数理統計学への招待

三浦良造

I　はじめに

数理統計学という分野を紹介します。広い意味では統計科学（Statistical Science）又はデータにもとづいて現象に対する理解を深める客観的な方法を扱う分野と定義して考えましょう。紹介する相手は主に一橋大学の学生とします。

1、数理統計学

学問というと大変幅が広く、哲学、文学、科学などと分けて語られ、定義としては一定の原理に従って体系的に組織化された知識や方法（「国語大辞典」、小学館）とされるようです。この分類では数理統計学は科学に属し、方法でしょう。実質的な知識の体系ではなく知識を得る〝方法の体系〟でしょう。

数理統計学はデータにもとづく方法を扱うので一般に計量科学に応用されます。ほとんどの自然科学、工学がそうであるように計量分析が当然の研究方法である科学分野ではわざわざ計量とはいいませんが社会科学などでは計量経済学、計量行動学、計量心理学などのように計量という名を付するところもあります。研究の方法を特徴づけるためでしょう。

2、分野と活動の紹介

データと現象そして統計モデルを柱にして紹介します。現象の理解を統計モデルとして表現することが数

理統計学の出発点になります。統計モデルは現象の不確実性を客観的に扱う基盤となります。不確実な要素がないモデルは単に数理モデルです。現象の不確実な要素を扱うために、確率変数、確率分布、母数（パラメター）という量と関数を用います。このため確率論、数学（とくに解析学など）の形式と論理を道具として必要とします。統計モデルは現象に固有のものもありますがそれは現象の理解がある程度深まった段階ででるものであり、ある程度複雑であることが多いようです。しかし、それらの基本には単純なモデルが在り単純な形から派生して複雑なものに発展したと考えるのが順当です。基本的な統計モデルは従って固有の現象にとらわれず抽象的な表現をもちます。基本的モデルはそれでも多種多様であり区別するときには、まず標本を軸にして一標本モデル、二標本モデル、多標本モデルと分け、さらに母数について分けて位置母数、尺度母数などのモデルとなり、さらに観測値の状況に応じて（確率的に）独立な観測、逐次観測、時系列、回帰などのモデルとして分けられます。さらには観測値の数学的次元に応じて一変量、二変量、多変量などのモデルとして表現されます。これらの分け方を結びつけてモデルのフルネームができ上ります。例えば最も単純なものとして一標本一変量位置母数モデルで独立な観測の場合、という具合です。こういった統計モデルのもとでデータにもとづいて母数に関する推論を行うのが統計的分析なのですが、このとき統計モデルは現象におけるデータ（観測値）の性質をきちんと表現していることが肝心です。データの性質を忠実に表現するための統計モデルの改良とそれに伴う推論の手順（推定量、推定方法など）の開発・研究が数理統計学者の仕事です。この改良例についてはIIでお話しします。統計モデルの要素のなかではデータを得た段階で既知のものと未知のものとに分れます。既知のものを使って未知のものについて推論する訳です。未知ものは通常のモデルでは母数（パラメター）です。推論の形式はよく整ったものとしては推定と検定です。これらの推論の基礎となる原理は尤度（likelihood）です。これはモデルのなかで確率分布に強い仮定をおい

た上で成立する原理なので、その仮定がしっかりしない段階では経験分布関数（推定された確率分布）を基礎にします。この後者による方法はノンパラメトリックスと呼ばれて（前者による方法はパラメトリックスと呼ばれる）一九六〇年代から飛躍的に発展しました。この両者の上に乗っかるような形でロバスト（頑健）な統計的方法が成果として得られています。最も実用的な方法といえるでしょう。これについてはIIでお話しします。これはできるだけ現実的な仮定をおく統計モデルのもとでよい推測精度を達成しようとする方法です。

現象を忠実に描写する、又はデータの性質を正確に表現する努力は統計モデルを改良することによって行われますが、モデルには限界があります。複雑なモデルをつくると推定量の性質がよく分らなくなり、単に計算手順（アルゴリズム）のみを追求することになります。これは数学上の限界でもあるかも知れません。さらに統計モデルを立てることの弱点としては、つぎのことが考えられます。現象に対する理解が不十分である場合にその理解を超えるかも知れない構造をもつ（現象からの）データをどう扱うかです。このような場合統計モデルは先入観の表現という弱点をもちます。このとき統計モデルを立てないでデータにそのまま語らせる、つまり図又はグラフで表示して目でみて分析者に考えさせる方法がある。もちろん、このときの思考の基盤は現象についての不統一ではあっても多くの個別的知見と数理統計学的知見です。主に多変量データとか時系列データについて有効なようです。この方法は探索的データ解析（EXPLORATORY DATA ANALYSIS）と呼ばれています。コンピュータとソフトウェアの発展によって可能となった方法です。一部の数理統計学者がツール（数学、確率論の形式）の限界を感じて開拓したといってよいでしょう。この一例についてはIIIでお話しします。

