

ある種の置換群の subdegree

山 田 裕 理

1 序

有限群を研究する上で基本的な方向のひとつは、置換群として有限群をとらえることである。一般に、群はある数学的対象に作用するものとして現れるのであるから、置換群論の立場から有限群を扱うことが重要であるのは当然であろう。

有限群 G とその部分群 H に対し、 G の H による剰余類 $Hx, x \in G$, の全体を $H \backslash G$ で表すと、 G は右から可移に $H \backslash G$ に作用する。逆に、 G がある有限集合 Ω に右から可移に作用しているとき、1 点の安定化群を H とおけば、 Ω の元と $H \backslash G$ の元は自然に 1 対 1 に対応し、この対応は G の作用と可換である。したがって、可移な置換群 (G, Ω) を考えることは、 G とその部分群 H の組 (G, H) を考えることと同じである。置換群論の立場からは、 Ω あるいは $H \backslash G$ の幾何学的な意味をもとに、群 G を調べることになる。

ところで、可移な置換群 (G, Ω) から、アソシエーションスキームが得られる。アソシエーションスキームは、組合せ論的な枠組みの中で定義されるもので、置換群の概念の一般化と考えることができる。アソシエーションスキームを特徴づけるものとして、その指標表と呼ばれるものがあるが、坂内らはアソシエーションスキームの指標表を通して、置換群の研究に新しい代数的な方法を導入した。特に、坂内は、部分群 H が群 G の位数 2 の自己同型の固定点全体である場合、 (G, H) から得られるアソシエーションスキームの指標表は、部分群 H の通常の指標表と密接に関係しているであろうと予想した。この予想に

沿って, Bannai, Kawanaka, Song [3] をはじめとして, 現在活発に研究がなされている。

このような場合のひとつとして, $G=Sp_n(q)$ と $H=S_2(q)$ の組, ただし $q=2^{2n+1}$, がある. 本稿では, これから得られるアソシエーションスキームの指標表の第1行の成分が, 置換指標 1_H^G の Mackey 分解を考えることにより決定できることを示す. なお, Bagchi, Sastry [1] と Lawther, Saxl [8] が, 本稿とは別の方法で指標表の第1行の成分を計算していることに注意する. また, この指標表の予想が, Bannai, Song [4] に見られる.

2 置換群から得られるアソシエーションスキーム

本節では, 置換群から定義されるアソシエーションスキームについて, 基本的な事項をまとめておく. 詳しいことは Bannai, Ito [2] を参照されたい.

n 個の元から成る集合 X とその直積集合 $X \times X$ の部分集合 $R_i, i=0, 1, 2, \dots, d$, が次の4条件をみたすとき, $(X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ を class d のアソシエーションスキームという.

- (1) $R_0 = \{(x, x) | x \in X\}$.
- (2) $X \times X = R_0 \cup R_1 \cup \dots \cup R_d$; disjoint union.
- (3) 各 i に対し i' が存在して $i' R_i = R_i$ となる.

ただし,

$$i' R_i = \{(y, x) | (x, y) \in R_i\}$$

である.

- (4) $i, j, k \in \{0, 1, \dots, d\}$ に対し, $(x, z) \in R_i$ かつ $(z, y) \in R_j$ となる $z \in X$ の個数は $(x, y) \in R_k$ のとり方に依らず一定である.

条件(4)の z の個数を p_{ij}^k と書き, intersection number という. さらに $p_{ij}^k = p_{ji}^k$ が成立するとき, アソシエーションスキームは可換であるという.

条件(3), (4)より, $p_{ii}^0 = |\{z \in X | (x, z) \in R_i\}|$ は $x \in X$ のとり方に依存しない. これを k_i と表し, R_i の valency という. アソシエーションスキーム $(X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ に対し, 行と列がそれぞれ X の元で添字づけられた n 次行列 A_i を,

その (x, y) 成分が $(x, y) \in R_i$ のとき 1, $(x, y) \notin R_i$ のとき 0 として定義する. 行列 A_i を, i 番目の adjacency matrix という. 条件 (1) より, A_0 は n 次単位行列である. $A_0, A_1, \dots, A_d$ で生成される複素数体 C 上の代数 $\mathfrak{A}$ を, adjacency algebra という. これは n 次全行列環 $M_n(C)$ の部分代数である. 条件 (4) より

$$A_i A_j = \sum_{k=0}^d p_{ij}^k A_k$$

である. よって $\mathfrak{A}$ は C 上 $d+1$ 次元で, $\{A_0, A_1, \dots, A_d\}$ が $\mathfrak{A}$ の基底をなすことがわかる. また, 条件 (3) より $\mathfrak{A}$ が半単純代数であることがわかる.

