実数について

真　島　秀　行

本年三月を以って退官された松坂和夫先生の記念号に執筆するに当って何が適当な材料か考えた．私自身も先生と同時期に一橋大学を離れることになったが，一橋大学在任中，先生の「集合・位相入門」（岩波書店）を参考書に指定し，集合や位相空間の講義を行なった．その中で特に実数概念を詳しく教えたいと思い多少とも工夫した積りであった．その講義録めいたものではあるが，実数概念について書いてみたい．

序．今日，実数体とは連続性の公理をみたす順序体であると認識され，いろいろな導入法が知られているが，大学初年次の学生に対し実数の概念を明確に捉えさせるのに，どの方法でも分かり易いとは言い難い．ここでは無限十進小数の全体を実数全体と捉える立場を取り徐々に実数体の本質に迫り，本質が見えたところで実数の有界閉区間で定義された連続関数の重要な性質を導くことにする．

本論に入る前に，なぜ実数の概念を学ぶ必要があるのか問題意識をもってもらいたいのでガイダンスを付けた．

ガイダンス．今日，日常生活を営む上で数量概念は必要欠くべからざるもので，人は赤ん坊の頃から数を教えられる．一歳ともなれば人差し指を一本立てて「私は或いは僕は一歳です．」という表示を親は教え込むであろう．その後，親は子供が，いろいろなものを数えられるように，時計を読めるように，お金を使えるように，おやつを仲良く分けられるように，いろいろなゲームを楽しめるように数量概念，数字，位取り，順番などを教えるであろう．

小学校に入ると，先生から自然数，分数，小数を少しずつ体系的に習うであ

ろう．中学校では正の数ばかりでなく，負の数も習い，また数直線の話も聞くであろう．高等学校にあっては，実数，数直線，大小関係，四則演算などを今まで習ってきたことのまとめのような形式で教えられるであろう．

しかしながら，この段階までは「実数の連続性」と呼ばれる重要な性質を習うことはない．微分積分学の基礎として「実数の連続性」は重要なのだが，高等学校の段階では論理思考の難しさもあり，図形的直感或いは暗黙の了解に委ねることにし，明確に話されることはないのである．

高等学校では多項式の微分積分をまず教え，その後に指数関数，対数関数，三角関数や無理関数の微分積分を教えるようになっている．微分積分の定義に数列或いは関数の極限を考えるということが出てくるけれども，数列或いは関数の極限というものの直感的説明はしても数学的に明確な説明はしない．

極限というものを考えると言うからには，その極限といわれるものが本当にあるのかないのかが当然問題になる．自然対数の底 e は

$$\lim_{n\to 0}(a^h-1)/h=1$$

となる数 $a=e$ として定めてあるが数学的に明確にいえることなのか．円周と直径との間の関係式の比例定数 π のあることはどうしてよいのか．有限閉区間で連続関数は最大値も最小値もとるといわれるが本当にそうなのか．

こうした問題に明確に答えるためには，極限の概念を明確に捉えることが必要なばかりでなく，実数の概念もまた明確にしなければならないのである．実数は有限小数または循環小数として表される有理数と循環しない無限十進小数として表される無理数とからなり大小関係があり四則演算ができると言われるが，有限時間に書けない無限十進小数の和や積がどう定められていたかということさえ疑問ではないだろうか．

以上のような理由から，実数の概念や極限の概念を明確にすることを以下で少し詳しく説明したい．

我々は初めのうちは実数を無限十進小数自身のことと捉える．但し，有理数の範囲でも既に後に説明するように

$$\lim_{n\to\infty} 10^{-n}=0$$

であるから，

$$1.000\cdots=0.999\cdots$$

などと同一視する．この同一視のもとであらゆる無限十進小数を実数と捉えればーつの無限十進小数の小数第 n 位までで表される有理数の数列の極限をすべて実数として取り込んだことになり「実数の連続性」が成立することになる．実数の概念を明確にする上でもっとも基本的なことは大小関係である．幼い頃に，大きい小さい，高い低い，長い短い，多い少ない，重い軽いなど，ものを比較する体験を重ねるうちに数量概念が形成されてくると思われるが，抽象的な概念構成においても大小関係が根本になる．

1. 「数」の概念は自然数，自然数及び 0，非負の有理数，有理数と拡張されてき，有理数が有限十進小数として表されることが認識される．ここから一歩進んで，あらゆる無限十進小数も「数」の仲間であるとする考えが生まれる．実数概念の誕生である．循環節のない無限十進小数を無理数ということにし，有理数と無理数を併せて実数ということにするのである．

このように「数」の概念を有理数から実数に拡張したとき，何か新しく良いことがあるだろうか．有限時間内では決して見ることができない無限十進小数を考えるということにどんな意義があるだろうか．

有理数の範囲では四則演算ができ，結合法則，交換法則，分配法則などが成立していた．また，大小関係も，考えられた．実数は有理数のもっていたこのようなことを保持し，さらに良い点ももちあわせているのだろうか．

ここで，一つ問題を考えてもらいたい．

《問題 1》 $a_1=1, a_n=(4+3a_{n-1})/(3+2a_{n-1})(n\geqq 2)$ とするとき，$a_n<2, a_n<a_{n+1}$ がすべての n に対して成立することを示せ．