統計学の概観を得るためには「統計学辞典」（東洋経済新報社、一九八九年刊）の目次をおすすめします。

II　数理統計学の発展：例

身近な問題として、小平の統計学の講義でも扱われる平均についてのモデルそして単純線形回帰モデルについてどういう発展があったかをお話しします。

1、推測の原理

観測値を得るときこれは可能な多数の値の組のうちの1組が偶然性を伴って得られたと考えます。例えば大きな母集団があるとき、そこから小さな一部分（値の小集団）をランダムに採集する場合がそうです。これは部分標本と呼ばれます。社会調査などではこのような見方から始めます。入試センターテストの点数分布などは、受験者全員の点数を知って分布表を作るので全数調査と呼ばれ部分標本ではありません。母集団分布自体に関する推論はこの場合生じません。しかし、昨年度と今年度の分布形の差異に関する比較とか、他の要素との関係などという問題は推論の対象となることはあるでしょう。入試センター試験の総合点の分布の形は正規分布形を中年太りさせたような形なので正規分布形ではありません。もし正確に正規分布形であるなら、受験者総数と平均と分散を表示するだけで総合点分布の報告は十分（十分統計量という。）であり、新聞記事の紙面も節約できます。なぜなら例えば、七〇〇点以上の人は何人かを知りたければ、平均と分散と正規分布表を使って算出（再生産）できるからです。

仮に全数調査の分布表の発表がないとして全国からのランダムサンプルとして一〇〇人分の総合点が公表されるだけなら新聞読者はこのランダム・サンプルにもとづいて母集団分布について推論する（もしその必要又は意欲があるなら）ことになります。このときは、数理統計学が示す方法を使うことになります。

話を一般論に戻します。観測値を1つ得るときこれがある確率分布のもとで得られると想定します。他の値も可能だがそれぞれの値は生起する確率をもっていてその確率の全容を表現するのが確率分布だということです。確率分布を F と書くと F は変数 x（観測される値）と母数 θ の関数ですから $F(x,\theta)$ と書きます。x について微分したものが密度関数でそれを f

(x, θ) と書きます。各 x の密度の積、つまり同じ確率分布に従う観測値が例えば10個 $x_1, \dots, x_{10}$ あるときこれらが同時に生じる確率密度を考えましょう。観測が互いに独立であるときこれは、

$$f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdots\cdots f(x_{10}, \theta)$$

となります。これが母数の値が θ であるときの $(x_1, \cdots\cdots, x_{10})$ の生起しやすさ（もっともらしさ）を表すのでこのもっともらしさ（尤度）を最大にする θ の値を求め、それを推定対象 θ の推定値とする、というのが最大尤度の原理にもとづく推定です。この考え方は今世紀の始め頃に確立されました。古典的な数理統計学の原理がこれです。どんな複雑なモデルに対してもこの原理が適用され得ます。確率分布が正規形であるときは、例えば θ を位置母数（分散を1として）

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2\right\}$$

という関数形で書かれます。尤度を最大にする θ を求めると $\theta = \frac{1}{10}(x_1 + \cdots\cdots + x_{10})$、つまり標本平均が得られますが、このとき対数をとったり微分演算を使ったりします。そして標本平均が確率変数としてどういう確率分布をもつか（正規分布で、平均 θ 分散 $\frac{1}{10}$）を調べこれを推定量又は検定統計量として用いるときの最適性を調べます。実は不偏性という性質をもつすべての推定量のなかで最も分散が小さいという最適性をもっています。この手順、つまり、推論のための統計量の導出とその確率分布の同定、そして最適性のチェックはどの統計モデルについても必要不可欠なものです。さてここで重要なことは f の関数形が既知でないと推論のための統計量（観測値を変数とする関数）の関数形が導出できないことです。関数形が分らないとデータを得ても計算できません。

確率分布が例えば正規分布かどうかをしらべる検定方法は多く提案されています。その基本は経験分布関数（データから作った分布関数）が観測個数が多ければほぼ真の確率分布に近いという理論的命題にあります。この命題にもとづいて、分布関数 F が未知であっても θ の推定量を工夫し導出し、さらにその最適性も同定できるようになりました。これは一九六〇年代

から七〇年代にわたって盛んに研究されました。これは大進歩です。計算量は大きくてもコンピュータのおかげで尤度関数を推定して推定値を算出するようなことまで行えるようになっているようです。

研究が進むにつれて推定量導出の各原理又は基準の比較も行われました。これはつぎの節でふれましょう。

2、位置母数の推定

正規分布の平均は分布（対称分布）の中心でもあり、分布の中央値（メディアン、五〇%点）でもあります。一般に左右対称な分布に対しては対称の中心を推定対象（母数）とし、対称であるかどうか分らない分布に対しては、平均、中央値をそれぞれ母数と考えることができます。そこで問題を対称の中心の推定に限ると種々様々な推定量が考案されます。主なものは最尤推定型、順位統計量から導かれるもの、そして順序統計量の一次結合という3つのタイプに類別されますが他にも多くあります。この3つのタイプについてはそれぞれの最適性についてかなりのことが解明されました。その結果よく実用化（コンピュータソフトウェアに組み入れられたもの）されているのは重み付き最小2乗推定とか、切り取り型平均とかホッジス・レーマン型推定とか呼ばれるものです。前の2つは各観測値の重み付き平均といってよく重みに工夫が入っています。後の1つは観測値のすべての対（pair）について平均をとって、その中央値を推定値とするものです。それぞれ導出の基準をもっています。

