# 超函数を初期値とする Navier-Stokes 方程式と半線型熱方程式

山 崎 昌 男

流体の運動を記述する偏微分方程式の一つである Navier-Stokes 方程式及び関連する偏微分方程式について，名古屋大学の小薗英雄氏と筆者との共同研究の結果と，それに至る研究の流れを中心にして論じたい．

流体の巨視的な運動を記述する偏微分方程式のうち，最も簡単な形をしているものは，

(a) 流体は非圧縮性である．即ち，どれだけ圧力が高くなっても密度は一定である．

(b) 粘性がない．即ち，ある部分の運動は，近くの運動に直接は影響されず，圧力と外力のみに影響される．

という仮定のもとで導かれる，次の形の方程式である．これを非圧縮性 Euler 方程式と呼ぶ．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f, \\ \nabla\cdot u = 0 \end{cases}$$

ここで空間の次元を $n\geq 2$ としたとき，$u=u(t,x)=(u_1,\cdots,u_n)$ は流体の速度を表わすベクトル値関数，$f=f(t,x)=(f_1,\cdots,f_n)$ は外力を表わすベクトル値関数で，$p=p(t,x)$ は流体の圧力を表わすスカラー値関数であり，方程式は $0<t<\infty, x\in\Omega$（$\Omega$ は $n$ 次元 Euclid 空間の開部分集合）で考えるものとする．また，

$$u\cdot\nabla = \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial}{\partial x_j},\ \nabla\cdot u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j},\ \Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j{}^2},$$

$$\nabla p=\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \cdots\cdots, \frac{\partial p}{\partial x_n}\right)$$

である．この方程式は，形は簡単であるが，流れの中においた障害物が流体からの力を受けない等不自然なところがあるので，普通は液体の運動をモデル化した方程式としては，粘性項と呼ばれる項をつけ加えた以下の Navier-Stokes 方程式を考える．

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\Delta u+(u\cdot\nabla)u+\nabla p=f, \\ \nabla\cdot u=0 \end{cases}$$

ここで，粘性というのは，流体のある部分が周囲の動きに引きずられて動こうとする性質である．ちなみに，気体の運動の巨視的なモデルとしては，粘性を入れないままにする代わりに，密度が圧力に応じて変化すると仮定して導いた，圧縮性 Euler 方程式を考えるのが一般的である．

以下（1）に加えて，初期条件

$$(2)\qquad u(0,x)=a(x)$$

を $\Omega$ 上で要求する．また，$\Omega$ が全空間でない場合には，境界条件

$$(3)\qquad u(t,x)=0$$

が $\Omega$ の境界で成り立つことをも要求し，(1)—(3) の解を単に解と呼ぶことにする．

この方程式は，前世紀に考えられたものであるが，当時は（今でも）解の公式のようなものはなかった．そこで，解の第1近似として，非線型項 $(u\cdot\nabla)u$ を無視して得られる方程式の解を選び，その解から計算した非線型項を外力に加えた線型方程式の解を第2近似とし，以下同様の操作を十分な近似が得られるまで続けるという，摂動論的な解き方しかなかったと思われる．この方法の問題点は，粘性に比べて速度が大きい場合については，近似列が収束せず，従って途中に現われる近似解と実際の解の関係が全くわからないことである．

第二次世界大戦直前に，フランスの Leray が $n=2,3$ の場合に，完成して

間もない Hilbert 空間の理論を駆使して，速度が大きい場合にも弱い意味の解が存在することを示した．ちなみにこの人は，その後ドイツ占領軍に対するレジスタンスに加わって投獄された際に，多くの計算を必要とする偏微分方程式の研究をあきらめ，層の理論と呼ばれる抽象論を創始して，トポロジー及び代数幾何学にも多大な影響を与えた．

Leray の解はどんなに初期値が大きくても構成できるが，$n=3$ の場合には得られた解が普通の意味で微分できるかどうか不明であり，更に悪いことに，解が一通りに定まるかどうかわからない．そこで，以前に用いられた摂動論による近似列が収束することを厳密に証明する方向での研究も行なわれるようになった．この理論は日本のお家芸になっており，加藤敏夫・藤田宏両氏の研究，及びそれを拡張した儀我美一・宮川鉄朗両氏の研究等により，$\Omega$ が全空間または有界な開集合の場合には，$|a(x)|^n$ が $\Omega$ 上積分でき，積分値が十分小さい場合，(1)―(3) の $t>0, x\in\Omega$ 上での滑らかな解がただ1つ定まることがわかった．以後は簡単のため，$\Omega$ は全空間であるものとし，また外力 $f$ は常に 0 に等しいものとする．