実際に計算してみると

$a_1=1.$

$$a_2=1.4 \qquad\qquad =\frac{7}{5}$$

$$a_3=1.41379\cdots\cdots \quad =\frac{41}{29}$$

$$a_4=1.41420\cdots\cdots \quad =\frac{239}{169}$$

$$a_5=1.414213\cdots\cdots \quad =\frac{1393}{985}$$

$$a_6=1.4142135 \qquad =\frac{8119}{5741}$$

などとなっており，

（0）　a_n の整数部分は，すべて1である。

（1）　第2項以降小数第1位は4である．

（2）　第3項以降小数第2位は1である．

（3）　第4項以降小数第3位は4である．

　⋮

ということが見える．従って，

（0）′　$n\geqq n_0=1$ に対して，$|a_n-a_{n_0}|<1$

（1）′　$n\geqq n_1=2$ に対して，$|a_n-a_{n_1}|<\frac{1}{10}$

（2）′　$n\geqq n_2=3$ に対して，$|a_n=a_{n_2}|<\frac{1}{10^2}$

（3）′　$n\geqq n_3=4$ に対して，$|a_n-a_{n_3}|<\frac{1}{10^3}$

　⋮

ということが分かる．番号が大きくなるにつれ，それ以後の番号の項が$\frac{1}{10}$の何乗という小さな差の範囲に全部あるということが分かる．数列 $(a_n)_{n\in N}$ は番号 n が大きくなるにつれ，ある数にだんだん「近づいている」ようである．ここで「近づいている」ということを数学的に定義してみよう．今は，有理数の数列が有理数に近づくということだけ定義する．

定義. 有理数列 $(a_n)_{n\in N}$ が有理数 a に近づくまたは収束するとは，任意の $k\in N$ に対して，ある番号 $n_0\in N$ があって $n\geqq n_0$ である番号 n について $|a_n-a|<\frac{1}{10^k}$ が成立することであると定める．このとき，a を $(a_n)_{n\in N}$ の極限であるという．

a を含む区間をどんなに小さく設定しても番号が相当に大きくなれば，それ以後の項がずっとその設定区間に入るということである．

例. $a_n=\frac{3}{10}+\cdots+\frac{3}{10^n}$ とおくとき，$a=\frac{1}{3}$ に近づく．

さて，簡単に次のことがわかる．

命題. 有理数列 $(a_n)_{n\in N}$ が a に近づき，有理数列 $(b_n)_{n\in N}$ が b に近づくものとする．このとき，有理数列 $(a_n+b_n)_{n\in N}$, $(a_n-b_n)_{n\in N}$, $(a_nb_n)_{n\in N}$ はそれぞれ $a+b, a-b, ab$ に近づく．

問. この命題を示せ．

ここで，もう一度問題1の有理数列 $(a_n)_{n\in N}$

$$a_1=1, a_n=(4+3a_{n-1})/(3+2a_{n-1})(n\geqq 2)$$

を考えてみる．もし，この有理数列が有理数 a に近づくとしたら

$$a_n(3+2a_{n-1})=4+3a_{n-1}$$

に上の命題を使って

$$a(3+2a)=4+3a$$

よって，$a^2=2$ となる．良く知られているように2乗して2となる有理数はない．だから，この有理数列 $(a_n)_{n\in N}$ が「近づくべき数」は無理数 $\sqrt{2}$ であろう．後に見るように実数列の収束の意味で，この有理数列である実数列 $(a_n)_{n\in N}$ は実数 $\sqrt{2}$ に収束することが分かる．このようなことを導くための根拠が「実数の連続性」と言われるものにある．それを説明するためにいくつか用意しなければならない．

2. 再度言うが，実数とは，無限十進小数

$$\alpha_0.\,\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m\cdots\left[\begin{array}{l}\alpha_0 \text{ は整数,}\\ \alpha_1,\cdots,\alpha_m,\cdots \text{ は, } 0,1,\cdots,9 \text{ のいずれか}\end{array}\right]$$

のことだとする．ただし，0.99… と 1.00… とは同じものとみなすように，$\alpha_0.\,\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m\cdots$ と $\beta_0.\,\beta_1\beta_2\cdots\beta_m\cdots$ とは，$\alpha_0=\beta_0, \cdots, \alpha_k=\beta_k, \alpha_{k+1}=\beta_{k+1}+1, \alpha_{k+2}=\cdots=0, \beta_{k+2}=\cdots=9$ のとき同じものとみなし，$\alpha_0.\,\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m\cdots$ という有限十進小数の方を採用するのを原則とする．

実数についても大小関係が考えられる．

2つの実数 $a=\alpha_0.\,\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m\cdots$ と $b=\beta_0.\,\beta_1\beta_2\cdots\beta_m\cdots$ について，a が b より小さいとは，ある $k\in N\cup\{0\}$ があって，

$$\alpha_0=\beta_0 \text{ かつ } \cdots \text{ かつ } \alpha_{k-1}=\beta_{k-1} \text{ かつ } \alpha_k<\beta_k \text{ かつ } a\neq b$$

（これのなかに $a=b$ の場合があることに注意）

であることをいう．このとき，$a<b$ で表す．b は a より大きいともいう．

$a<b$ 又は $a=b$ のとき，$a\leqq b$ で表す．

(i)　任意の実数 a について，$a\leqq a$

(ii)　任意の2つの実数 a, b について，$a\leqq b$ か $b\leqq a$ のとき，$a=b$

(iii)　任意の3つの実数 a, b, c について，$a\leqq b$ かつ $b\leqq c$ のとき，$a\leqq c$

が成り立つのが分かる．

問．(i)(ii)(iii) を示せ．

任意の2つの実数 a, b について

$$a<b,\ a=b,\ b<a$$

のいずれか一つだけが成立する．

3．実数列 $(a_n)_{n\in N}$ が単調非減少であるとは，

(3.1) すべての番号 $n\in N$ に対して，$a_n\leqq a_{n+1}$

が成り立つことをいう．

実数列 $(a_n)_{n\in N}$ が上に有界であるとは，

(3.2) ある実数 M があって，すべての番号 $n\in N$ に対して，$a_n\leqq M$

が成り立つことをいう．このとき，M は $(a_n)_{n\in N}$ の一つの上界であるという．

実数 a が実数列 $(a_n)_{n\in N}$ の上限であるとは,

(3.3) a は $(a_n)_{n\in N}$ の一つの上界である. i.e. $\forall n\in N\ a_n\leqq a$.