さらに, アソシエーションスキームが可換であれば $A_i A_j = A_j A_i$ で, $\mathfrak{A}$ は可換半単純な代数になる. $\mathfrak{A}$ の C 上の次元が $d+1$ だから, この場合, $\mathfrak{A}$ は全部で $d+1$ 個の原始べき等元を持つ. それらを $E_0, E_1, \dots, E_d$ とおくと, $\{E_0, E_1, \dots, E_d\}$ は $\mathfrak{A}$ の基底である. ただし, $E_0 = \frac{1}{n} J$ で, J はすべての成分が 1 である n 次行列を表す. ここで $\mathfrak{A}$ の 2 つの基底の関係を考える. すなわち,

$$A_i = \sum_{j=0}^d p_i(j) E_j, \quad E_i = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^d q_i(j) A_j$$

により複素数 $p_i(j)$ および $q_i(j)$ を定義し, (j, i) 成分が $p_i(j)$ の $d+1$ 次行列を P , また (j, i) 成分が $q_i(j)$ の $d+1$ 次行列を Q とおく. 行列 P の行および列はある種の直交関係をみたし, また,

$$PQ = QP = nI$$

が成立する. ただし, I は $d+1$ 次単位行列である. 行列 P を, 可換なアソシエーションスキーム $(X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ の指標表ともいう. なお,

$$p_i(0) = p_i'(0) = k_i$$

である.

有限群 G が, n 個の元から成る集合 Ω に右から可移に作用しているとする. $\alpha, \beta \in \Omega$ と $g \in G$ に対し,

$$(\alpha, \beta)^g = (\alpha^g, \beta^g)$$

により直積集合 $\Omega \times \Omega$ への G の作用が定義できる. この G の作用による $\Omega \times \Omega$ 上の軌道 (orbit) の全体を, $A_0, A_1, \dots, A_d$ とする. ただし, $A_0 = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \Omega\}$ である. このとき, $(\Omega, \{A_i\}_{0 \leq i \leq d})$ は class d のアソシエーションスキームになる. 実際, アソシエーションスキームの定義のうち条件 (1) と (2) をみたすことは自明である.

$${}^iA_i = \{(\beta, \alpha) \mid (\alpha, \beta) \in A_i\}$$

も $\Omega \times \Omega$ 上の軌道のひとつであるから, ある i' があって ${}^iA_i = A_{i'}$ となる. また, 条件 (4) をみたすことも容易にわかる. $(\Omega, \{A_i\}_{0 \leq i \leq d})$ を置換群 (G, Ω) から得られるアソシエーションスキームという. これは可換とは限らない. 置換群 (G, Ω) の置換指標が multiplicity free, すなわち G の相異なる既約指標の和であることが, このアソシエーションスキームが可換であることの必要十分条件である.

群 G の Ω への作用において, 1 点 $\alpha \in \Omega$ の安定化群を H とすれば, H の単位指標 1_H を G へ誘導した指標 1_H^G が置換群 (G, Ω) の置換指標である. 内積 $(1_H^G, 1_H^G)$ の値は $\Omega \times \Omega$ 上の G 軌道の個数に一致するから, 1_H^G が multiplicity free であれば, 1_H^G は G の相異なる $d+1$ 個の既約指標の和として

$$1_H^G = \chi_0 + \chi_1 + \dots + \chi_d \quad (2.1)$$

と書くことができる. ただし, χ_0 は G の単位指標 1_G である.

群 G の元 a について $\alpha^a = \beta$ とすると, α を β に移す G の元の全体は Ha である. すなわち $\{g \in G \mid \alpha^g = \beta\} = Ha$. このようにして, Ω と G の H による剰余類の全体 $H \backslash G$ とが 1 対 1 に対応する. この対応は G の右からの作用と可換である.

$$A_i(\alpha) = \{\beta \in \Omega \mid (\alpha, \beta) \in A_i\}$$

とおくと, $A_0(\alpha), A_1(\alpha), \dots, A_d(\alpha)$ は Ω 上の H 軌道の全体である. 一方, $H \backslash G$ 上の H 軌道はひとつの (H, H) 両側剰余類であるから, 適当に G の元 a_i を選んで

$$Ha_iH = \{g \in G \mid \alpha^g \in A_i(\alpha)\}$$

が成立するようにできる. ここで $A_0(\alpha) = \{\alpha\}$ であるから, $a_0 = 1$ としてよ

い.