各観測 $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ が独立で同一分布に従い、分布 F が対称であるとして、対称の中心 θ を推定する問題は最も単純なモデルであって、$F(x)+F(-x)=1$、

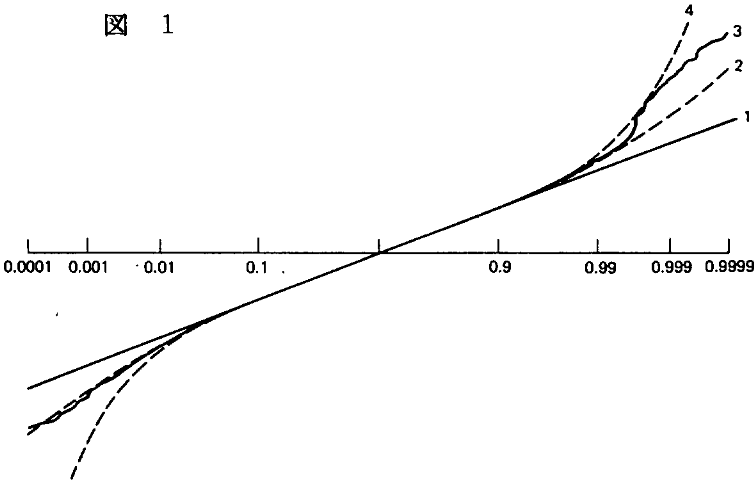
$$x_i=\theta+\varepsilon_i,\ i=1,2,\ldots\ldots,n.\ \varepsilon_i\sim F.$$

又は

$$P\{x_i\leq x\}=F(x-\theta),\ i=1,2,\ldots\ldots,n$$

と書かれます。$F(\cdot)$ がどういう関数形であるかに応じて最も推定精度が良い（推定誤差の分散が小さい）推定量が定まり、それらの差異は体系的に表現できることが、一九七〇年の前半頃までに分りました。従来、おそらく前世紀の終り頃から観測誤差（ε_i）の分布は

図　1



正規分布だとされていたのですが、ある年代頃からどうも観測誤差分布は正規から少しはずれていて特に分布の両裾が異なることが意識されたようです。例として図1をごらん下さい。これは正規確率紙にプロットしたものですが正規分布のパーセント点は直線（1）となります。両端のところで少し曲っているのが2つありますが、1つは実際のデータの累積分布からプロットしたもの（3）でもう1つは粗大誤差モデルという理論分布のパーセント点をプロット（2）しています。これは一〇〇個の観測のうち平均して二個の観測が他の九八個の観測にくらべて大きな分散をもつ分布に従うというモデルですがこのような粗大誤差モデルが現実的ではないかということをこの図は示しています。このような分布は

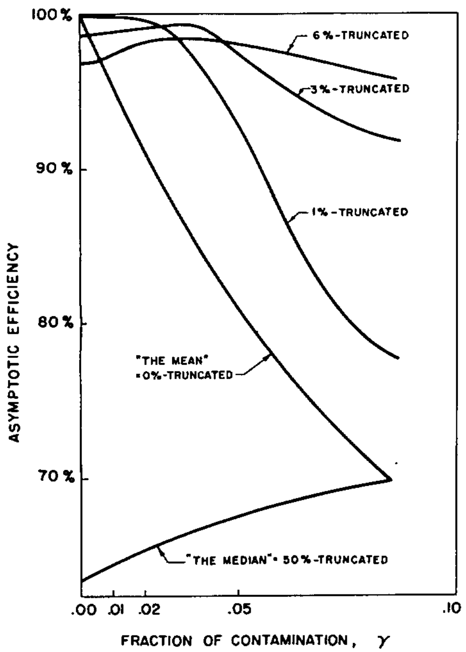
$$F(x) = (1-c)G(x)+c\cdot H(x),\ c = 0.02$$

というふうに書かれます。この$F(x)$に対応する最良の推定量は上の3つのタイプそれぞれについて存在しますがそのなかでは切り取り型平均（trimmed mean）と呼ばれるものがよく普及しているのではな

いでしょうか。これは観測値のうち最も小さい値と最も大きい値をいくらかずつ捨てて（trimして）残った値の平均です。何個捨てるかは上のcの値、つまり粗大誤差の混入割合に依ります。

切り取り型平均は、オリンピックの選手選考などのとき使われると聞いたことがありますが、例えば五回試技（試走）してそのうち最も良い記録と最も悪い記録をとり除いて平均をとってその選手の力とみるというふうに使われます。両端の値をとり除くのは極端に大きい又は小さい値の影響をうけないようにするためです。このような工夫はいろいろな現場では存在したようですがそれの性質を理論的に明確にしたのが一九六〇年代の中頃という訳です。粗大誤差の混入割合に応じた標本平均の精度そして切り取り型平均の精度をグラフで表したのが図2です。少しだけの粗大誤差混入（これはかなり現実的である）により標本平均精度が格段に減少すること、しかし、切り取り型平均を適切に用いていればそれは避けられることを示しています。

図 2 Asymptotic Efficiency, for Location, of Truncated (Trimmed) Mean, $\sigma=3$



粗大な誤差の影響を受けずにθを推定しておけば残差（ε_i）の様子が正確に分り、何故粗大誤差が生じたかを調べることもできるのでこのような方法は貴重です。分布がGだと思っていたが実はFだったというように、想定する確率分布が真の分布か

表1

Point	x	y
1	−4	2.48
2	−3	0.73
3	−2	−0.04
4	−1	−1.44
5	0	−1.32
6	10	0.

