M. and M. Quinzii (1996), *Theory of Incomplete Markets*, Vol. 1. Cambridge, MA : MIT Press.

[12] 二階堂副包（1960）『現代経済学の数学的方法』東京：岩波書店.

[13] 二階堂副包（1961），『経済のための線形数学』新数学シリーズ 22. 東京：培風館.

[14] Nikaido, F. (1968) *Convex Structures and Economic Theory*. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 51. New York : Academic Press.

[15] Tucker, A. W. (1956), "Dual Systems of Homogenous Linear Relations." In H. W. Kuhn and A. W. Tucker eds., *Linear Inequalities and Related Systems*, pp. 3-18. Princeton : Princeton University Press.

［1998 年 11 月 11 日　受稿］
［1999 年 3 月 4 日　受理］

（一橋大学大学院博士課程）