形状母数の推定

三　浦　良　造

1　はじめに

モダンポートフォリオ理論は，資本資産評価理論（CAPM）・裁定価格理論（APT）そしてオプション価格理論に支えられて体系が大きく成長した．議論の視点の明確さと方法の汎用性のために実務世界にも受け入れられ，これらの理論を下地においた新しい金融商品も開発された．とくにオプション価格理論は米国において株式オプション，指数先物，指数（先物）オプションなどの新しい金融商品の上場と共に発展した観がある．このオプション価格理論の現在までの特徴は“規範性”にあるといえよう．今後の研究における重要な進展の方向は現実をよく説明する“描写性”を高めることにある．このための1つの大きな問題は，理論の仮定として設定した株価収益率の確率分布の対数正規性，そして確率過程としての対数正規性を現実的なものにおきかえることである．この問題に対しては価格データにもとづき条件付分布を調べその上でオプション価格を導く研究，また混合正規分布を導入する方法などが試みられている．この他に，古くからの試みであるが，株価収益率や他の金融データの確率分布の形が正規分布より少し裾が太いため，その形状，とくに裾の太さを調べて議論の展開の基礎にしようという研究方向がある（DuMouchel (1983) [4] を参照せよ）．本稿では，一般に裾の太さ又は分布の端点における形状を示す母数をデータにもとづいて推定するための推定量としてすでに考案されているものについて簡単に触れ，さらに著者が考案したものを2つ紹介し，それらが漸近的一致性をもつことを証明する．

安定分布は広範囲の分布形を含む族をなす．ここでは分布の裾の太さについての推論を問題としている．確率変数Yが指数βの安定分布に従うならば，$y\to\infty$ のとき

$$P\{|Y|>y\}\sim cy^{-\beta}$$

である．ただしcは定数である．問題をこのまま扱ってもよいが他の応用も含め，表現を簡単にするために，$x\to 0$ のとき

$$P\{1/|Y|<x\}=P\left\{|Y|>\frac{1}{x}\right\}$$
$$\sim c\cdot x^{\beta}$$

であることを利用して，問題設定をつぎのようにする．確率変数Xが半直線$(0, \infty)$ 上に分布し，X の分布関数を $F(\cdot)$ と書くとき，$x\to 0$ のとき

$$F(x)=P\{X<x\}$$
$$=c\cdot x^{\beta}$$

であるとする．

この設定に含まれるパラメトリックな分布にはワイブル (Weibull) 分布，パレト (Pareto) 分布がある．従って本稿で扱う推定量はこれらのパラメトリックな分布が設定される場合にも用い得るものである．

$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ を独立で，同一分布 $F(x)(=c\cdot x^{\beta}, x\to 0)$ に従う確率変数とする．順序統計量を

$$X_{(1)}\leqq X_{(2)}\leqq\cdots\cdots\leqq X_{(n)}$$

と書くことにする．De Haan and Resnick (1980, [3]) はβの推定として

$$\hat{\beta}_1=\left[\frac{1}{\log k}\{\log X_{(k)}-\log X_{(1)}\}\right]^{-1}$$

と定義し，$n\to\infty$ のときの推定誤差

$$(\log k)\cdot(\beta/\hat{\beta}_1-1)$$

の分布が分布関数 $\exp(-e^{-x})$ で表わされることを示した．そこでは，$k\equiv k(n)=\log n$ であった．第3節で紹介する，著者による推定量の1つはこの $\hat{\beta}_1$ に形の上ではよく似ているが少し改良されたものである．

Hill (1975, [8]) は，分布形の全体をパラメトライズできないとき観測値の一部分がある一定値より小さいという条件のもとでゼロの近くの分布の形状母数を推定するという設定で条件付最尤推定として β の推定量

$$\hat{\beta}_2=\left\{\log X_{(r+1)}-\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\log X_{(i)}\right\}^{-1}$$

を導いた．Hall (1982, [5]) と Hall and Welsh (1984, [6], 1985, [7]) は一連の論文のなかで，$F(x)=c\cdot x^\beta[1+D\cdot x^\gamma+0(x^\gamma)]$ という設定のもとで，Hill が導いた（上の）$\hat{\beta}_2$ の，$n\to\infty$ のときの，収束の速さが $n^{-p/(2p+1)}$ であること（ただし $p=\gamma/\beta$ である），さらに最適な r の値が $n^{2\gamma/(2\gamma+\beta)}(\equiv n^{2p/(2p+1)})$ であることなど精密な結論を示した．Hill の推定 $\hat{\beta}_2$ は DeHaan 達の推定 $\hat{\beta}_1$ よりも精度が高く，Hall の設定においては最適な推定である．それにもかかわらず本稿において新しく推定量を考案し紹介するのは，$F(x)=c\cdot x^\beta$, $(x\to 0)$ という設定のもとで推定量の計算に含まれる $(1/r)\sum_{i=1}^{r}\log X_{(i)}$ を１つの順序統計量におきかえられないかという視点を著者がもつからである．第３節で紹介する推定量は精度は $\hat{\beta}_2$ に劣るかも知れないが，$\hat{\beta}_1$ の改良になっている注)．