ら少しずれていても推定精度が余り変らないときそのような推定のことをロバスト（頑健）であるといいます。切り取り型平均はロバストですが標本平均はロバストではありません。

このような推定量の開発と比較が（最も基本的である）位置母数モデルから応用範囲の広い線形回帰モデルに拡張されました。

3、線形回帰モデル

このモデルは x_i を与えられた数値として

$$y_i = \alpha+\beta x_i+\varepsilon_i,\ i=1,2,\ldots\ldots,n$$

と書かれます。α,β は母数で推論の対象です。ε_i は誤差項であり、平均値ゼロの確率分布 F に従う確率変数です。F が平均ゼロである正規分布であるとき、α,β の最尤推定は、最小2乗法に依る推定と全く同じであり、統計学の入門教科書に示されている推定量（データの関数）です。この推定量は F が対称形である限り、観測値の一次結合（一次関数）である推定量のなかでは最良です。しかし、一次関数でない推定量は多くありその中には最小2乗推定量よりも良いのがあります。さらに F が非対称であることも考慮することが現実的かも知れません。こういう場合にも β の推定に関して精度が良い推定量が2節の考え方を適用して得られています。こういう推定量の特徴をつぎの例に依って説明しましょう。表1と図3の a,b,c をみて下さい。

各 y の値をつぎの手順で人工的に発生させました。まず x の値 −4, −3, −2, −1, 0、それぞれに対して

$$y=-2-x+\varepsilon$$

としました。ε は平均ゼロ、標準偏差0.6の正規乱数を（5つ用意して）使いました。そして x の値10に対しては標準偏差が20倍も大きい12という平均ゼロの乱数 η（粗大な誤差）を1つもってきて

$$y=-2-x+\eta$$

としました。その結果が表1に示されています。さて y をこのようにして作ったこと（算式など）を一応完

全に忘れて、改めて表1がデータとして与えられて回帰分析をすることになったと想定します。

最小2乗法によって回帰直線を引くと図3・aとなり2次曲線をあてはめると図3・cとなります。$x=10$に対応する点（点番号6）が他の集団から離れているので（という判断のもとで）この点をとり除いて最小2乗法による直線回帰を行うと図3・bが得られたのです。図3・aと3・bを比べますと6番目の点に引っ張られて直線の傾きがゆるやかです。図3・aでは切片が0.07、傾きが-0.08であり図3・bでは切片が-1.8で傾きが-0.98です。図3・bでは6番目の点をはずすという判断を行ったおかげて切片も傾きもよく推定できました。これは視覚的に分析者が判断した訳ですが、このような判断を組み込む、又は自動的に同様の効果を得るように推定方式を構成できることが分りました。最小2乗法では残差の2乗、$(y-\alpha-\beta x)^2$の和を最小にしますがこの新しい推定方式では残差が大きいときには小さな重みをつけて重み付2

図 3

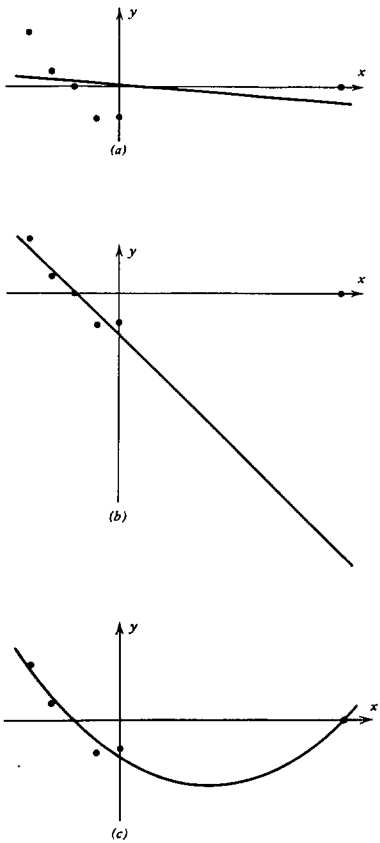


Exhibit 7.1.2 (*a*) Fit 1. (*b*) Fit 2. (*c*) Fit 3.

乗和を作りそれが最小になるα（切片）とβ（傾き）を求めて推定とします。重みを小さくすることによって粗大誤差の影響を小さくするという考え方です。これが体系的に議論され同等の性質をもつ推定方式が別のタイプの推定量についても考察されています。とくに順位統計量を用いる方式はその分布Fが対称形でなくても傾きをきれいに推定するという特徴があることも見出されました。これらは粗大誤差の影響をうけにくい頑健な推定なのでロバスト推定量と呼ばれます。

図3・cのように2次曲線で回帰するとこの場合よく当てはまっていますので$y=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\varepsilon$のように2次関係であるという結論に到りやすい危険性を示唆しています。粗大誤差による悪影響の一例ですが、ここではデータと現象の関係を分析者がよく見直す、吟味するように心がけるという提案しかできません。