(3.4) 実数 b が $b<a$ をみたすとき, $b<a_{n_0}\leqq a$ となる番号 n_0 がある,

という2つの性質をもつことをいう. 後者は,

実数 b がすべての $n\in N$ に対し $a_n\leqq b$ なら $a\leqq b$

ともいえるから, 上限とは上界のうち最も小さいもの, 即ち最小上界のことである. 上限を, $\sup(a_n)_{n\in N}$ で表す.

これだけ準備すると,「実数の連続性」を次のように言える.

実数の連続性 Ver. UMS

単調非減少かつ上に有界な実数列 $(a_n)_{n\in N}$ には上限 $\sup(a_n)_{n\in N}$ が存在する.

問題1の有理数列 $(a_n)_{n\in N}$ は, 単調非減少かつ上に有界であり, 有理数の範囲では上限がないとしても, 実数まで範囲を拡げると必ず上限があるということが, 実数の連続性によって保証されるのである.

(実数の連続性の証明)　ここでは, 実数を無限十進小数と捉えている. そのときは次のように証明する.

各番号 n に対して, a_n が

$$a_n=\alpha_0{}^n.\,\alpha_1{}^n\alpha_2{}^n\cdots\alpha_m{}^n\cdots$$

と表されるとしよう. また, (3, 2) にいう M が

$$M=M_0.\,M_1M_2\cdots M_m\cdots$$

と表されるとしよう. 上の表で, 有限小数で表すことが可能なときはそれを必ず採用することにしておく.

すべての $n\in N$ に対して

$$a_n\leqq M$$

であるから, $\leqq$ の意味から, すべての $n\in N$ に対して

$$\alpha_0{}^n\leqq M_0$$

一方, すべての $n\in N$ に対して

$$a_n \leqq a_{n+1}$$

であったから,

$$\alpha_0{}^n \leqq \alpha_0{}^{n+1}$$

であるから，ある番号 n_0 があって，それ以上の番号の整数部分は一定，即ち

$$\alpha_0{}^{n_0-1} < \alpha_0{}^{n_0} = \alpha_0{}^{n+1} = \alpha_0{}^{n+2} = \cdots \leqq M_0$$

とならなくてはいけない.

次に番号が n_0 以上のものについて小数第1位をみる.

やはり，$\geqq$ の意味から

$$\alpha_1{}^n \leqq \alpha_1{}^{n+1} \leqq 9$$

であるから，ある番号 n_1 以上は小数第1位が一定である．以下，同様に考えて，小数第 k 位は，n_k 以上で一定であるとしよう．ただし，

$n_0 \leqq n_1 \leqq \cdots \leqq n_k \leqq \cdots$ となっている.

このとき，$a = \alpha_0{}^{n_0}.\ \alpha_1{}^{n_1}\alpha_2{}^{n_2}\cdots\alpha_k{}^{n_k}\cdots$ という実数が $\sup(a_n)_{n \in N}$ に他ならない.

$\alpha_k{}^{n_k}$ の取り方と $\leqq$ の意味から

$$a_n \leqq a$$

がすべての $n \in N$ に対して成立する．また，$b < a$ とすれば,

$$b = \beta_0.\ \beta_1\beta_2\cdots\beta_k\cdots$$

とおくとき，$<$ の意味から，ある k に対し

$$\beta_0 = \alpha_0{}^{n_0},\ \cdots,\ \beta_k = \alpha_0{}^{n_k},\ \beta_{k+1} < \alpha_0{}^{n_{k+1}},$$

となるから，$b < a_{n_{k+1}} \leqq a$ となる,（証明終了）

$$\begin{array}{l}
\alpha_0{}^1.\ \alpha_1{}^1\cdots\alpha_k{}^1\cdots \\
\vdots \\
\alpha_0{}^{n_0}.\ \alpha_1{}^{n_0}\cdots\alpha_k{}^{n_0}\cdots \\
\vdots \\
\alpha_0{}^{n_1}.\ \alpha_1{}^{n_1}\cdots\alpha_k{}^{n_1}\cdots \\
\vdots \\
\alpha_0{}^{n_k}.\ \alpha_1{}^{n_k}\cdots\alpha_k{}^{n_k}\cdots \\
\vdots
\end{array}$$

双対的に（不等号を反対向きにして)，単調非増加，下に有界，下限，inf を定義して次のことを示せる.

実数の連続性 Ver. LMI

> 単調非増加かつ下に有界な実数列 $(a_n)_{n\in N}$ には下限 $\inf(a_n)_{n\in N}$ が存在する.

4. 実数列 $(a_n)_{n\in N}$ が実数 a に<u>収束する</u>ということを次のように定義しよう.

$b<a$ をみたす任意の実数 b と $a<c$ をみたす任意の実数 c に対して，ある番号 $n_{b,c}$ があって，$n\geqq n_{b,c}$ となるすべての番号 n について，

$$b<a_n<c$$

となる.

このとき，a を $(a_n)_{n\in N}$ の<u>極限</u>といい，

$$\lim_{n\to+\infty} a_n=a,\ a=\lim_{n\to+\infty} a_n,\ a_n\to a(n\to+\infty)$$

で表す.

命題. 実数列 $(a_n)_{n\in N}$ が収束列ならば，上にも下にも有界である.

命題. 2 つの実数列 $(a_n)_{n\in N}, (b_n)_{n\in N}$ がそれぞれ a, b に収束し，また，すべての $n\in N$ に対し，$a_n\leqq b_n$ であるとすれば，$a\leqq b$ である.