ところが，(数学者が考える意味での) 物理的な問題として，一点のごく近くに非常に強力な渦があるような場合を考えようとすると，今までの結果では不十分であった．そこで，初期値 $a(x)$ の微分が測度 (一点にのみ密度が集中し，その点以外には質量が全く存在しないが，全体としては 0 でない質量を持つようなもの) になるような場合の研究が儀我・宮川・長田博文三氏によって ($n=2, 3$ の場合に) 行なわれた．この研究は更にアメリカの Taylor 及び加藤氏によって，任意の $n\geq 2$ に対し，初期値そのものが測度である場合にまで拡張された．

一方，よく Navier-Stokes 方程式と関連して論じられる方程式として，次のものがある．この方程式は半線型熱方程式と呼ばれることが多い．

$$(4)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}-\Delta u-|u|^{\gamma-1}u=0$$

ここで $u=(t, x)$ はスカラー値関数で，$\gamma$ は 1 より大きい定数である．この

方程式は，Navier-Stokes方程式に比べると，物理的正当性に乏しい．一応，反応速度が温度の$\gamma$乗に比例する発熱反応があるときの温府分布の変化を記述しているという説明がなされるが，どんなに高温になっても上の関係が成り立つような反応があるかどうか，筆者にはわからない．この方程式を考えたのは先の藤田氏であるが，形がNavier-Stokes方程式より簡単に見えるので，Navier-Stokes方程式を解くための練習問題として考えたのかも知れない．しかし結果は予想を裏切るものであって，(4)は(1)より解きにくいのであった．即ち（その後得られた結果を補って簡単に述べると）次の結果が得られた．

(a) $p=n(\gamma-1)/2>1$ならば，$|a(x)|^p$が全空間上積分でき，積分値が十分小さい場合，(2)+(4)の$t>0$での滑らかな解がただ1つ定まる．

(b) $p\leq 1$ならば，$a(x)\geq 0, a(x)\not\equiv 0$をみたす任意の$a(x)$に対し，(2)+(4)の解で全ての$t>0$に対して定義できるものは存在しない．

言い替えると，$p\leq 1$のときの(4)の解は，ある時間が経過するとどこかの点で値が無限大になってしまい，その後は（普通の意味では）解けないということである．即ち，(4)は(1)より解が存在しにくいのである．（このことは(4)が(1)より難しいということを意味しない．解が存在しないことがわかる方程式より，解が存在するかしないかすらわかっていない方程式の方が数段難しいのである．）その後，値が無限大になってしまう点がただ一点になってしまう場合があることがアメリカのWeisslerによって発見され，その場合の解の大きくなる様子が先の儀我氏らによって詳しく調べられた．

その後方程式(4)に対しても，初期値$a(x)$が測度であるような場合の研究がなされた．歴史的にはこちらがNavier-Stokes方程式よりも先行している．問題の起こりは物理的問題ではなく，関連する楕円型方程式

$$\Delta u-|u|^{\gamma-1}u=0$$

を，原点を除いたところで定義された関数$u(x)$が原点以外でみたしているとき，$u(x)$が自動的に原点でも方程式をみたすかどうかという，関数論における「除ける特異点」の問題の非線型版を，放物型方程式にも考えたこと

が発端のようである．この問題は当初フランスのBrezis, Baras, Pierre等によって（$|u|^{\gamma-1}u$ の項の符号を変えたものについて）考えられていたが，丹羽芳樹氏は，関数空間の一種であるMorrey空間にあたる測度の空間を定義し，その言葉によってこの問題が解けるための初期値 $a(x)$ に対する十分条件を与えた．先に述べたNavier-Stokes方程式に対する儀我氏らの $n=3$ の場合についての研究は，丹羽氏の研究に触発されたものである．