ここでは推定量に関して仮定と現実が異なる場合にもよく働く推定量の話をしましたがもっと詳しく知りたい方はP. J. Huber著「Robust Statistics」（John Wiley刊、一九八一年）を御覧下さい。

つけ加えておくことがあります。検定に関してのロバスト性は、上でお話した推定のロバスト性と少し異なる枠組もあります。さらに上では古典的統計量は改善されてばかりだという印象を与えたかも知れませんが実はそうではなく標本メディアンとかt-検定などはそれぞれ、ある種のロバスト性をもっています。

残差に重みをつけるとか、広い範囲の分布に関して精度はそう高くなくても、格段に低くなることもないという性質の標本中央値（メディアン）を使って仮の（tentative）残差を作って少しずつデータの構造をさぐって分析をすすめる、というふうに統計量（推定量、検定量）のロバスト性を大変上手に利用する例として探索的データ解析があります。

III　現在の諸問題：例

現在研究されている2つの問題例をお話します。最初の1つは数理統計学の理論的問題であり同時に応用面でも興味深いものです。後の1つは経済現象の一面である金利の変動をしらべるために探索的データ解析

の手法を使っている試みです。2つの問題共にまだ満足のいく研究成果は出ていないと考えています。もちろん他にもっと面白い重要な問題例があるでしょうが私が紹介できる例としてこの2つをとりあげます。

1、価格変動とBDS統計量

株価そして株価指数がなぜ変動するか、またその価格水準はなぜそのレベルなのかなどについて様々な経済学的説明が試みられます。その説明と実際のデータとをつき合わせてどの程度説得力があるかが検証されることもあります。株価指数については指数オプションとか指数先物という派生証券が証券取引所に上場されたこともあってその変動のモデル分析が盛んに試みられるようになりました。日本でも分析が進みある程度の成果が出ています。ここで紹介するのはこういった株式価格（又は指数）そして通貨交換レートなど短時間内によく変動する時系列のモデル分析に用いると有効であると考えられ、しかしまだ（数理統計学的にみて最適性の点で）性質がきちんと分っていないBDS統計量と仮に呼ばれている検定統計量です。この統計量を使ってHsiehという人が通貨交換レートの変動の分析をしました。交換レートの日々の値が過去の値に（線形に）依存している部分などを取り除いて残る残差が本当に偶然変動の列かどうかを調べたのですがそのときにこのBDS統計量を用いています。彼の結論としてはBDS統計量の値が高いので残差の系列は何らかの非線形な時系列関係をもっているのだろうということでした。この非線形な関係というのはマクロ（又はミクロ）経済学的に又は取引参加者の現場における個別的事情なのかよく分りません。それは別としてこの統計量が、各残差項が独立で同一分布に従うという仮説のもとで近似的に正規分布に従うことは分っているが（だから一応検定はできる。）、どういう対立仮説のもとで検出力が高いのか、又は低いのかが数学理論上はよく分っていないのです。Hsieh氏は、コンピュータによるシミュレーションによって〃非線形な〃時系列的依存関係をよく検出すると見込んでいるようです。

つぎにBDS統計量の定義と東京株価指数

（Topix）に適用した例を示します。

いまT個の時系列データ（x_1, ……, x_T）があるとします。この中からx_tから始まる連続するN個のデータ（部分列）、（x_t, x_{t+1}, ……, x_{t+N-1}）とx_sから始まるN個のデータ（x_s, x_{s+1}, ……, x_{s+N-1}）をとって2つの部分列の〝近さ〟を測ります。部分列のなかの始めからj番目の数値x_{t+j}とx_{s+j}の差がlより大きいものの個数を数え上げます。この個数を$I(s, t)$と書きましょう。$I(s, t)$をすべての(s, t)、ただし$1 \leqq s < t \leqq T$、の組合せについて計算して

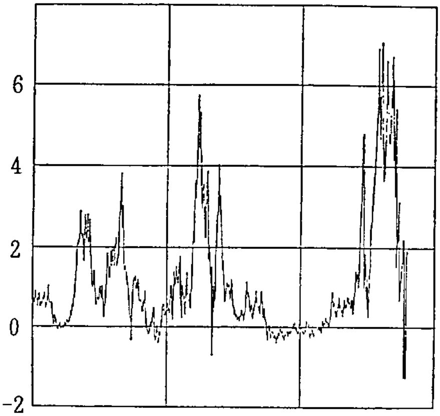
$$C_N(l, T) = \frac{2}{(T-N+1)(T-N)} \sum_{s<t} I(s, t)$$

を算出します。各部分列の対（pair）が近すぎても遠すぎてもデータ（x_1, ……, x_T）が仮説「確率変数x_1, ……, x_Tは独立で同一分布に従う」を満足しないのです。$C_N(l, T)$を標準化、つまり仮説のもとでの平均を差引き標準偏差で割ってできたものがBDS統計量と呼ばれます。最近カオスとかフラクタルとかいって複雑な現象に取り組むという話題がよく出ますが、BDS統計量はその母体がcorrelation integralという一〇年程前に物理学の世界で使われたものにあるようです。カオスを非線形という部分にしぼればこの統計量も複雑さを調べるために現われたと理解できます。時系列が独立で同一分布に従うことはデータの発生値に規則性がないこと（ランダム・ウォーク）を意味しますが、何らかの（非線形な）規則性があるのではないかと疑って調べるための統計量です。

