一般化効用関数に基く主観的判断と客観的判断

大　成　節　夫

人間の行う判断の中で客観的であると言い得るものが存在し得ようか．存在し得たとしても，其の判断は如何様にして組み立てられ，また如何様な意味で客観的であると言い得るのであらうか．本小論では，一般化効用関数を用いて議論し得る範囲に於て，主観的判断と客観的判断を構成し，両者を対比させながら，Pareto 原理的内容を持つ 2 様の公理を設定し，其れ等を満たす社会的決定方式の存在を主張する．公理の設定は，リベラル・パラドックス解消の議論を念頭に置いて居る．

1　主観的判断と客観的判断

慣例通り次の如き記号を導入する．

$N=\{1,2,\cdots\cdots,n\}, n\geqq 2$：個人の集合，

$X=\{x,y,\cdots\cdots\}$：社会状態全体の作る非空集合，

$\boldsymbol{R}$：実数全体の作る集合，

$\mathfrak{U}=F(X\times N,\boldsymbol{R})$：$X\times N$ から $\boldsymbol{R}$ への写像全体の作る集合，

$\mathfrak{A}=F(N,\mathfrak{U})$：$N$ から $\mathfrak{U}$ への写像全体の作る集合．

$\mathfrak{U}$ の元を一般化効用関数と言い，$u(\cdot,\cdot)$ と記す．$\mathfrak{A}$ の元 a, N の元 i に対し $a(i)$ を $u_i^a(\cdot,\cdot)$ と記す．$i,j\in N, x\in X, a\in\mathfrak{A}$ に対し $u_i^a(x,j)$ は，個人 i が仮想的に個人 j の立場に立って社会状態 x を体験する時，個人 j が獲得するであらうと個人 i が思考する効用値である．「個人 i が個人 j の立場に立つ」と言う表現には重大且つ根本的な問題が残されて居る．此の興味ある問題に立ち入る事は現段階では避けざるを得ない．以下では簡略に $u_i^a(x,j)$ を，個人

i が個人 j の立場で x を体験して得る効用と言う事にしよう．$\mathfrak{A}$ の元 a は，社会 N の各個人に如何なる一般化効用関数を配分するかを示す写像である．

$a \in \mathfrak{A}, i, j \in N, x, y \in X$ に対し

$$u_i{}^a(x)=(u_i{}^a(x, 1), u_i{}^a(x, 2), \cdots\cdots, u_i{}^a(x, n))$$
$$R_{ij}{}^a=\{(x, y) \in X \times X ;\ u_i{}^a(x, j) \geqq u_i{}^a(y, j)\}$$

と置く．明かに

$$(1)\qquad (x, y) \in \bigcap_{j \in N} R_{ij}{}^a \Leftrightarrow u_i{}^a(x) \geqq u_i{}^a(y)$$
$$\Leftrightarrow\ u_i{}^a(x, j) \geqq u_i{}^a(y, j) \text{ for all } j \in N$$

である．(1) の意味する所は，個人 i が順次 N に属す各メンバーの立場に立って，x と y を体験比較した時，x を体験した場合の効用は，y を体験した場合の効用を常に下回らないと言う内容である．注意す可きは，個人 i が個人 j の立場で x と y を体験比較するとは言へ，個人 i の主観に基づく効用を比較するのであるから，個人 i が (1) の示す判断を行う時，其処には何等客観性は認められない事である．そこで a と i で定まる X 上の 2 項関係 $\bigcap_{j \in N} R_{ij}{}^a$ を「a で定まる i の直接的主観的判断」と呼称する．混乱が生ぜぬ場合は a と i を略して「直接的主観的判断」と呼ぶ．此れは反射性，推移性は有して居るものの，連結性を欠いて居る．「直接的主観的判断」の「直接的」の持つ意味は，次に示す「間接的主観的判断」と対比する為である．

若干の準備をする．$\boldsymbol{R}^n$ の元

$$(2)\qquad (\xi(1), \xi(2), \cdots\cdots, \xi(n))$$

に対し

$$\xi(i_{\nu,1})=\xi(i_{\nu,2})=\cdots\cdots=\xi(i_{\nu,r_\nu}),\ \nu=1, 2, \cdots\cdots, p,$$
$$\xi(i_{\nu,r_\nu})<\xi(i_{\nu+1,1}),\quad \nu=1, 2, \cdots\cdots, p-1,$$
$$1 \leqq i_{\nu,1}<i_{\nu,2}<\cdots\cdots<i_{\nu,r_\nu} \leqq n,\quad \nu=1, 2, \cdots\cdots, p,$$
$$r_1, r_2, \cdots\cdots, r_p \geqq 1,\quad r_1+r_2+\cdots\cdots+r_p=n$$