$$G = Ha_0H \cup Ha_1H \cup \cdots \cup Ha_dH \quad (2.2)$$

は G の (H, H) 両側剰余類分解である. ここで, アソシエーションスキーム $(\Omega, \{A_i\}_{0 \leq i \leq d})$ が可換であれば, その指標表 P の成分を $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_d$ を使って次のように表すことができる. すなわち, $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_d$ を適当に並べかえることにより, 指標表 P の (j, i') 成分 $p_{i'}(j)$ は

$$p_{i'}(j) = \frac{1}{|H|} \sum_x \chi_j(x)$$

で与えられる. ただし, $\sum_x$ は Ha_iH の元全体をわたる和である.

なお, 置換群 (G, Ω) から得られるアソシエーションスキーム $(\Omega, \{A_i\}_{0 \leq i \leq d})$ の valency k_i は, Ω 上の H 軌道 $A_i(\alpha)$ に属する点の個数, すなわち, 置換群の subdegree にはかならない. また,

$$m_i = q_i(0)$$

は multiplicity と呼ばれ, valency と並んで基本的な意味を持つ. 置換群から得られるアソシエーションスキームについては, その multiplicity は, (2.1) に現れる G の既約指標の次数

$$m_i = \chi_i(1)$$

である.

3 $Sz(q)$ の元の $Sp_4(q)$ における共役

本節と次節では $G = Sp_4(q)$, $H = Sz(q)$, $q = 2^{2n+1}$ とする. 本節では, 置換指標 1_H^G の計算に必要な, H の元の共役類と G の元の共役類の関係をまとめておく.

$Sp_4(q)$ については, Enomoto [7] の記号をそのまま用いることにする. $\Phi = \{\pm a, \pm b, \pm(a+b), \pm(2a+b)\}$ を B_2 型ルート系とし, Φ 上の置換 $r \mapsto \bar{r}$ を次のように定義する.

$$\bar{a} = b, \quad \bar{b} = a, \quad \overline{a+b} = 2a+b, \quad \overline{2a+b} = a+b$$

また, $\lambda(r)$ を, r が短ルートのとき 1, 長ルートのとき 2 と定義する. $GF(q)$

の自己同型 $t \mapsto t^{2^n}$ を θ とおくと、各 $r \in \Phi$ と $t \in GF(q)$ に対して

$$x_r(t) \mapsto x_r(\theta(t)^{\lambda(r)})$$

で定義される $Sp_4(q)$ の位数 2 の自己同型 ψ が得られる。この自己同型 ψ による固定点全体が $S_2(q)$ である (Carter [5] の第 13 章を参照)。 $S_2(q)$ は、もともとは Zassenhaus 群の研究の過程で発見された群であるが、 $Sp_4(q)$ の部分群として見るためには、 ψ の固定点全体として考えるのがよい。

$S_2(q)$ の元の共役類は、全部で $q+3$ 個ある。それらの代表元を、Suzuki [9] に従って $1, \sigma, \rho, \rho^{-1}, \pi_0^i, \pi_1^i, \pi_2^i$ と書く。 $\sigma, \rho, \pi_0, \pi_1, \pi_2$ の位数は、それぞれ $2, 4, q-1, q+r+1, q-r+1$ である。ただし、 $r=2^{n+1}$ である。また、 $\pi_0^i, \pi_1^i, \pi_2^i$ のパラメータ i の範囲は、それぞれ ${}^2T_1, {}^4U_1, {}^4V_1$ で、これらは次のように定義されたものである。

$$\begin{aligned} T_0 &= \mathbf{Z} \bmod \{i \equiv i + (q-1)\}, & |T_0| &= q-1 \\ T_1 &= T_0 - \{0\}, & |T_1| &= q-2 \\ {}^2T_1 &= T_1 \bmod \{i \equiv -i\}, & |{}^2T_1| &= (q-2)/2 \\ U_0 &= \mathbf{Z} \bmod \{i \equiv i + (q+r+1)\}, & |U_0| &= q+r+1 \\ U_1 &= U_0 - \{0\}, & |U_1| &= q+r \\ {}^4U_1 &= U_1 \bmod \{i \equiv qi \equiv -i \equiv -qi\}, & |{}^4U_1| &= (q+r)/4 \\ V_0 &= \mathbf{Z} \bmod \{i \equiv i + (q-r+1)\}, & |V_0| &= q-r+1 \\ V_1 &= V_0 - \{0\}, & |V_1| &= q-r \\ {}^4V_1 &= V_1 \bmod \{i \equiv qi \equiv -i \equiv -qi\}, & |{}^4V_1| &= (q-r)/4 \end{aligned}$$