命題. (はさみうちの原理) 3 つの実数列 $(a_n)_{n\in N}, (b_n)_{n\in N}, (c_n)_{n\in N}$ があり，すべての $n\in N$ に対し，$a_n\leqq c_n\leqq b_n$ であるとする. $(a_n)_{n\in N}, (b_n)_{n\in N}$ が収束し，$l=\lim_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty} b_n$ ならば，$(c_n)_{n\in N}$ も収束し，極限は l に等しい.

問. 上の命題を示せ.

「実数の連続性」から次の定理を導ける.

実数の連続性 Ver. UMC

> 単調非減少かつ上に有界な実数列 $(a_n)_{n\in N}$ は収束する. その極限は，上限 $\sup(a_n)_{n\in N}$ に等しい.

実数の連続性 Ver. LMC

> 単調非増加かつ下に有界な実数列 $(a_n)_{n\in N}$ は収束する. その極限は，下限 $\inf(a_n)_{n\in N}$ に等しい.

実数列に関する公式

実数列 $(a_n)_{n\in N}$, $(b_n)_{n\in N}$ が収束し，その極限がそれぞれ a, b であるとする．このとき

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=a+b,\ \lim_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=a-b$$

$$\lim_{n\to+\infty}a_nb_n=ab,\ \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}\quad (\text{ただし } b\neq 0,\ b_n\neq 0)$$

問．上の公式を示せ．

注．ここに至って，$a_1=1, a_n=(4+3a_{n-1})/(3+2a_{n-1})$ で定められる実数列が収束し，極限が $\sqrt{2}$ となることがわかる．前に調べたようにこの実数列は上に有界かつ単調非減少であるから，実数の連続性 Ver. UMC より収束する．極限を a とおくとき，公式から

$$a(3+2a)=4+3a\quad \therefore 2a^2=4\ \ i.e.\ \ a^2=2.$$

よって，極限は2乗して2になる実数である．$a_n>0$ だから，$a=\sqrt{2}$ である．

5．さて，次に実数の演算について考えてみる．

$$a=\alpha_0.\,\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots,\ b=\beta_0.\,\beta_1\beta_2\cdots\beta_n\cdots$$

を2つの実数とする．これらに対して，$n\in N$ について

$$a_n=\alpha_0+\frac{\alpha_1}{10}+\cdots+\frac{\alpha_n}{10^n},\ b_n=\beta_0+\frac{\beta_1}{10}+\cdots+\frac{\beta_n}{10^n}$$

とおく．a_n, b_n は有理数で和積等を考えられる．

和．$c_n=a_n+b_n$ で定められる有理数の実数列 $(c_n)_{n\in N}$ を考えると，これは上に有界かつ単調非減少であるから収束する．その極限となる $\sup(c_n)_{n\in N}$ を $a+b$ とおく．

差．まず $-b$ を定義する．有理数の実数列 $(-b_n)_{n\in N}$ を考えると，下に有界かつ単調非増加であるから収束する．その極限は $\inf(-b_n)_{n\in N}$ でそれを $-b$ とおく．$a-b=a+(-b)$ と定める．

問.
$$a+b=b+a,\ (a+b)+c=a+(b+c)$$
$$a+0=0+a,\ a+(-a)=(-a)+a=0$$
$$a\leqq b \text{ のとき } a+c\leqq b+c$$

積商については「Cauchy 列」の収束性を述べてからにする．ただし，a の n 個の和は，自然数 n と a の積と同じとし，na で表すことだけ定めておく．

Archimedes の性質 Ver.A$_\infty$

a を正の実数すなわち $0<a$ とする．
実数列 $(na)_{n\in N}$ は上に有界ではない．

証明．もしも，$(na)_{n\in N}$ が上に有界であるなら，単調非減少でもあるから実数の連続性 Ver. UMS により，上限 α が存在する．

(i) すべての $n\in N$ に対して，$na\leqq\alpha$,

(ii) $b<\alpha$ ならば，$b<n_0a\leqq\alpha$ となる番号 $n_0\in N$ がある．

という2つの性質をみたす．(ii) の b として $\alpha-a$ をとると
$$\alpha-a<n_0a\leqq\alpha$$
となる n_0 があり，よって，$\alpha<(n_0+1)a$. これは (i) に反する．
従って，$(na)_{n\in N}$ は上に有界ではない．(証了)

Archimedes の性質 Ver. A$_0$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$$

証明．Archimedes の性質 Ver. A$_\infty$ において，$a=\varepsilon>0$ とおくと，$(n\varepsilon)_{n\in N}$ が上に有界ではないから，$1<n_0\varepsilon$ となる $n_0\in N$ がある．よって，$\frac{1}{n_0}<\varepsilon$. $n_0\leqq n$ $(n\in N)$ ならば，$\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{n_0}$ であるから，$-\varepsilon<0<\frac{1}{n}<\varepsilon$. 従って，$\lim_{\infty+\leftarrow u}\frac{1}{n}=0$. (証了)

問．$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0$ を示せ．($n<2^n$ すなわち，$\frac{1}{2^n}<\frac{1}{n}$ に注目する．)

Archimedes の性質は Ver. A$_0$ の型で用いられることが多い．

区間縮小法の原理
Principle of Successive Division (PSD と略す)

2つの実数列 $(a_n)_{n\in N}$, $(b_n)_{n\in N}$ について,

$a_n \leqq a_{n+1} \leqq b_{n+1} \leqq b_n (n \in N)$

$\lim_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$

が成り立っていれば, $(a_n)_{n\in N}$, $(b_n)_{n\in N}$

は共に収束し, 極限が一致する.