で定まる $\boldsymbol{R}^n$ の元

$$(3)\qquad (\xi(i_{1,1}), \xi(i_{1,2}), \cdots\cdots, \xi(i_{1,r_1}), \xi(i_{2,1}), \xi(i_{2,2}), \cdots\cdots, \xi(i_{2,r_2}),$$
$$\cdots\cdots, \xi(i_{p,1}), \xi(i_{p,2}), \cdots\cdots, \xi(i_{p,r_p}))$$

を対応させる $\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^n$ への写像を Θ_c と記す．全く同様に (2) の転置に (3) の転置を対応させる写像を Θ_r と定義する．n 次実正方行列

$$V=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}=(v^1, v^2, \cdots\cdots, v^n)$$

に対しても

$$\Theta_c(V)=\begin{bmatrix} \Theta_c(v_1) \\ \Theta_c(v_2) \\ \vdots \\ \Theta_c(v_n) \end{bmatrix}, \quad \Theta_r(V)=(\Theta_r(v^1), \Theta_r(v^2), \cdots\cdots, \Theta_r(v^n))$$

を以って定義とする．V の第 i 行が v_i，第 j 列が v^j である．

$a \in \mathfrak{A}$ と $i \in N$ で定まる X 上の 2 項関数

$$\Phi_i{}^a=\{(x, y) \in X \times X\,;\ \Theta_c(u_i{}^a(x)) \geqq \Theta_c(u_i{}^a(y))\}$$

を「a で定まる i の間接的主観的判断」或は簡略に「間接的主観的判断」と称する．間接的主観的判断も，反射性，推移性は持つが，連結性を欠いて居る．

直接的主観的判断と間接的主観的判断の間には

(4) $$\bigcap_{j \in N} R_{ij}{}^a \subset \Phi_i{}^a \text{ for } {}^\forall i \in N, {}^\forall a \in \mathfrak{A}$$

なる関係が在る．証明は本論末補項で行はれる．

続いて $a \in \mathfrak{A}$ で定まる個人 i の Leximin 的主観的判断 $\tilde{\Phi}_i{}^a$ を導入する．即ち所謂 Leximin 順序を (L) で表す時

$$\tilde{\Phi}_i{}^a=\{(x, y) \in X \times X\,;\ \Theta_c(u_i{}^a(x)) \underset{(L)}{\geqq} \Theta_c(u_i{}^a(y))\}$$

である．明かに

$$\Phi_i{}^a \subset \tilde{\Phi}_i{}^a, \text{ for } {}^\forall i \in N, {}^\forall a \in \mathfrak{A}$$

が成立する．Leximin 的主観的判断は，反射性，連結性，推移性を持つ順序である．以上で個人 i が x と y を比較判断する際に，個人 i の主観的情報源 $u_i{}^a(x, j), u_i{}^a(y, j), j \in N$ を用いて行はれる 3 種の主観的判断を定義した．

次いで $j \in N, x, y \in X$ に対し

$$u^a(x,j)=\begin{bmatrix} u_1{}^a(x,j) \\ u_2{}^a(x,j) \\ \vdots \\ u_n{}^a(x,j) \end{bmatrix}, \qquad u^a(y,j)=\begin{bmatrix} u_1{}^a(y,j) \\ u_2{}^a(y,j) \\ \vdots \\ u_n{}^a(y,j) \end{bmatrix}$$

を情報源とする個人 j の判断を考へる．個人 j は，他者である個人 $k(=1, 2, \cdots\cdots, j-1, j+1 \cdots\cdots, n)$ から，夫々 k が j の立場に立ち x と y を体験する時の効用を k からの報告として受け取り，其れに j 自身の主観 $u_j{}^a(x,j), u_j{}^a(y,j)$ を付加して $u^a(x,j), u^a(y,j)$ を組み立てる．此処で

$$u_k{}^a(x,j), u_k{}^a(y,j), \quad k=1, 2, \cdots\cdots, j-1, j+1, \cdots\cdots, n$$