たとえば、 π_0^i の i は $\bmod q-1$ で 1 から $q-2$ までを動き、 π_0^i と π_0^{-i} とは共役である。

$S_2(q)$ が $Sp_4(q)$ の自己同型 ψ の固定点全体であることから、上記の $S_2(q)$ の元が $Sp_4(q)$ のどの共役類に属するかを、容易に知ることができる。結果を表 1 にまとめておく。表 1 の $Sp_4(q)$ の共役類を表す記号は、Enomoto [7] のものと同じである。

実際、 $\sigma, \rho, \rho^{-1}, \pi_0, \pi_1, \pi_2$ は、[7] の記号を使って次のように表すことができる。すなわち、

表 1

$Sz(q)$ の代表元	$Sp_4(q)$ の共役類	パラメータ
1	A_1	
σ	A_{32}	
ρ	A_{42}	
ρ^{-1}	A_{42}	
π_0^i	$B_1(2^n i, (1-2^n)i)$	$i \in {}^2T_1$
π_1^i	$B_5((q-r+1)i)$	$i \in {}^4U_1$
π_2^i	$B_5((q+r+1)i)$	$i \in {}^4V_1$

$$\sigma = x_{a+b}(1)x_{2a+b}(1)$$

$$\rho = x_a(1)x_b(1)x_{a+b}(1)$$

$$\rho^{-1} = x_a(1)x_b(1)x_{2a+b}(1)$$

$$\pi_0 = h(\gamma^\theta, \gamma^{1-\theta})$$

$$\pi_1 = h(\tau^{q-r+1}, \tau^{q(q-r+1)})$$

$$\pi_2 = h(\tau^{q+r+1}, \tau^{q(q+r+1)})$$

また,

$$S = \{x_a(\alpha^\theta)x_b(\alpha)x_{a+b}(\beta)x_{2a+b}(\alpha^{2\theta+1} + \beta^{2\theta}) | \alpha, \beta \in GF(q)\}$$

は $Sz(q)$ のシロ-2 部分群であり, $S\langle\pi_0\rangle$ は $Sz(q)$ の Borel 部分群である.

さらに, [7] の ω_a, ω_b をそれぞれ w_a, w_b と書くことにすると,

$$Sz(q) = S\langle\pi_0\rangle \cup S\langle\pi_0\rangle(w_a w_b)^2 S$$

となる.

表 1 から, 置換指標 1_H^G の値が計算できる. 共役類 $A_1, A_{32}, A_{42}, B_1(2^n i, (1-2^n)i), B_5((q-r+1)i), B_5((q+r+1)i)$ 上で, 1_H^G の値はそれぞれ $q^2(q+1)(q^2-1)$, q^2 , $2q$, $q-1$, $q-r+1$, $q+r+1$ であり, その他の共役類上では 1_H^G の値は 0 である.

なお, 1_H^G と G の既約指標の内積を計算することにより, (2.1) の分解が得られ, 特に 1_H^G が multiplicity free であることがわかる. これについては, 既に Lawther, Saxl [8] で発表されているので, 詳しいことは省略する.

4 置換指標 1_H^G の Mackey 分解

本節では, $G=Sp_4(q)$, $H=Sz(q)$, $q=2^{2n+1}$, について, H の極大部分群の分類を使うことにより, 置換指標 1_H^G の Mackey 分解が決定できることを示す. 特に, このことから G の $H \setminus G$ への右からの作用による置換群の subdegree がわかる.

記号を簡単にするため, G の元 a に対し, $H^a \cap H$ を $H(a)$ と書くことにする. ただし, $H^a = a^{-1}Ha$ である. 第3節でみたように, $(1_H^G, 1_H^G) = q+3$ であるから, 今は, (2.2) で $d=q+2$ である. Mackey の分解定理 (Curtis, Reiner [6] の (10.14) 参照. ただし, [6] では G の G/H への左からの作用を考えているため, $H(a_j)$ のところが ${}^{a_j}H \cap H$ となっていることに注意する) によれば, 置換指標 1_H^G を H に制限して得られる H の指標 $(1_H^G)_H$ は, H の部分群 $H(a_j)$ の単位指標の H への誘導指標 $(1_{H(a_j)})^H$ の和として,

$$(1_H^G)_H = \sum_{j=0}^{q+2} (1_{H(a_j)})^H \quad (4.1)$$

と表せる. ここで, $a_j, j=0, 1, \dots, q+2$ は (2.2) のもの, すなわち G の (H, H) 両側剰余類の完全代表系である.