さて，最初に述べた筆者達の結果だが，全空間上の初期値問題 (1)—(2) 及び (2)+(4) を，$a(x)$ が必ずしも測度ではない超函数の場合についても考えようというものである．ここで超函数というのは，普通の関数や測度は勿論，測度の微分なども含むもので，どんな関数でも超函数とみなせば何回でも微分可能になるというものである．超函数は，第二次世界大戦後程なく発見されて以来，線型微分方程式の研究には広く用いられているが，非線型方程式に対しては一般的すぎると思われ，余り応用されていなかった．ここでも，「どんな」超函数についても解があるというわけでは勿論なく，ある種の「都合がいい」超函数を初期値にした場合にのみ解がただ1通り存在するということが言えるに過ぎない．それでも測度以外のものがいくらかでも取り込めるという点で，これまでの結果よりは幾分でも進歩がある．

我々の結果は次のように述べられる．今述べたMorrey空間を測度に拡張したものを更に拡張して，ある条件をみたす超函数の空間を考えると，その空間に属し，かつ余り大きくないような初期値 $a(x)$ に対し，$t>0$ では普通の意味で方程式をみたし，$t$ が0に近づくときに解が超函数の意味で $a(x)$ に近づくようなものが，大きさに条件をつければただ1通りに定まるというものである．空間としては，(4) に現われる定数 $\gamma$ 毎に異なったものを取る必要がある．(1) に対しては，(4) で $\gamma=3$ の時に現われるものがそのまま使えるほか，それ以外にも幾分多くのものが取れる．この関数空間は，実解析学の言葉で記述できるものであるが，かなり複雑な計算の後にはじめて定義できるものなので，ここで一般的な結果を述べることは不可能である．そこで，二三の例を挙げるに止めたい．

まず (1) についてであるが，十分小さい実数 $c$ に対し，$x_1 \neq 0$ 上定義されたベクトル値関数

$$\left(0, \cdots\cdots, 0, \frac{c}{x_1}\right)$$

を適当な意味で全空間上の超函数に拡張したものを初期値とする Navier-Stokes 方程式の解で大きさが余り大きくないものがただ一つ，全ての $t>0$ 及び $x$ に対し存在することがわかる．

次に (4) については，$n \geq 3$ のとき，

$$\frac{3-n+\sqrt{n^2-2n+9}}{2} < \gamma < 2$$

をみたす $\gamma$ について $p=\dfrac{n(\gamma-1)}{3-n}$ とおくと，十分小さい実数 $c$ に対し，$x_1 x_2 \cdots\cdots x_n \neq 0$ 上定義された関数

$$u(x) = \begin{cases} c x_1^{-1-1/p} x_2^{-1p/} \cdots\cdots x_n^{-1/p} & x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n > 0 \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases}$$

を適当な意味で全空間上の超函数に拡張したものを初期値とする方程式 (4) の解で大きさが余り大きくないものがただ一つ，全ての $t>0$ 及び $x$ に対し存在することがわかる．これらの超函数は，普通の意味での関数でも，測度でもないことが知られている．もし一般的な結果にご興味をお持ちの方がおられたら，発表予定の筆者達の論文をご参照されたい．そこにはここに述べきれなかった更に多くの人々の貢献についても述べてある．

このような問題を考えるに至った動機であるが，「測度でできるならば，超函数でもできるのではないか」という素朴な疑問が主なものである．もう少しまともな理由づけは次のようなものである．もしある種の初期値に対しては，滑らかな Navier-Stokes 方程式の解が存在しないならば，最初に述べた Leray の結果と考え併せると，解が滑らかさを失う瞬間に，あるノルムは限りなく大きくなるが，別のノルムは有界な範囲にとどまるといった現象が起こるはずである．（ここでノルムと言うのは関数の大きさを計る尺度のようなものである．関数のどのような性質に着目するかによって，いろいろなノ

ルムが定義される．先に述べた Morrey 空間も，我々の定義した空間も，新しいノルムを考えることによって導入されたものである.）そこで，どういうノルムがどのくらい大きな関数を初期値とすると，どういう範囲でどのような解が存在するかということをなるべくたくさん調べておくことが，上の問題を考える上で有効となるはずである．

ここまで読んでこられた皆様はどのようなご感想を抱かれたであろうか．「やはり数学は何をやっているのかさっぱりわからない」とお思いの方も多いであろう．それでも，現代数学の一角の雰囲気でも感じて戴ければ幸いである．（了）

（一橋大学助教授）