は，個人 j の主観とは全く無関係なデータである．そこで

$$\bigcap_{i \in N} R_{ij}{}^a$$

を個人 j の直接的客観的判断と呼ぼう．前と同様に

$$\Psi_j{}^a=\{(x,y) \in X \times X\,;\ \Theta_r(u^a(x,j)) \geqq \Theta_r(u^a(y,j))\},$$

$$\tilde{\Psi}_j{}^a=\{(x,y) \in X \times X\,;\ \Theta_r(u^a(x,j)) \underset{(L)}{\geqq} \Theta_r(u^a(y,j))\}$$

と定め，夫々間接的客観的判断，Leximin 的客観的判断と言う．

$$\bigcap_{i \in N} R_{ij}{}^a \subset \Psi_j{}^a \subset \tilde{\Psi}_j{}^a, \text{ for } {}^\forall j \in N, {}^\forall a \in \mathfrak{A}$$

が成立する事も従前通りである．

最後に主観的判断と客観的判断の関係として，任意の $a \in \mathfrak{A}$ に対して

$$\bigcap_{i \in N} \Phi_i{}^a \not\subset \bigcap_{j \in N} \Psi_j{}^a, \qquad \bigcap_{j \in N} \Psi_j{}^a \not\subset \bigcap_{i \in N} \Phi_i{}^a$$

が成立する事を指摘して置く．

2　斉一な社会に於ける選択関数の構成

慣例通り次の記号を導入する．

$\mathfrak{S}(X)=\{S, T, \cdots\cdots\}$: X の非空有限部分集合全体の作る集合，

$\mathfrak{C}(\mathfrak{S}(X))$: $\mathfrak{S}(X)$ 上の選択関数全体の作る集合，

$F: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}(\mathfrak{S}(X))$: collective choice rule.

$a \in \mathfrak{A}, S \in \mathfrak{S}(X)$ に対し $F(a)(S)=C^a(S)$ と記す．

社会Nに属する総てのメンバーが間接的主観的判断を行う事を前提に，$\mathfrak{A}$の元aが与へられた時，aに対し然る可き選択関数$C^a(\cdot)$を構成し，つまりaに対し$C^a(\cdot)$を対応させる collective choice rule Fを構成し，此のFが後に述べる Pareto 原理を満たす様に定め得る事を示すのが本項の目的である．

collective choice rule Fが間接的主観的判断に関して Pareto 原理を満たすとは，任意の$a \in \mathfrak{A}$に対し

$$(x, y) \in (\bigcap_{i \in N} \Phi_i{}^a) \cap (\bigcup_{i \in N} P(\Phi_i{}^a)), \quad x \in S \in \mathfrak{S}(X)$$

なる総てのx, y, Sに対して常に$y \notin C^a(S)$（但し$C^a(\cdot)=F(a)$）が成立する事を言う．

以下，此の間接的主観的判断に関する Pareto 原理を満たすFを，実際に構成しよう．任意の$a \in \mathfrak{A}$に対して

$$R_0{}^a = \{(x, y) \in X \times X\,;\ (y, x) \notin (\bigcap_{i \in N} \Phi_i{}^a) \cap (\bigcup_{i \in N} P(\Phi_i{}^a))\}$$

と置く．$R_0{}^a$が反射性を持つ事は自明．$(x, y) \notin R_0{}^a$且つ$(x, y) \notin R_0{}^a$を満たす$x, y \in X$が存在すると仮定すれば，

$$(y, x), (x, y) \in \bigcap_{i \in N} \Phi_i{}^a, \quad i.e. \quad \Theta_c(u_i{}^a(x)) = \Theta_c(u_i{}^a(y)) \text{ for } {}^\forall i \in N$$

を得る．従って

$$(y, x), (x, y) \notin \bigcup_{i \in N} P(\Phi_i{}^a)$$

となり矛盾が生起する．従って$R_0{}^a$は連結性を持つのである．|

次に

$$(5) \qquad P(R_0{}^a) = (\bigcap_{i \in N} \Phi_i{}^a) \cap (\bigcup_{i \in N} P(\Phi_i{}^a))$$