証明. $(a_n)_{n\in N}$ は上に有界な単調非減少列で, $(b_n)_{n\in N}$ は下に有界な単調非増加列なので, 実数の連続性 Ver. UMC, Ver. LMC により, それぞれ収束する. $\lim_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$ なので, 公式から, $\lim_{n\to+\infty} b_n - \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ すなわち, 2つの極限は一致する. (証了)

実数列 $(a_n)_{n\in N}$ に対して, 番号を部分的にとって得られる実数列すなわち, $k \in N$ に対し $n(k) \in N$ を, $n(k) < n(k+1)$ であるように定めて, その番号をもつ実数列 $(a_{n(k)})_{k\in N}$ を考えることがある. こういった実数列を $(a_n)_{n\in N}$ の部分列という.

実数の連続性 Ver. (Bolzano-Weierstrassの性質)

上にも下にも有界な実数列 $(a_n)_{n\in N}$ は

収束する部分列 $(a_{n(k)})_{k\in N}$ を含む.

証明. 実数 m, M があって, すべての $n \in N$ に対し, $m \leqq a_n \leqq M$ であるとしよう. $\left[m, \frac{m+M}{2}\right]$ または, $\left[\frac{m+M}{2}, M\right]$ の中に $(a_n)_{n\in N}$ の無限の項が含まれる. 無限の項を含む方の区間を I_1 とする. I_1 をさらに2等分すると, $(a_n)_{n\in N}$ の無限の項がどちらかに含まれるので, 含む方を I_2 とする. 以下, 帰納的に, I_k を I_{k-1} が定まったとして, I_{k-1} を2等分して得られる区間のうち $(a_n)_{n\in N}$ の無限の項を含む方と定める. このように I_k を定め, $I_k = [b_k, c_k]$ とおくと

$$b_k \leqq b_{k+1} \leqq c_{k+1} \leqq c_k,\quad c_k - b_k = \frac{M-m}{2^k}$$

であるから，区間縮小法の原理と，$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}=0$ より，$l=\lim_{n\to+\infty} b_k=\lim_{n\to+\infty} c_k$ がある．$a_{n(k)}$ を $a_{n(k)} \in I_k$ すなわち，$b_k \leqq a_{n(k)} \leqq c_k, n(k)<n(k+1)$ と選べば，はさみうちの原理により，$\lim_{n\to+\infty} a_{n(k)}$ があって，l に等しい．(証了)

《例》 $a_1=1, a_n=(2+a_{n-1})/(1+a_{n-1})(n \in N)$ で定められる実数列は，上にも下にも有界で，奇数番号の項からなる部分列 $(a_{2k-1})_{k\in N}$ は上に有界かつ単調非減少，偶数番号の項からなる部分列 $(a_{2k})_{k\in N}$ は下に有界かつ単調非増加でそれぞれともに $\sqrt{2}$ に収束する．

6. 実数列 $(a_n)_{n\in N}$ が Cauchy (または，基本) 列であるとは，次のことをみたすことをいう．

任意の正の実数 ε に対して，ε に依存して定まる番号 n_ε があり，n_ε 以上の番号 n, m については，$-\varepsilon<a_n-a_m<\varepsilon$ である．

命題．Cauchy 列 $(a_n)_{n\in N}$ は上にも下にも有界である．

命題．Cauchy 列 $(a_n)_{n\in N}$ が収束する部分列 $(a_{n(k)})_{k\in N}$ を含めば，$(a_n)_{n\in N}$ 自身が収束し，$\lim_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty} a_{n(k)}$ である．

問．上の命題を示せ．

Cauchy の収束判定法

> 実数列 $(a_n)_{n\in N}$ が収束するための必要十分条件は $(a_n)_{n\in N}$ が Cauchy 列であることである．

証明．Cauchy 列は上にも下にも有界であるから，実数の連続性 Ver. BW より，収束する部分列 $(a_{n(k)})_{k\in N}$ を含む．従って，$(a_n)_{k\in N}$ 自身も収束する．(上記の命題を使った．)

$(a_n)_{n\in N}$ が収束列であれば，$|a_n-a_m| \leqq |a_n-\lim_{n\to+\infty} a_n|+|\lim_{n\to+\infty} a_n-a_m|$ を用いて Cauchy 列であることを示せる．(証了)

ここで，前に残しておいた実数の積，商を定めよう．記号は以前のようである．

積．$d_n=a_nb_n$ とおく．これは有理数の範囲の積だから考えられる．

$n\leqq m$ として

$$d_m-d_n=a_mb_m-a_nb_n$$
$$=(a_m-a_n)b_m-a_n(b_m-b_n)$$

だから，

$$d_m-d_n\leqq|a_m-a_n||b_m|+|a_n||b_m-b_n|$$
$$\leqq\left[\frac{9}{10^{n+1}}+\cdots+\frac{9}{10^m}\right](|\beta_0|+1+|\alpha_0|+1)$$
$$<\frac{1}{10^n}(|\beta_0|+|\alpha_0|+2)$$

従って，$(d_n)_{n\in N}$ は Cauchy 列である．$\lim_{\infty+\leftarrow n} d_n$ を ab と書き，a と b の積ということにする．

商．$b\neq0$ に対して，$b^{-1}=\frac{1}{b}$ をまず定める．$b\neq0$ だから，ある番号 n_0 以上の番号 n に対して，$|b_n|>L\neq0$ である．有理数 b_n の逆数 $b_n{}^{-1}=\frac{1}{b_n}$ は考えられる．$n\leqq m$ とするとき，

$$\left|\frac{1}{b_n}\frac{1}{b_m}\right|=\left|\frac{b_m-b_n}{b_nb_m}\right|<\frac{1}{L^2}\left[\frac{9}{10^{n+1}}+\cdots+\frac{9}{10^m}\right]<\frac{1}{10^n}\cdot\frac{1}{L^2}$$

よって，$\left[\frac{1}{b_n}\right]_{n\in N,n\geqq n_0}$ は Cauchy 列だから $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{b_n}$ がある．それを $\frac{1}{b}=b^{-1}$ で表す．$\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}=ab^{-1}$ と定める．

問．$ab=ba$, $(ab)c=a(bc)$, $a\cdot1=1\cdot a=a$, $aa^{-1}=a^{-1}a=1$,

$(a+b)c=ac+bc$, $a(b+c)=ab+ac$,

$0\leqq a$, $0\leqq b$ のとき，$0\leqq ab$.