G の元 a と H の元 x に対し, $Hax=Ha$ であることと $x \in H(a)$ であることは同値である. すなわち, G の $H \setminus G$ への右からの作用において, 1点 Ha の安定化群が $H(a)$ である. よって

$$|HaH|/|H| = |H|/|H(a)|$$

となる. 故に, $H(a_j), j=0, 1, \dots, q+2$, の位数がわかれば, G の $H \setminus G$ への右からの作用の subdegree がわかる.

置換指標 1_H^G の値は, 第3節で既知である. 以下, 本節では, $Sz(q)$ の極大部分群の分類を使って, (4.1) をみたす H の部分群 $H(a_j)$ を決定する.

$H(a_j)$ の単位指標の H への誘導指標 $(1_{H(a_j)})^H$ において, $H(a_j)$ を H の元による共役で置き換えても, 誘導指標は変化しない. よって, $H(a_j)$ を考えるときは, H の元による共役を無視することにする. さて, $\sigma, \rho, \rho^{-1}, \pi_0, \pi_1, \pi_2,$

w_a, w_b, S を, 第3節のものとしよう. Suzuki [9] の Theorem 9 により, $Sz(q)$ の極大部分群は次のいずれかと共役である.

- (1) $S\langle\pi_0\rangle$; Borel 部分群
- (2) $\langle\pi_0\rangle\langle(w_a w_b)^2\rangle \cong Z_{q-1} \rtimes Z_2$
- (3) $\langle\pi_1\rangle\langle w_a w_b\rangle \cong Z_{q+r+1} \rtimes Z_4$
- (4) $\langle\pi_2\rangle\langle w_a w_b\rangle \cong Z_{q-r+1} \rtimes Z_4$
- (5) $Sz(q')$, ただし $GF(q')$ は $GF(q)$ の部分体

ここで, π_0 の $(w_a w_b)^2$ による共役が π_0^{-1} であること, $\pi_1^{w_a w_b} = \pi_1^q$, および $\pi_2^{w_a w_b} = \pi_2^q$ であることに注意する.

(4.1) 式の両辺の $\sigma, \rho, \pi_0, \pi_1, \pi_2$ における値に注目しよう. そのためには, $H(a_j)$ の可能性として, $\sigma, \rho, \pi_0, \pi_1, \pi_2$ のうちのいずれかを含むような H の部分群すべてを考えることが必要である. ところで, π_0, π_1, π_2 の位数 $q-1, q+r+1, q-r+1$ のいずれもが $|H|$ の Hall divisor であることから, 部分群の位数による分類だけで, このような H の部分群がすべてわかる. 実際, 上記の $Sz(q)$ の極大部分群の分類から, $\sigma, \rho, \pi_0, \pi_1, \pi_2$ のいずれかを含む H の部分群は, 次のものに限る.

(I) 位数が $q-r+1$ の倍数のもの:

$$\langle\pi_2\rangle, \langle\pi_2\rangle\langle(w_a w_b)^2\rangle, \langle\pi_2\rangle\langle w_a w_b\rangle$$

(II) 位数が $q+r+1$ の倍数のもの:

$$\langle\pi_1\rangle, \langle\pi_1\rangle\langle(w_a w_b)^2\rangle, \langle\pi_1\rangle\langle w_a w_b\rangle$$

(III) 位数が $q-1$ の倍数のもの:

$$\langle\pi_0\rangle, \langle\pi_0\rangle\langle(w_a w_b)^2\rangle, S\langle\pi_0\rangle, Z(S)\langle\pi_0\rangle$$

(IV) exponent が 4 の 2 群:

$$S_{l,m}; \text{位数 } 2^{l+m} \text{ で } |\Omega_1(S_{l,m})| = 2^m \text{ であるもの. ただし, } 1 \leq l \leq m \leq 2n+1.$$

(V) exponent が 2 の 2 群:

$$R_l; \text{位数 } 2^l \text{ であるもの. ただし, } 1 \leq l \leq 2n+1.$$

次に, H の部分群 K が上の (I) から (V) までのいずれかであるとき,

その単位指標の H への誘導指標 1_K^H の値を計算する. それぞれの場合に, K の元が H のどの共役類に属するかを調べて, 1_K^H の値が次のようになることがわかる.