の成立を確認する．$(x, y) \in P(R_0{}^a) \Rightarrow (y, x) \notin R_0{}^a \Rightarrow (x, y) \in$［(5) の右辺]．他方$(x, y) \in$［(5) の右辺］にも拘らず$(x, y) \notin P(R_0{}^a)$と仮定すると

$$(x, y) \notin R_0{}^a \quad \text{or} \quad (y, x) \in R_0{}^a.$$

仮定より後者が成立する事は無いから，前者が成立するが，然らば$(x, y) \in$［(5) の右辺］となり，$(x, y), (y, x)$が共々［(5) の右辺］に属する事になる．併し$R_0{}^a$の連結性の証明に見た様に，此の事は吾人を矛盾に誘導する．此れ

で (5) の成立を確認した．

さて (5) を用いて $R_0{}^a$ の準推移性を導く．$(x,y),(y,x)\in P(R_0{}^a)$ とすると $(x,y),(y,z)\in\bigcap\Phi_i{}^a$ であるから，$(x,z)\in\bigcap\Phi_i{}^a$ であり，また $(x,y)\in P(\Phi_{i_0}{}^a)$ となる $i_0\in N$ をとると $(x,y)\in\Phi_{i_0}{}^a$ であるから $(x,z)\in P(\Phi_{i_0}{}^a)$ となるので，$(x,z)\in$［(5) の右辺］を得る．従って $R_0{}^a$ は準推移性，従って非循環性を持つ．そこで任意の $S\in\mathfrak{S}(X)$ に対し

(6)　$$C^a(S)=\{x\in S\,;\,(x,y)\in R_0{}^a \text{ for } {}^\forall y\in S\}$$

と置くと $C^a(\cdot)$ は $\mathfrak{C}(\mathfrak{S}(X))$ に属す事になるのである．最初に与えた $a\in\mathfrak{A}$ に対し (6) で定義される $C^a(\cdot)$ を対応付ける $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{C}(\mathfrak{S}(X))$ への写像を F と定めれば，此の F が以下に示す様に間接的主観的判断に関する Pareto 原理を満たすのである．もし

$$(x,y)\in(\bigcap_{i\in N}\Phi_i{}^a)\cap(\bigcup_{i\in N}P(\Phi_i{}^a)),\quad x\in S\in\mathfrak{S}(X),\quad y\in C^a(S)$$

を満たす x,y,S が存在したと仮定しよう．定義より $(x,y)\in(\bigcap\Phi_i{}^a)\cap(\bigcup P(\Phi_i{}^a))$ となり明白な矛盾が生起する事となる．従って上記 F は所要の Pareto 原理を満足せざるを得ない．

以上の議論は各個人が全員間接的主観的判断を行うものとして展開されたが，全員が間接的客観的判断を行うものとしても議論は全く平行的である．此処では繰り返さない．併し，N の中に間接的主観的判断を行う個人 $i_1,i_2,\cdots\cdots,i_r$ $(1\leqq i_1<i_2<\cdots\cdots<i_r\leqq n)$ と間接的客観的判断を行う個人 $j_1,j_2,\cdots\cdots,j_s(1\leqq j_1<j_2<\cdots\cdots<j_s\leqq n,\ r+s=n)$ が混在して居る場合，$(\bigcap\Phi_i{}^a)\cap(\bigcup P(\Phi_i{}^a)$ を

$$\{(\bigcap_{1\leqq\mu\leqq r}\Phi_{i_\mu}{}^a)\cap(\bigcap_{1\leqq\nu\leqq s}\Psi_{j_\nu}{}^a)\}\cap\{(\bigcup_{1\leqq\mu\leqq s}P(\Phi_{i_\mu}{}^a))\cup(\bigcup_{1\leqq\nu\leqq s}P(\Psi_{j_\nu}{}^b))\}$$

に置き換へて平行的な議論を行っても直ちに（例へば連結性の確認に於て）失敗に陥るのである．此の意味で，本項で用いた F の構成法は，社会が斉一である場合，即ち社会を構成する各個人が全員主観的判断を行うか，或は客観的判断を行うかの点で一様である場合に有効である事に留意す可きである．

3　coherent な権利系の導入と主結果

A. K. Sen に依って確定された liberal paradox は，Pareto 原理と自由主義的権利の尊重との間に発生する紛争を，より高い立場から解消する社会的決定メカニズムの非存在性を主張する点に，其の顕著な特性が在る．A. Gibbard や K. Suzumura 達の此の Paradox 解消の為の努力は，本小論で扱って来た意味での斉一な社会では，どの様な作動形式をとるであろうか．冒頭でも触れた様に，一般化効用関数のみを基本概念とし形造られる範囲内で作業を試みたい．其の為には先ず以って権利系の導入から開始する必要が在る．