―― 実数の連続性 Ver. (Dedekind の切断の性質) ――

実数の全体の集合を $\boldsymbol{R}$ で表し，その部分集合

A, B が

$A\neq\phi$, $B\neq\phi$, $A\cap B=\phi$, $\boldsymbol{R}=A\cup B$

すべての $a\in A$, すべての $b\in B$ に対し，$a<b$ をみたすものとする．このとき，

(i) $\max A$ が存在して，$\min B$ が存在しない

または，

(ii) $\max A$ が存在せず，$\min B$ が存在する

このうちのいずれか一方のみが成立する．

証明．$A\neq\phi$, $B\neq\phi$ だから，それぞれに含まれる元，a, b を一つずつ選ぶ．$a<b$ となっている．$a_0=a$, $b_0=b$ とし，帰納的 a_k, b_k を次のように定める．$\boldsymbol{R}=A\cup B$, $A\cap B=\phi$ なので $\dfrac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}=c_k$ は A または B のいずれか一方に属する．

$$c_k\in A \text{ のとき，} a_k=c_k,\ b_k=b_{k-1}$$
$$c_k\in B \text{ のとき，} a_k=a_{k-1},\ b_k=c_k$$

と定める．このとき，

$$a_k\leqq a_{k+1}\leqq b_{k+1}\leqq b_k,\ b_k-a_k=\frac{b-a}{2^k},\ a_k\leqq c_k\leqq b_k$$

である．$p, q\geqq k$ のとき，

$$|a_p-a_q|\leqq\frac{b-a}{2^k},\quad |b_p-b_q|\leqq\frac{b-a}{2^k}$$

で，$\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{2^k}=0$ であるから $(a_k)_{k\in N}$, $(b_k)_{k\in N}$ は Cauchy 列であり収束する．$\displaystyle\lim_{k\to+\infty}(b_k-a_k)=0$ だから，その極限は一致し，さらにはさみうちの原理により，$\displaystyle\lim_{k\to+\infty}c_k=\lim_{k\to+\infty}a_k=\lim_{k\to+\infty}b_k=c$ となる．

$c\in A$ または $c\in B$ のいずれか一方が成立する．

(i) $c\in A$ とする．$a\in A$ とし，$c<a$ であると仮定すれば，極限の定義から，$c\leqq b_{n_0}<a$ となる $b_{n_0}\in B$ があり，B の元は A の元より必ず大きいことに反する．矛盾．よって $a\leqq c$ でなければならない．ゆえに，$c=\max A$. $\min B=d$ があるとしたら，$c<d$ で，再び極限の定義から，$c\leqq b_{n_0}<d$ となる $b_{n_0}\in B$ が

あり，d が B の最小値であることに反する．ゆえに，$\min B$ は存在しない．

(ii) $c\in B$ とする．$b\in B$ とし，$b<c$ であると仮定すれば，極限の定義から，$b<a_{n_0}\leqq c$ となる $a_{n_0}\in A$ があり，A の元は B の元より必ず小さいことに反する．矛盾．よって，$c\leqq b$ でなければならない．ゆえに，$c=\min B$.

$\max A=d$ があるとしたら，$d<c$ で，再び極限の定義から，$d<a_{n_0}\leqq c$ となる $a_{n_0}\in A$ があり，d が A の最大値であることに反する．ゆえに，$\max A$ は存在しない．(証了)

実数の連続性 Ver. W (Weierstrass の上限存在定理)

上に有界な空でない $\boldsymbol{R}$ の部分集合 A には，上限 $\sup A$ が存在する．ここで，$\sup A$ とは

(1) すべての $a\in A$ に対して，$a\leqq\sup A$

(2) $b<\sup A$ ならば，$b<a\leqq\sup A$ となる $a\in A$ がある．

すなわち，すべての $a\in A$ に対して，

$a\leqq b$ ならば，$\sup A\leqq b$ である．

という性質をもつ実数のことである．

証明．A は上に有界であるから，

$$B=\{b\in\boldsymbol{R}|\ \text{すべての}\ a\in A\ \text{に対して，}\ a\leqq b\}$$

という集合を考えると，$B\neq\phi$. C を B の補集合とすれば，$C\neq\phi$ で，$B\cup C=\boldsymbol{R}$.

また，$c\in C$ ならば，ある $a\in A$ があって $c<a$ となるから，$b\in B$ に対し，$c<b$ となる．実数の連続性 Ver. D によれば，$\max C$ があって $\min B$ がないか，$\min B$ があって$\max C$ がないかのいずれか一方のみが成立する．

(i) $\max C$ があって，$\min B$ がない，とすれば，$c_0=\max C\in C$ だから

$$c_0<a\ \text{となる}\ a\in A\ \text{があり，}\ b_0<\frac{c_0+a}{2}<a\ \text{だから，}\ \frac{c_0+a}{2}\in C$$

となり，$c_0=\max C$ に反する．

従って，

(ii) $\min B$ が存在し，$\max C$ が存在しない

が成立する．よって，$\sup A=\min B$ が存在する．(証了)

8. 以上のように，我々は，実数を無限十進小数の全体の集合であるとして出発し，大小関係を導入し，実数の連続性の様々な側面および四則演算のできることをみてきた．

ここで，振り返ってみて，実数がどういう性質で特徴付けられるか考えてみよう．実数には，大小関係が定められており，また四則演算が可能であった．一般に，このようなものを順序体であるという．実数の連続性の様々な表現を次から次へと導びいて来たが，その証明は順序体であるということのみ使用し，無限十進小数が元であるという固有の性質は使われていない．従って，順序体においては，