(I)(ア) $K=\langle\pi_2\rangle$ のとき:

$$1_K^H(x) = \begin{cases} q^2(q-1)(q+r+1); & x=1 \\ 4 & ; x=\pi_2^i, i \in {}^4V_1 \\ 0 & ; \text{その他} \end{cases}$$

(イ) $K=\langle\pi_2\rangle\langle(w_a w_b)^2\rangle$ のとき:

$$1_K^H(x) = \begin{cases} q^2(q-1)(q+r+1)/2; & x=1 \\ 2 & ; x=\pi_2^i, i \in {}^4V_1 \\ q^2/2 & ; x=\sigma \\ 0 & ; \text{その他} \end{cases}$$

(ウ) $K=\langle\pi_2\rangle\langle w_a w_b \rangle$ のとき:

$$1_K^H(x) = \begin{cases} q^2(q-1)(q+r+1)/4; & x=1 \\ 1 & ; x=\pi_2^i, i \in {}^4V_1 \\ q^2/4 & ; x=\sigma \\ q/2 & ; x=\rho, \rho^{-1} \\ 0 & ; \text{その他} \end{cases}$$

(II)(ア) $K=\langle\pi_1\rangle$ のとき:

$$1_K^H(x) = \begin{cases} q^2(q-1)(q-r+1); & x=1 \\ 4 & ; x=\pi_1^i, i \in {}^4U_1 \\ 0 & ; \text{その他} \end{cases}$$

(イ) $K=\langle\pi_1\rangle\langle(w_a w_b)^2\rangle$ のとき:

$$1_K^H(x) = \begin{cases} q^2(q-1)(q-r+1)/2; & x=1 \\ 2 & ; x=\pi_1^i, i \in {}^4U_1 \\ q^2/2 & ; x=\sigma \\ 0 & ; \text{その他} \end{cases}$$

(ウ) $K=\langle\pi_1\rangle\langle w_a w_b \rangle$ のとき:

$$1_K^H(x) = \begin{cases} q^2(q-1)(q-r+1)/4; & x=1 \\ 1 & ; x=\pi_1^i, i \in {}^4U_1 \\ q^2/4 & ; x=\sigma \\ q/2 & ; x=\rho, \rho^{-1} \\ 0 & ; \text{その他} \end{cases}$$

(III)(ア) $K=\langle\pi_0\rangle$ のとき:

$$1_K^H(x) = \begin{cases} q^2(q^2+1); & x=1 \\ 2 & ; x=\pi_0^i, i \in {}^2T_1 \\ 0 & ; \text{その他} \end{cases}$$

(イ) $K=\langle\pi_0\rangle\langle(w_a w_b)^2\rangle$ のとき:

$$1_K^H(x) = \begin{cases} q^2(q^2+1)/2; & x=1 \\ 1 & , x=\pi_0^i, i \in {}^2T_1 \\ q^2/2 & ; x=\sigma \\ 0 & ; \text{その他} \end{cases}$$

(ウ) $K=S\langle\pi_0\rangle$ のとき:

$$1_K^H(x) = \begin{cases} q^2+1; & x=1 \\ 2 & ; x=\pi_0^i, i \in {}^2T_1 \\ 1 & ; x=\sigma \\ 1 & ; x=\rho, \rho^{-1} \\ 0 & ; \text{その他} \end{cases}$$

(エ) $K=Z(S)\langle\pi_0\rangle$ のとき:

$$1_K^H(x) = \begin{cases} q(q^2+1); & x=1 \\ 2 & ; x=\pi_0^i, i \in {}^2T_1 \\ q & ; x=\sigma \\ 0 & ; \text{その他} \end{cases}$$

(IV) $K=S_{l,m}$ のとき:

$$\begin{cases} q^2(q-1)(q^2+1)/2^{l+m}; & x=1 \\ q^2(2^m-1)/2^{l+m} & ; x=\sigma \end{cases}$$

$$1_K^H(x) = \begin{cases} q(2^l-1)/2^l & ; x=\rho, \rho^{-1} \\ 0 & ; \text{その他} \end{cases}$$

(V) $K=R_l$ のとき

$$1_K^H(x) = \begin{cases} q^2(q-1)(q^2+1)/2^l & ; x=1 \\ q^2(2^l-1)/2^l & ; x=\sigma \\ 0 & ; \text{その他} \end{cases}$$