N に属する各個人 i に，非空，対称，非対角的権利域 $D_i(\subset X\times X)$ が付与されて居るものとする．社会 N の権利系 $D=(D_1, D_2, \cdots\cdots, D_n)$ は coherent であるものと仮定しよう．即ち D の中には如何なる critical loop も存在せぬものと仮定するのである．以上の準備の基に 2 つの公理を導入しよう．

［公理 I］　総ての個人が間接的主観的判断のみに従って社会状態 x と y を比較する時，彼等が一斉に y を拒否する場合には，社会的にも y を拒否するメカニズムが存在する．正確に表現するなら，任意の $a\in\mathfrak{A}$ に対して

$$(x, y)\in\bigcap_{i\in N}P(\Phi_i{}^a),\quad x\in S\in\mathfrak{S}(X)$$

なる総ての x, y, S に就いて，常に $y\notin C^a(S)$ を満たす collective choice rule F が存在する．但し $F(a)$ を $C^a(\cdot)$ と記した．∎

［公理 II］　総ての個人が Leximin 的主観的判断に従って社会状態 x と y を比較する時，彼等が一斉に x は y に劣る事はないと判定して居る上に更に加へて，(x, y) を其の権利域内に持つ少なくとも 1 人の個人が，間接的主観的判断で y を拒否するなら，社会的にも y を拒否するメカニズムが存在する．正確に表現するなら，任意の $a\in\mathfrak{A}$ に対して或る $i\in N$ が存在して

$$(x, y)\in[D_i\cap P(\Phi_i{}^a)]\cap(\bigcap_{j\in N}\tilde{\Phi}_j{}^a),\quad x\in S\in\mathfrak{S}(X)$$

なる総ての x, y, S に対し常に $y\notin C^a(S)$ を満たす collective choice rule F が存在する．但し $F(a)=C^a(\cdot)$ と記した．∎

上記2つの公理に於て主観的判断を総て客観的判断に置き換へ, $\Phi_i{}^a, \tilde{\Phi}_i{}^a$ を $\Psi_i{}^a, \tilde{\Psi}_i{}^a$ に置き換へて公理を述べ直した上で, 以下の議論を全く平行的に行う事が出来る. また前項の場合と同様に, 主観的判断を行う個人と客観的判断を行う個人が混在して居る場合には, 以下で展開する議論は全く無力になる事に留意す可きである.

さて本小論の主結果を述べる段階となった.

[定理]　公理Ⅰ, Ⅱを同時に満たす collective choice rule が存在する. ▮

此の結果の証明は項を改めて行う事とする.

4　定理の証明

与へられた権利系 $D=(D_1, D_2, \cdots\cdots, D_n)$ は coherent であるから, 任意の $a\in\mathfrak{A}$ に対して

$$\bigcap_{k\in N}(D_k\cap\Phi_k{}^a)$$

の順序拡張 Q^a が存在する. 即ち

$$\bigcup_{k\in N}(D_k\cap\Phi_k{}^a)\subset Q^a,\quad P(\bigcup_{k\in N}(D_k\cap\Phi_k{}^a))\subset P(Q^a)$$

であって, Q^a は反射性, 連結性, 推移性を持つ X 上の2項関係である. 此れを用いて

$$R^a=\{(x,y)\in X\times X\,;\,(x,y)\notin[\bigcap_{k\in N}P(\Phi_k{}^a)]\cup[P(Q^a)\cap(\bigcap_{k\in N}\tilde{\Phi}_i{}^a)]\}$$

と置く. R^a が反射性, 連結性, 非循環性を持つ事を示したい. 反射性に就いては自明である. 連結性に就いては

$$(x,y)\notin R^a\quad\&\quad(y,x)\notin R^a$$

を満たす $x, y\in X$ が存在したと仮定せよ. R^a の定義より次の4通りの場合が生起する.