連続性 Ver. UMS → 連続性 Ver. UMC
↕　　　　　　↕
連続性 Ver. LMI → 連続性 Ver. LMC

PSD　区間縮小法の原理と Archimedes 性質
↓
連続性 Ver. BW → Cauchy の収束判定法と Archimedes の性質
↓
連続性 Ver. W ← 連続性 Ver. D

のように次から次の性質が導びかれる．順序体であって，上の性質の1つ，従って，すべてをみたすものKを考えると，

(8.1)　K∋1,0 で，和差積商をとることにより，有理数の全体の集合 Q を自然に含んでいることがわかる．

(8.2)　K∋a に対して，$\alpha_0\leqq a<\alpha_0+1$ となる整数 a_0 の定まることがわかる．

(8.3)　K∋a に対して，有理数列 $a_n=a_0+\frac{\alpha_1}{10}+\cdots+\frac{\alpha_n}{10^n}$ が定まって，$\lim_{n\to+\infty} a_n=a$ となる，ことがわかる．

(8.4)　有理数列$a_n=a_0+\frac{\alpha_1}{10}+\cdots+\frac{\alpha_n}{10^n}$ は，必ず収束し，$\lim_{n\to+\infty} a_n$ はあるKの元を表す，ことがわかる．

実数概念の本質は，連続性をみたす順序体であるということである．そして，

無限十進小数は実数の1つの表現にすぎないことがわかる.

9. 区間 $I([a,b],[a,b],[a,b],(a,b))$ で定義された関数 $f(x)$ を考える. c を I の内部の点または(I に含まれても, 含まれなくてもよいが)端点とする. x が I の内部から c に近づくとき, $f(x)$ が実数 γ に近づくとは, 任意の正の実数 ε に対して, ある正の実数 δ をとると
$|x-c|<\delta, x\in I$ となる x に対して $|f(x)-\gamma|<\varepsilon$ となることをいう. このとき, γ を x が I の内部から c に近づくときの $f(x)$ の極限といい,

$$\lim_{x\to c, x\in I} f(x)=\gamma, \lim_{x\to c, x\in I} f(x)=\gamma, f(x)\to\gamma(x\to c, x\in I)$$

で表す. 数列のときと同様に次の公式, 原理が成立する.

《公式》 $\lim_{x\to c, x\in I} f(x)=\alpha, \lim_{x\to c, x\in I} g(x)=\beta$ とする.

(1) $\lim_{x\to c, x\in I}(f(x)+g(x))=\alpha+\beta$

(2) $\lim_{x\to c, x\in I}(f(x)-h(x))=\alpha-\beta$

(3) $\lim_{x\to c, x\in I} f(x)g(x)=\alpha\beta$

(4) $\beta\neq 0, g(x)\neq 0(x\in I)$ のとき, $\lim_{x\to c, x\in I}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$

(5) すべての $x\in I$ に対し, $f(x)\leqq g(x)$ のとき, $\alpha\leqq\beta$

《関数の極限に関するはさみうちの原理》 I で定義された3つの関数 $f(x)$, $g(x), h(x)$ について, $f(x)\leqq h(x)\leqq g(x)$ $(x\in I)$ であり, かつ, $\lim_{x\to c, x\in I} f(x)=\lim_{x\to c. x\in I} g(x)=l$ があれば, $\lim_{x\to, x\in I} h(x)$ もあって l に等しい.

問. 上記の公式, 原理を示せ.(定義を素直に書き下すとよい.)

さて, 区間 I で定義された関数 $f(x)$ が I 内の点 c で連続であるとは,

$$\lim_{x\to c, x\in I} f(x)=f(c)$$

が成り立つことをいう. I の内部の任意の点 c で $f(x)$ が連続であるとき, I

上で $f(x)$ は連続であるという．次の命題は関数の極限公式からわかる．

《命題》 $f(x), g(x)$ がともに，$x=c$ で連続ならば，

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ (f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(fg)(x)=f(x)g(x)$$

$$g(c)\neq 0, g(x)\neq 0\ \ (x\in I)\ \text{のとき},\ \left[\frac{f}{g}\right](x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

も $x=c$ で連続である．

問. 上の命題を確認せよ．

有限閉区間 I 上の連続関数は，次のような重要な性質をもつ．

《中間値の定理》 有界閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数 $f(x)$ は，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 γ を $[a, b]$ 内でとる，すなわち，$c\in[a, b]$ で $f(c)=\gamma$ となるものがある．

証明. $f(a)=f(b)$ のときは明らかである．$f(a)<f(b)$ とする．$c_1=\dfrac{a+b}{2}$ とおき，

$$f(c_1)<\gamma\ \text{なら},\ a_1=c_1, b_1=b$$

$$\gamma\leqq f(c_1)\ \text{なら},\ a_1=a, b_1=c_1$$

とおく．以下，帰納的に，a_{k-1}, b_{k-1} を定めていき，$c_k=\dfrac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$ とおき，a_k, b_k を

$$f(c_k)<\gamma\ \text{なら},\ a_k=c_k, b_k=b_{k-1}$$

$$\gamma\leqq f(c_k)\ \text{なら},\ a_k=a_{k-1}, b_k=c_k$$

と定める．このとき，$a_k\leqq a_{k+1}\leqq b_{k+1}\leqq b_k$, $b_k-a_k=\dfrac{b-a}{2^k}$ であるから区間縮小法の原理より，$\lim\limits_{k\to+\infty} a_k=\lim\limits_{k\to+\infty} b_k=c$ があるが，

$$f(c)=\lim_{k\to+\infty} f(a_k)\leqq\gamma\leqq\lim_{k\to+\infty} f(b_k)=f(c)$$

が連続性と極限の大小関係からわかる．よって，$f(c)=\gamma, c\in I$ となる．

$f(b)<f(a)$ のときも同様である.（証了）

例. $f(x)=x^m$ を $[0,c]$ で考えることにより，$a\in[0,c]$ の m 乗根 b の存在を中間値の定義を用いて示せる.（ここで c は a に応じて適宜定めるものとする.）

《最大値最小値の存在定理》 有界閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数は最大値と最小値とをとる. すなわち，$x_m, x_M\in[a,b]$ があって

　すべての $x\in[a,b]$ に対し，$f(x_m)\leqq f(x)$

　すべての $x\in[a,b]$ に対し，$f(x)\leqq f(x_M)$

が成り立つ.