さてこれをTopixの時系列を調べるのに使った結果が図4で示されています。データとしてはx_tを日々の東証指数の対数価格差としています。一九八五年四月三〇日から一九九〇年一二月六日までの一五〇〇日分のx_tを用いました。$T=100$, $l=0.005$, $N=5$として一〇〇日間の時系列を1日ずつ（翌日方向へむけて）ずらして、1日ずらす毎に統計量を計算して得たいわば移動BDS統計量をグラフにしたものが図4です。横軸は時期（年月日）です。縦軸が統計量の値ですが、それが2を越えている時期は、どうもランダム・ウォークではないなと思われます。それではどう

いう挙動なのかというと部分的な性質はよく分るものの決定版はまだないように思います。なぜこのような分析に興味が集まるのかといえば、もちろん予測可能性を期待する向きもありますが、それより現在のオプション価格理論が上の仮説のもとで出来ているのでこの理論をもっと現実的なものに改良したいという関心が大きいと考えます。

図 4



topix.100.05.005 bds 0-x-1500 -2-y-8

私はこのBDS統計量は、ある統計量の族の最単純形であっていろいろな派生的統計量を作る母体になると見込んで考えています。

2、スワップ金利と時系列解析ソフト（Sabl）

時系列データに対する統計モデルは割と単純な系列関係を表現します。それでも時系列モデルのもとでの計算は見かけ上大変複雑でありできるだけ接触したくないと考えるのが自然です。時系列に限らず一般に統計モデルはデータの単純な構造をモデル化したものです。複雑にすると数学が付いていかないという限界もありますし、統計的分析というのは本来そういうものだという意見もあります。しかし、データ分析を行う人間の知的欲求は強く、数学が伴わなくても数値的に手続きを表現し結果をグラフ表示して視覚と知見を用いて複雑なものであってもそのデータがもつ構造を解析したいと考えます。探索的データ解析の方法はそういう要求をみたそうとしてくれます。ここではその一例としてS-plusというデータ分析ソフト（というより言語でしょう。）に含まれているSablというコマンドを用いた時系列データ分析の試みを紹介します。

変動金利と固定金利を交換する取引をスワップと呼びますがそこにみられる金利データの構造を調べる試みです。金利の不確実な変動を表現すると称した数学モデルと統計モデルはいくつか存在します。しかしそれらは部分的には説得力があっても他の部分は天下り的であってデータとの整合性が不十分ではないかと思われます。何しろ社会現象は短期間で構造が変化するようで自然現象のように構造が安定していない。（その自然環境も長期的な〝ゴミ〟の蓄積により変化しつつある部分もあるようですが。）そこで素朴にデータに自分自身の構造を語らせ、そのうえでモデル化を試みようという、いわば個人レベルの試行錯誤の第一歩のようなものです。

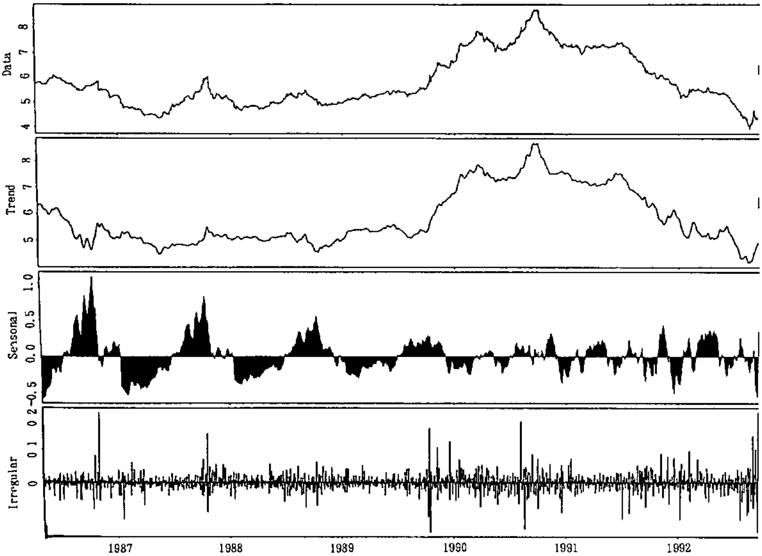
一九八六年四月一日から一九九二年九月一五日までの日次データを用いました。それぞれの日の金利レベル x_t を長期的な傾向を示す部分（トレンドという）と季節的あるいは周期的な変動を示す部分（シーズナルという）、そして極短期的な変動を示す部分あるいは残差部分（イレギュラーという）の3つの部分の和に分解します。Sablとコマンドを使えばコンピュータが計算しグラフ表示をしてくれるのですがいくつかの（パラメター値の）指定は分析者が行います。べき変換、移動中央値、残差の大きさに依る重みづけ、2重の重み付移動平均、t-検定などの計算を何回か繰り返して分解を行うようです。〝ようです〟というのは計算プログラムの内容がみえないのでマニュアルの説明に依存して理解しているからです。