(i)　$(y,x)\in\bigcap_{k\in N}P(\tilde{\Phi}_k{}^a)\quad\&\quad(x,y)\in\bigcap_{k\in N}P(\tilde{\Phi}_k{}^a)$,

(ii)　$(y,x)\in\bigcap_{k\in N}P(\tilde{\Phi}_k{}^a)\quad\&\quad(x,y)\in P(Q^a)\cap(\bigcap_{k\in N}\tilde{\Phi}_k{}^a)$,

(iii)　$(y,x)\in P(Q^a)\cap(\bigcap_{k\in N}\tilde{\Phi}_k{}^a)\quad\&\quad(x,y)\in\bigcap_{k\in N}P(\Phi_k{}^a)$, (iv)　$(y, x)\in P(Q^a)\cap(\bigcap_{k\in N}\tilde{\Phi}_k{}^a)$　&　$(x, y)\in P(Q^a)\cap(\bigcap_{k\in N}\tilde{\Phi}_k{}^a)$.

明かに (i), (iv) の場合は矛盾を含んで居り，考察の対象外にして良い．(ii) の場合を考へよう．先ず

(7)
$$\bigcap_{k\in N}P(\tilde{\Phi}_k{}^a)\subset P(\bigcap_{k\in N}\tilde{\Phi}_k{}^a)$$

の成立を確認しよう．$(x, y)\in\bigcap P(\tilde{\Phi}_k{}^a)\Rightarrow[(x, y)\in\tilde{\Phi}_k{}^a\ \&\ (y, x)\notin\tilde{\Phi}_k{}^a]$ for $\forall k\in N\Rightarrow[(x, y)\in\bigcap\tilde{\Phi}_k{}^a\ \&\ (y, x)\notin\bigcup\tilde{\Phi}_k{}^a]$．併しながら $\bigcup\tilde{\Phi}_k{}^a\supset\bigcap\tilde{\Phi}_k{}^a$ だから $(x, y)\in P(\bigcap\tilde{\Phi}_k{}^a)$ を得るのである．これで (7) が確認された．そこで (ii) と (7) から

$$(x, y)\in P(\bigcap_{k\in N}\tilde{\Phi}_k{}^a),\ (x, y)\in\bigcap_{k\in N}\tilde{\Phi}_k{}^a$$

が同時に成立する事になり，吾人は矛盾に逢着したのである．全く同様の手続きを経て，(iii) の成立を仮定すると，矛盾に陥らざるを得ないのであるから，結局我々は R^a が連結性を持つ事を証明し得たわけである．

次のステップとして R^a の非循環性の験証をする必要があるが，其の前に其の準備として

(8)
$$P(R^a)=[\bigcap_{k\in N}P(\tilde{\Phi}_k{}^a)]\cup[P(Q^a)\cap(\bigcap_{k\in N}\tilde{\Phi}_k{}^a)]$$

が成立する事を証明して置こう．$(x, y)\in P(R^a)\Rightarrow(y, x)\notin R^a\Rightarrow(x, y)\in$[(8) の右辺]．従って [(8) の左辺]$\subset$[(8) の右辺] が示された．次に

(9)　$(x, y)\in$[(8) の右辺]　&　$(x, y)\notin$[(8) の左辺]

を満たす $x, y\in X$ が存在したと仮定すると，[(9) の第2式] $\Rightarrow[(x, y)\notin R^a$ or $(y, x)\in R^a]\Rightarrow$($R^a$ の連結性に依り) $[(y, x)\in R^a]\Rightarrow(x, y)\notin$[(8) の右辺]．此れは (9) の第1式に違反するのである．従って [(8) の左辺]$\supset$[(8) の右辺] が示された事になり，従って (8) の成立が確認された．

(8) を用いて R^a の準推移性を導くのが次のステップである．今 $(x, y), (y, z)\in P(R^a)$ とせよ．(8) に依り次の4通りの場合が生起する．

(v)　$(x, y)\in\bigcap_{k\in N}P(\tilde{\Phi}_k{}^a)$　&　$(y, z)\in\bigcap_{k\in N}P(\tilde{\Phi}_k{}^a)$,

(vi)　$(x, y)\in\bigcap_{k\in N}P(\tilde{\Phi}_k{}^a)$　&　$(y, z)\in P(Q^a)\cap(\bigcap_{k\in N}\tilde{\Phi}_k{}^a)$, (vii)　$(x, y) \in P(Q^a) \cap (\bigcap_{k \in N} \tilde{\Phi}_k{}^a)$　&　$(y, z) \in \bigcap_{k \in N} P(\tilde{\Phi}_k{}^a)$,

(viii)　$(x, y) \in P(Q^a) \cap (\bigcap_{k \in N} \tilde{\Phi}_k{}^a)$　&　$(y, z) \in P(Q^a) \cap (\bigcap_{k \in N} \tilde{\Phi}_k{}^a)$.