証明. まず，$f([a,b])=\{f(x)\,;\,x\in[a,b]\}$ が上に有界であることをいおう. すなわち，

ある実数 γ があって，任意の自然数 n に対し，$f(x)\leqq\gamma$ となる. もしそうでなければ，任意の自然数 n に対し，$n\leqq f(x_n)$ となる $x_m\in[a,b]$ がある. 実数列 $(x_n)_{n\in N}$ は，上にも下にも有界な実数列だから，収束する部分列 $(x_{n(k)})_{k\in N}$ がある. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n(k)}=l$ も $[a,b]$ 内にあり，f が連続だから，$f(l)=\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_{n(k)})$ が成り立つ. ところが，$(x_n)_{n\in N}$ の決め方から，$\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_{n(k)})$ は有限実数値として存在しない. 矛盾. よって，$f([a,b])$ は有界である.

さて，$\gamma=f(c)$ となる $c\in[a,b]$ があれば，$x_M=c, M=\gamma$ とおけばよい. そうでないとき，なんでもよいから，$c\in[a,b]$ をとり，$\beta=f(c)$ とおき，$\beta_0=\beta$, $\gamma_0=\gamma$ とおく. 以下，帰納的に，$\beta_{k-1}, \gamma_{k-1}$ を定め，$\alpha_k=\dfrac{\beta_{k-1}+\gamma_{k-1}}{2}$ とおくとき，

$$\alpha_k\in f([a,b]) \text{ なら，} \beta_k=\alpha_k, \gamma_k=\gamma_{k-1}$$

$$\alpha_k\notin f([a,b]) \text{ なら，} \beta_k=\beta_{k-1}, \gamma_k=\alpha_k$$

と β_k, γ_k を決める. このとき，

$$\beta_k\leqq\beta_{k-1}\leqq\gamma_{k+1}\leqq\gamma_k, \gamma_k-\beta_k=\frac{\gamma-\beta}{2^k}.$$

区間縮小法の原理から，$\lim\limits_{k\to+\infty}\beta_k=\lim\limits_{k\to+\infty}\gamma_k=M$ がある. $\beta_k=f(x_k)$ となる $x_k\in$

$[a,b]$ があり，Bolzano-Weierstrasss の性質より収束する部分列を $(x_{n(k)})_{k\in N}$ をとれる．$x_M=\lim_{k\to+\infty} x_{n(k)}\in[a,b]$ で f が連続であることより

$$M=\lim_{k\to+\infty}\beta_{n(k)}=\lim_{k\to+\infty}f(x_{n(k)})=f(\lim_{k\to+\infty}x_{n(k)})=f(x_M)$$

さて，ある $x'\in[a,b]$ に対して，$M<f(x')=M'$ とすると，$M=f(x_M)$ と $f(x')$ の間の値を，$[x_M,x']$ または $[x',x_M]$ でとることになるが，M の定め方から $M\leqq\gamma_k<M'$, $M=f(x_M)\neq\gamma_k$ となる γ_k があり，$\gamma_k\notin f([a,b])$ である，すなわち，$\gamma_k=f(x)$ となる x が $[a,b]$ 内にない．矛盾．よって，すべての $x'\in[a,b]$ に対して，$f(x')\leqq M=f(x_M)$．以上で，f は x_M で最大値 M をとることがわかった．最小値についても同様である（証了）

注．上の証明の後半部分に Weierstrass の上限存在定理を使った方が早いが，そうしないでおいた．

《一様連続性》　有界閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 f は一様連続である．すなわち，任意の正の実数 ε に対して，ある正の実数 δ があって，$x,y\in[a,b]$ で，$|x-y|<\delta$ である限り，$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ である．

証明．一様連続ではないとすると，ある正の実数 ε_0 があり，どんな正の実数 δ をとっても，$x,y\in[a,b]$, $|x-y|<\delta$ で $|f(x)-f(y)|\geqq\varepsilon_0$ となる x,y がある．そこで，$\delta=\dfrac{1}{n}$ に対する x,y を x_n,y_n とする．$(x_n)_{n\in N}$, $(y_n)_{n\in N}$ は $[a,b]$ 内の数列，すなわち，上にも下にも有界な数列だから．収束する部分列 $(x_{n(k)})_{k\in N}$, $(y_{n(k)})_{k\in N}$ を含む．$|x_{n(k)}-y_{n(k)}|<\dfrac{1}{n(k)}$ だから．$\lim_{k\to+\infty}x_{n(k)}=\lim_{k\to+\infty}y_{n(k)}\in[a,b]$ であり，$f(x)$ が $[a,b]$ で連続だから，

$$\lim_{k\to+\infty}f(x_{n(k)})=f(\lim_{k\to+\infty}x_{n(k)})=f(\lim_{k\to+\infty}y_{n(k)})=\lim_{k\to+\infty}f(y_{n(k)})$$

となるはずだが，$|f(x_{n(k)})-f(y_{n(k)})|\geqq\varepsilon_0>0$ と選んでおいたので，矛盾する．従って，一様連続でなくてはいけない．（証了）

（お茶の水女子大学助教授）