Sablによって

$$x_t = (\text{トレンド})_t + (\text{シーズナル})_t + (\text{イレギュラー})_t$$

に分解された時系列のグラフが図5に示されています。上段が x_t で二段目からトレンド、シーズナル、イレギュラーと順に続きます。イレギュラーの左側縦軸の目盛が0,0.1,0.2とあり、x_t、トレンドの目盛に比べて $\frac{1}{8}$ 位の大きさです。つまり x_t の変動のほとんどがシーズナルに含まれています。トレンドはパラメターを変更するともっとスムーズになりその分だけ変動がシーズナルとイレギュラーにふり分けられます。従って、

図 5　86 4/1- 92 9/15



いろいろなパラメターについて試みて自分が納得できる分解に到る必要があります。私はシーズナルの形に大変興味をもっています。トレンドは公定歩合の変化の形によく似ていますから大体納得しています。国内の商慣習、制度から来る制約、政治経済の動き、外国（とくに米国、ドイツ）の金利レベル等々の要素を用いて詳しく説明できると大変面白いでしょう。そのときある程度きちんとした統計モデルも出来るのではないかと期待しています。こうやって生（なま）の姿でデータの構造をみておくと、他で自己回帰とか移動平均とかの単純な時系列モデルを用いた分析をみるとき、この図のなかでどういう部分がモデルによって取りあげられるかがある程度想像できます。しかし、図5はまだ仮の（Tentative）もので最終的なものでないことを断っておきます。

ここでお話した内容は1、は三浦著「株価指数データと混合正規モデル」（一橋論叢第一〇五巻 第五号、pp. 31-56.)、2、は三浦・内田の講演資料「金利期間構造分析の試み」（一九九二年度科学研究費総合Aシ

ンポジウム、「新しい時系列解析の理論と応用」にあります。

IV　学生のための入門の手引き

1、学習案内

まず学習案内をしましょう。自然科学、社会科学の別を問わず、科学的、あるいは客観的判断を行なう人の常識として、t-検定、単純線形回帰分析、そして一般論として不確実性のもとでの判断の形式など、について理解しておくことは重要であると考えます。できれば在学中にこの形式による判断の経験を積み、日常的な思考のツールとして身に付けてしまうことが望ましいでしょう。これらの入門的内容は、（小平）統計学において、そしてさらに少し進んだ内容が（国立）数理統計学、管理統計、データ分析論などで講義されています。卒業までには様々な実質科学の科目の中で統計的判断が用いられるでしょうから、自覚的に聞いておればかなり身に付くはずだと想像します。

ところで、ここに一つ問題があります。講義（授業）における説明が数学の形式を用いてなされるということです。これはいまのところ避けられません。説明には数学の記号と演算、そして論理が用いられます。高校までは数学そのものを対象として学習した経験はあるでしょうが、数学を用いて説明を受けるという経験又はトレーニングは余りないといっていいでしょう。あるとすれば科目としてはおもに物理くらいでしょうか。したがって学生にとっては新しい体験でしょう。そのために統計学の入門レベルを身に付けるためには時間をかけた多少の努力を必要とします。ここが肝心です。他の科目についても同様の課題があるでしょうが、ここを乗り越えることが大学における統計学の勉強に弾みを付けるステップになると思います。演習のクラスを時間割りのなかに設けてこのステップの努力の手伝いが出来ればよいのですが現在の（大学の）制約条件の下では残念ながら出来ません。講義を熱心に聞くことを踏まえて各自努力してください。しかし、統計学（統計的判断）を部分的に利用する科目はたくさんあるでしょうからここで私が説明しようとしてい

る統計的判断を身に付けるという機会はそういう科目に自覚的に出席することにより同時進行的に得られることになります。一方で、数学に慣れる、そして数学を身に付けることは小平では数学要論という科目に出席することで達成されるでしょう。

ここで統計学の勉強のためというように限らず一般的な話として日常語としての数学を身に付けることをお勧めします。数学は考える方法そして考えて得た成果を表現する形式として大変有用です。知識を得るためにも考えるためにも日常語としての数学が日本語と同等に必要かつ有用だということを強調しておきます。一つの方法を身に付けるというのは何事にかぎらず手間がかかることなのでつい敬遠しがちですが、よく心得て小平時代から（科目の単位取得とは無関係のレベルで――本当は単位取得と身に付いたという実感とが一致して欲しいのですが。）自分自身をみつめて鍛練することが大変望ましいと思います。

付け加えることとして、コンピュータを使えるようになることを強くお勧めします。S-Plus, SAS, SYSTAT がワークステーション、パソコンで使えるようになりました。本学では大型計算機にはいっているSASが使えるが端末数が十分あるとはいえません。それほど大型の計算でなければパソコン（ソフトはSYSTAT など）を用いても十分高度な統計分析が出来ます。荒っぽくいえば数学の形式と論理が理解できなくてもSYSTAT などのソフトを使って様々なデータ分析を行なっているうちに何だか統計的手法を（経験的に）理解できてしまうこともあります。これも一つの勉強法であるかもしれません。データさえ整えておけば、次から次へと興味に応じて高度なレベルまで分析できるので入門者だけでなく専門家にとっても重宝な（欠かせない）ツールであると考えます。