$P(\tilde{\Phi}_k{}^a), P(Q^a), \tilde{\Phi}_k{}^a$ の持つ推移性より，(v) の場合は $(x, y) \in \bigcap P(\tilde{\Phi}_k{}^a)$ を，(viii) の場合は $(x, z) \in P(Q^a) \cap (\bigcap \tilde{\Phi}_k{}^a)$ を得て，何れの場合も (8) より $(x, z) \in P(R^a)$ となる．次に (vi) の場合を考へる．任意の $k \in N$ に対して

$$(x, y) \in P(\tilde{\Phi}_k{}^a) \subset \tilde{\Phi}_k{}^a \quad \& \quad (y, z) \in \tilde{\Phi}_k{}^a$$

より $(x, z) \in \bigcap \tilde{\Phi}_k{}^a$ を得る．もし或る $k \in N$ に対して $(z, x) \in \tilde{\Phi}_k{}^a$ が成立したとすれば，$(y, z) \in \tilde{\Phi}_k{}^a$ より $(y, x) \in \tilde{\Phi}_k{}^a$ となる．併し仮定より $(x, y) \in P(\tilde{\Phi}_k{}^a)$ であるから吾人は矛盾に到着した．故に総ての $k \in N$ に対して $(z, x) \notin \tilde{\Phi}_k{}^a$ である．即ち $\tilde{\Phi}_k{}^a$ の連結性により，総ての $k \in N$ に対し $(x, z) \in P(\tilde{\Phi}_k{}^a)$ 即ち $(x, z) \in \bigcap P(\tilde{\Phi}_k{}^a) \subset P(R^a)$ を得た．(vii) の場合も全く同様にして $(x, z) \in P(R^a)$ を得るのである．これで R^a が準推移性を，従って非循環性を持つ事を知った．

そこで任意の $S \in \mathfrak{S}(X)$ に対して

$$C^a(S) = \{x \in S : (x, y) \in R^a \text{ for } {}^\forall y \in S\}$$

を以って $C^a(\cdot) \in \mathfrak{C}(\mathfrak{S}(X))$ を定義する事が可能となる．従って

$$F : \mathfrak{A} \in a \longmapsto C^a(\cdot) \in \mathfrak{C}(\mathfrak{S}(X))$$

と collective choice rule F を定義しよう．此のFが前項の2つの公理を満たすのである．

先ず最初に［公理 I］を満たす事を示そう．

(10)　$$(x, y) \in \bigcap_{k \in N} P(\tilde{\Phi}_k{}^a, x \in S \in \mathfrak{S}(X), \quad y \in C^a(S)$$

を満たす $a \in \mathfrak{A}, x, y \in X, S \in \mathfrak{S}(X)$ が存在したと仮定しよう．$(y, x) \in R^a$ であるから

$$(x, z) \notin [\bigcap_{k \in N} P(\tilde{\Phi}_k{}^a)] \cup [P(Q^a) \cap (\bigcap_{k \in N} \tilde{\Phi}_k{}^a]$$

となり此れは (10) の第一式と矛盾する．従って先のFは［公理 I］を満足せねばならない．

次にFが［公理II］を満たす事を示す.

(11)　$(x, y) \in [D_i \cap P(\Phi_i{}^a)] \cap (\bigcap_{k \in N} \tilde{\Phi}_k{}^a), \quad x \in S \in (\mathfrak{S}X), \quad y \in C^a(S)$