これらの値と 1_H^G の値から, (4.1) をみたま $H(a_j)$ を決めよう. G の (H, H) 両側剰余類の完全代表系 $a_j, j=0, 1, \dots, q+2$, のうち, $|H(a_j)|$ がそれぞれ $q-r+1, 2(q-r+1), 4(q-r+1)$ であるような j の個数を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, $|H(a_j)|$ がそれぞれ $q+r+1, 2(q+r+1), 4(q+r+1)$ であるような j の個数を $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, $|H(a_j)|$ がそれぞれ $q-1, 2(q-1), q^2(q-1), q(q-1)$ であるような j の個数を $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ とおく. さらに, $H(a_j)$ が $S_{l,m}$ と同型であるような j の個数を $\delta(l, m)$, $H(a_j)$ が R_l と同型であるような j の個数を $\varepsilon(l)$ とおく.

(2.2) において, $a_0=1$ であるから, $H(a_0)=H$ である. よって,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$$

$$+ \sum_{l,m} \delta(l, m) + \sum_l \varepsilon(l) \leq q+2 \quad (4.2)$$

である. H の部分群 K のうち, 1_K^H の π_2 における値が 0 でないものは, その位数が $q-r+1$ の倍数でなければならず, したがって (I) のものおよび H 自身だけである. よって, (4.1) の両辺の π_2 における値を比較して,

$$4\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 1_H^G(\pi_2) - 1_H(\pi_2) = q+r \quad (4.3)$$

を得る. 同様に, 1_K^H の π_1 における値が 0 でないような部分群 K は, (II) のものと H 自身だけであるから, (4.1) の両辺の π_1 における値を比較して,

$$4\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3 = 1_H^G(\pi_1) - 1_H(\pi_1) = q-r \quad (4.4)$$

を得る. さらに, 1_K^H の π_0 における値が 0 でないのは, K が (III) のものと H 自身の場合に限るから, (4.1) の両辺の π_0 における値より,

$$2\gamma_1 + \gamma_2 + 2\gamma_3 + 2\gamma_4 = 1_H^G(\pi_0) - 1_H(\pi_0) = q-2 \quad (4.5)$$

がわかる。特に、 γ_2 は偶数である。一方、 $K = \langle \pi_0 \rangle \langle (w_a w_b)^2 \rangle$ のときは $1_K^H(\sigma) = q^2/2$ であった。また、 $1_H^G(\sigma) = q^2$ で $1_H(\sigma) = 1$ である。よって、(4.1) の両辺の σ における値を見て、

$$\gamma_2 = 0$$

である。故に、(4.5) より

$$\gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_4 = (q-2)/2 \quad (4.6)$$

となる。 K がそれぞれ $\langle \pi_2 \rangle \langle (w_a w_b)^2 \rangle$ と $\langle \pi_2 \rangle \langle w_a w_b \rangle$ のときの 1_K^H の σ における値は、 $q^2/2$ および $q^2/4$ であった。 $1_H^G(\sigma) - 1_H(\sigma) = q^2 - 1$ であるから、(4.1) の両辺の σ における値と (4.3) より、

$$\alpha_1 = (q+r)/4, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \quad (4.7)$$

がわかる。同様に、 K がそれぞれ $\langle \pi_1 \rangle \langle (w_a w_b)^2 \rangle$ と $\langle \pi_1 \rangle \langle w_a w_b \rangle$ のときの 1_K^H の σ における値と (4.4) より、