以上は統計学を利用するだけでよいという人のための案内です。次に統計学の専門家になろうとする人のために参考となりそうなことを書きます。

2、統計学の専門家

実質科学の人。そして数理統計学専門家（あるいはプロパー）の人。というふうに分けて考えましょう。

経営、経済問題に統計学者として取り組んでおられる方々は本学には多く、大御所が多数おられます。その他に、本稿にて詳しく紹介した数理統計プロパーの専門家として早川（多変量解析）、刈屋（多変量解析）、山本（時系列解析）、高橋（逐次解析）、田中（時系列解析）、（そして三浦（ノンパラメトリックス））などの方々が居られます。また計算機の専門家であって、統計学に詳しい先生もおられる。大学院にすすんで数理統計プロパーの専門家になりたいという学生は学部時代にうんと数学と統計学、コンピュータ、（そして出来れば数理統計学が利用される現象科学分野のうち一つを詳しく）を勉強して大学院にてこの方々のご指導を受けると良いでしょう。経営、経済を含めて数理統計学の方法を用いることが有効である分野の学習、さらに研究に携わる人は準専門（またはマイナーサブジェクト）として数理統計を中級レベル程度までは勉強するでしょう。この人達は自分が必要とする統計的方法の最新の状況をうえに挙げた専門家の人達に尋ねることが出来ます。

統計的方法を用いて現象の分析を行なう人達は、数理統計学が新たに提示する手法を、または数理的枠組みを用いる議論を、時に（ネガティブないみで）テクニカルだと思うことがあります。統計モデルが現象の不確実性のメカニズムをよくとらえていてさらにそこから得られる統計量が信頼できるものであれば、そのようには思わないでしょう。ときには数学的議論が複雑すぎて理解するのに嫌気がさして、ついテクニカルだといってしまうようなこともあるでしょうが、そのような例外を除けばこの人達の思いは重要です。このように思われた統計的手法は折角新たに考案したにもかかわらず現象の分析を前に進めるために用いられる機会のない方法かもしれません。この点は専門家にとって常に心に留めておかねばなりません。

ここでは統計学者を実質科学の人と数理統計学プロパーの人とに分けて考えましたがこの区別は本人が最もよく分っていて他人の目からは区別しがたいことがあります。簡単に言えば基本的な問題意識が統計的問題の構造と分析手法にあればプロパーの人であり、問

題意識が実質科学、例えば経営、経済の問題にあれば（統計学の方法を用いる）経営又は経済学者であるということになるでしょう。ときには経済の問題を解決しようとして確率論的命題や統計的方法を自ら開発する経済学者も（また心理学、生態学、遺伝学、物理学、工学、その他の分野における研究者も）存在します。

私見ですが実質科学と密接に結びついた統計学者は最も健全です。しかし新しく学習を始める学生にとって（又は教育の体制にとって）ここにひとつの問題があります。各実質科学において、又はプロパーの人達によって開発・研究された統計的方法が洗練された形をもつと、実質科学分野をはなれた形式で表現される。実はこれが数理統計学プロパーの体系です。その内容はIの分野紹介で述べたように内容が大変豊富です。これを全部学習（又は教育）するためには独立した学科（又は学部）を形成する程の大きな規模になります。学習する側にとってはこの体系と実質科学を併行して学習することになります。体系をよくえらんで勉強して下さい。同時に学習するときの力の入れ方の濃淡は各自の選択によるでしょう。数学についてはとくに解析学（線形代数を含む）と確率論を勉強することが一般に重要であり、数学者（数学プロパーの人）が研究対象とする抽象的なレベルまで必要とするかどうかは各自の選択に依るでしょう。

つぎは統計学者の分布状況です。一橋大学においては当然のことながら社会科学が主でありますから、そこに求心力をおいた統計学が盛んです。日本国内には学部レベルでは独立した統計学科はありません。大学院レベルでは経済学、経営学、理学（数学、生物学）、工学（数理、応用数学、計数など）、医学（推計学）、農学、等々の場で数理統計学、又はデータ解析の講座又は学科があります。それぞれの実質科学と結びついている訳です。欧米においても実質的には数理統計学科（専攻）は大学院レベルで明確になると私は見ています。

3、合意形成のための手法として

現在地球上の環境問題を考えるとき政治的レベルの問題以前に気候、自然資源等々についての科学的認識

を蓄積し公開することが重要でしょう。そこではすでに確立された各学問（科学）分野の成果をさらに学際的な成果として整えていく努力がなされるでしょう。経済学の枠組もこれらの問題が扱えるように拡がっていくことも期待されます。そこでは、おそらく調査・計量・解析・モデル化、を通じた科学的認識手順がひとつの方法になるでしょう。要するに現象を客観的に認識するという人間の自然な精神活動の方法をデータをもとにして考えるのが本来の統計学ですから、地球環境の問題についても従来の成果をふまえて、新しい需要に引っ張られて新しい、概念、手法が生みだされると想像します。話がとびますが社会の諸基盤の整備、例えば金融業務、証券市場の整備についても情報公開が進むにつれ情緒的な部分よりも計量・工学的部分を考えることが現在よりももっと明確になるでしょう。このような例に限らず計量・工学的な枠組で考え客観的な基礎のうえで合意形成ができるように、そういうときの力となるように日常的常識そしてツールとしても、さらに専門的な方法としても数学と統計的方法を身につけていただきたいと学生の皆さんに希望します。

（一橋大学教授）