を満たす $a \in \mathfrak{A}, i \in N, x, y \in X, S$ が存在したと仮定せよ. (11) の第一式より $(x, y) \in \bigcup(D_k \cap P(\Phi_k{}^a))$ であるが, もし $(y, x) \in \bigcup(D_k \cap P(\Phi_k{}^a))$ と仮定すると或る $k_0 \in N$ が存在して $(y, x) \in D_{k_0} \cap P(\Phi_{k_0}{}^a) \subset \Phi_{k_0}{}^a$ が成立する事になるが, 此処でもし $k_0 = i$ なら $(x, y) \in P(\Phi_k{}^a), (y, x) \in \Phi_k{}^a$ となり矛盾に陥る. 従って $k_0 \neq i$ である. すると

$$(x, y,) \in D_i, (y, x) \in D_{k_0}, i \neq k_0$$

となるから $\{(x, y), (y, x)\}$ が権利系Dの critical loop となり, Dが coherent である事に違反する. 故に

(12)　$(x, y) \in P(\bigcup_{k \in N}(D_k \cap \Phi_k{}^a)) \subset P(Q^a)$

を得るのである. (11) と (12) より

(13)　$(x, y) \in P(Q^a) \cap (\bigcap_{k \in N} \tilde{\Phi}_k{}^a)$

を得る. 併し (11) の第2, 3式より $(x, y) \in R^a$. 従って $(x, y) \notin [\bigcap P(\tilde{\Phi}_k{}^a)] \cup [P(Q^a) \cap (\bigcap \tilde{\Phi}_k{}^a)]$ を得るが, 此れは (13) 式と矛盾する. 従って先のFは［公理II］を満足せざるを得ない. これで前項の定理の証明が完了する.

5　補項. (4) 式の証明

(14)　$(x, y \in \bigcap_{j \in N} R_{ij}{}^a \quad \& \quad (x, y) \notin \Phi_i{}^a$

を満たす $x, y \in X$ が存在したと仮定せよ. (14) の第一式の成立は $u^a(x, j) \geqq u_i{}^a(y, j)$ for $\forall j \in N$ 即ち $u_i{}^a(x) \geqq u_i{}^a(y)$ の成立を意味して居る. 他方 (14) の第二式は $\Theta_c(u_i{}^a(x)) \ngeqq \Theta_c(u_i{}^a(y))$ を意味するのであるから

$$\Theta_c(u_i{}^a(x)) = (u_i{}^a(x, j_1), u_i{}^a(x, j_2), \cdots\cdots, u_i{}^a(x, j_n))$$
$$\Theta_c(u_i{}^a(y)) = (u_i{}^a(y, k_1), u_i{}^a(y, k_2), \cdots\cdots, u_i{}^a(y, k_n))$$

と置くと或る $p \in N$ が存在して $u_i{}^a(x, j_p) < u_i{}^a(y, k_p)$ が成立する事になる. 従って Θ_c の定義より

$$u_i{}^a(x, j_1) \leqq u_i{}^a(x, j_2) \leqq \cdots\cdots \leqq u_i{}^a(x, j_p) < u_i{}^a(y, k_p) \leqq u_i{}^a(y, k_{p+1}) \leqq \cdots\cdots \leqq u_i{}^a(y, k_n)$$

を得る．従って

$$u_i{}^a(y, l) \leqq u_i{}^a(x, l) \text{ for } {}^\forall l = k_{p+1}, k_{p+2}, \cdots\cdots, k_n$$

より

$$u_i{}^a(x, j_1) \leqq u_i{}^a(x, j_2) \leqq \cdots\cdots \leqq u_i{}^a(x, j_p) < u_i{}^a(x, l) \text{ for } {}^\forall l = k_{p+1}, k_{p+2}, \cdots\cdots, k_n$$

となる．故に $\{j_1, k_2, \cdots\cdots, j_p\} \cap \{k_{p+1}, k_{p+2}, \cdots\cdots, k_n\} = \phi$ 即ち $\{j_1, j_2, \cdots\cdots, j_p\} \subset \{k_{p+1}, k_{p+2}, \cdots\cdots, k_n\}^c = \{k_1, k_2, \cdots\cdots, k_p\}$ を得る．従って $\{j_1, j_2, \cdots\cdots, j_p\} = \{k_1, k_2, \cdots\cdots, k_p\}$ でなければならない．そこで $k_p = j_r, 1 \leqq r \leqq p$ と r を定めれば

$$\cdots\cdots \leqq u_i{}^a(x, j_r) \leqq \cdots\cdots \leqq u_i{}^a(x, j_p) < u_i{}^a(y, k_p) \leqq u_i{}^a(x, k_p)$$

から $u_i{}^a(x, j_r) < u_i{}^a(x, k_p), j_r = k_p$ となり矛盾に到達する．従って (14) は成立し得ない．即ち (4) 式が成立するのである．

（一橋大学教授）