$$\beta_1 = (q-r)/4, \quad \beta_2 = \beta_3 = 0 \quad (4.8)$$

がわかる。

ある a_j について、 $H(a_j)$ の位数が $q-r+1$ と互いに素ではないと仮定すると、 $H(a_j)$ はある $\pi_2^i, i \in {}^4V_1$ の H の元による共役を含む。なぜなら、 H の奇数位数の元の位数は、 $q-1, q+r+1, q-r+1$ のいずれかの約数であり、しかも、 $q-1, q+r+1, q-r+1$ はどの2つも互いに素だからである。このとき、 $(1_{H(a_j)})^H$ の π_2^i における値は正の整数である。ところが、 $1_H^G(\pi_2^i) - 1_H(\pi_2^i) = q+r$ であり、また $K = \langle \pi_2 \rangle$ のときには、 $1_K^H(\pi_2^i) = 4$ であった。よって、(4.7) により、上のような $H(a_j)$ は位数が $q-r+1$ のもの、すなわち $\langle \pi_2 \rangle$ と H の中で共役なものに限ることがわかる。同様に、 $H(a_j)$ のうち位数が $q+r+1$ と互いに素でないものは、 $|H(a_j)| = q+r+1$ であるもの、すなわち $\langle \pi_1 \rangle$ と H の中で共役なものに限る。さらに、任意の $i \in {}^2T_1$ について、 $1_H^G(\pi_0^i) - 1_H(\pi_0^i) = q-2$ であり、また、 K が $\langle \pi_0 \rangle, S\langle \pi_0 \rangle$ 、および $Z(S)\langle \pi_0 \rangle$ のとき、 1_K^H の π_0^i における値は2であった。よって、(4.6) により $H(a_j)$ のうち位数が $q-1$ と互いに素でないものは、 $\langle \pi_0 \rangle, S\langle \pi_0 \rangle, Z(S)\langle \pi_0 \rangle$ のいずれかと H の中で共役であることがわかる。

H の部分群で、その位数が $q-r+1, q+r+1, q-1$ のいずれとも互いに素であるものは、2 群、すなわち位数が 2 のべきの群である。このような群は、(IV) および (V) の形のものに限るから、上の考察により (4.2) において等号が成立し、(4.2) は

$$(q+r)/4 + (q-r)/4 + (q-2)/2 + \sum_{l,m} \delta(l, m) + \sum_l \varepsilon(l) = q+2$$

となる。特に、

$$\sum_{l,m} \delta(l, m) + \sum_l \varepsilon(l) = 3$$

すなわち、 $H(a_j)$ が 2 群となるような j が 3 個存在することがわかる。

ここで、直接計算することにより、

$$H(x_{2a+b}(1)) = S$$

および

$$|H(x_a(1))| = |H(x_b(1))| = 2q \text{ かつ } Hx_a(1)H \neq Hx_b(1)H$$

であることが確かめられる。よって、 $H(a_j)$ が 2 群となるような 3 個の a_j として、

$$x_{2a+b}(1), x_a(1), x_b(1)$$

がとれることがわかる。

最後に、(4.1) の両辺の次数、すなわち 1 における値、を比較して

$$\gamma_1 = (q-2)/2, \gamma_3 = \gamma_4 = 0$$

が得られる。

以上で、 $H(a_j)$ がすべてわかった。結果をまとめると、次のようになる。

$$H(a_j) = H \text{ となるもの 1 個}$$

$$H(a_j) = S \text{ となるもの 1 個}$$

$$|H(a_j)| = 2q \text{ となるもの 2 個}$$

$$|H(a_j)| = q-r+1 \text{ となるもの } (q+r)/4 \text{ 個}$$

$$|H(a_j)| = q+r+1 \text{ となるもの } (q-r)/4 \text{ 個}$$

$$|H(a_j)| = q-1 \text{ となるもの } (q-2)/2 \text{ 個}$$

文献

- [1] B. Bagchi and N. S. M. Sastry, Intersection pattern of the classical ovoids in symplectic 3-space of even order, preprint.
- [2] E. Bannai and T. Ito, "Algebraic Combinatorics I", Benjamin/Cummings, London (1984).
- [3] E. Bannai, N. Kawanaka, and S. Y. Song, The character table of the Hecke algebra $\mathcal{H}(GL_{2n}(\mathbb{F}_q), Sp_{2n}(\mathbb{F}_q))$, J. Algebra, 129 (1990), 320—366.
- [4] E. Bannai and S. Y. Song, On the character table of the association scheme $Sp(4, q)/Sz(q)$, Graphs and Combinatorics, 5 (1989), 291—293.
- [5] R. Carter, "Simple Groups of Lie Type", John Wiley & Sons, London (1972).
- [6] C. W. Curtis and I. Reiner, "Methods of Representation Theory, Vol. 1", John Wiley & Sons, London (1981).
- [7] H. Enomoto, The characters of the finite symplectic group $Sp(4, q)$, $q=2^f$, Osaka J. Math., 9 (1972), 75—94.
- [8] R. Lawther and J. Saxl, On the actions of finite groups of Lie type on the cosets of subfield subgroups and their twisted analogues, Bull. London Math. Soc., 21 (1989), 449—455.
- [9] M. Suzuki, On a class of doubly transitive groups, Annals of Math., 75 (1962), 105—145.

(一橋大学助教授)