このような分布の端点における形状の推定は位置母数推定問題においても重要であることをつけ加えておく．位置母数の最尤推定を構成する際に形状母数の値が必要である (Boente and Freiman (1988) [1], Woodroofe (1972, 1974) [11] [12] を参照せよ)．この値が未知である場合には推定する必要がある．

2　補助的命題

本節では次節での証明に用いる補助的な命題を述べておく．

一般に $F(\cdot)$ を実数直線上の連続な分布関数とする．

$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ を独立で同一分布 F に従う確率変数列とする．このとき，

注） 本稿は三浦（1986, [10]）の内容を改良したものに著者の最近の結果を追加したものである．

$[0, 1]$ 区間上で一様分布に従う独立な確率変数列 $U_1, U_2, \cdots\cdots, U_n$ に対し $X_i \equiv F^{-1}(U_i), i=1, 2, \cdots\cdots, n$ とおいて $U_1, \cdots\cdots, U_n$ に対する性質を利用する注).

$$U_n(t)=\begin{cases} U(k), & \dfrac{k-1}{n}<t\leqq\dfrac{k}{n} \text{ のとき}, \ k=1, 2, \cdots\cdots, n \\ 0, & t=0 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義し，さらに

$$V_n(t)=\sqrt{n}\,\{U_n(t)-t\}, \ 0\leqq t\leqq 1$$

と定義する.

補題 1. (Csörgö and Révész (1981) [2]. 定理 4. 5. 2)

ブラウン橋 (Brownian Bridge) $\{B_n(t) : 0\leqq t\leqq 1, n=1, 2, \cdots\cdots\}$ が存在して

$$\sup_{0\leqq t\leqq 1}|V_n(t)-B_n(t)| \overset{\text{a.s.}}{=} 0(n^{-1/2}.\log n)$$

である.

補題 2. ブラウン橋 $B(t), 0\leqq t\leqq 1$ に対して $\delta\to 0$ のとき

$$\sup_{|t-s|\leqq\delta}|B(t)-B(s)| \overset{\text{a.s.}}{=} 0(\delta^{1/2}(\log\delta)^{1/2})$$

である.

証明.

$W(t), 0\leqq t\leqq\infty$ を標準的ウィーナー過程とするとき，ブラウン橋 $B(t)$ は

$$B(t)=W(t)-t\cdot W(1), \ 0\leqq t\leqq 1$$

と表わされる. $W(t)$ に対して Csörgö and Révész [2], 定理 S. 1. 2. 1 ($a_T=\delta, b_T=1$ とおきかえて) により，$\delta\to 0$ のとき

注) 以下で引用する命題は特別に構成された確率変数を用いているので本来の確率変数に対しては分布論的命題として成立する.

$U_i, i=1, 2, \cdots\cdots, n$ の順序統計量を

$$U(1)\leqq U(2)\leqq\cdots\cdots\leqq U(n)$$

と書く.

$$\sup_{|t-s|<\delta} \{\delta \log \delta\}^{-1/2} \cdot |W(t+s)-W(t)| \overset{\text{a.s.}}{=} 1$$

であるから，これを用いればよい．(証明終り)

$\varDelta \equiv \varDelta(n)$ を $n \to \infty$ のとき $\varDelta/n \to 0, \varDelta \to \infty$ なる整数列として $i=\varDelta+1, \varDelta+2, \cdots\cdots, n-\varDelta$ に対して

$$Y_i = \frac{U(i+\varDelta)-U(i-\varDelta)}{2\varDelta/n}$$

と定義する．

補題 3. (Miura (1984) [9]，補題 2.)

$$\sup\{|Y_i-1| : \varDelta+1 \leqq i \leqq n-\varDelta\} \leqslant O_p\left(\varDelta^{-\frac{1}{2}}\left(\log \frac{n}{\varDelta}\right)^{1/2}\right)$$

証明 補題 1, 2 の枠組で，

$$\begin{aligned}
Y_i - 1 = & \frac{\sqrt{n}}{2\varDelta}\left[\sqrt{n}\left\{U(i+\varDelta)-\frac{i+\varDelta}{n}\right\}-B_n\left(\frac{i+\varDelta}{n}\right)\right] \\
& -\frac{\sqrt{n}}{2\varDelta}\left[\sqrt{n}\left\{U(i-\varDelta)-\frac{i-\varDelta}{n}\right\}-B_n\left(\frac{n-\varDelta}{n}\right)\right] \\
& +\frac{\sqrt{n}}{2\varDelta}\left\{B_n\left(\frac{i+\varDelta}{n}\right)-B_n\left(\frac{i-\varDelta}{n}\right)\right\} \\
& \leqq \frac{\sqrt{n}}{2\varDelta} \cdot O_p(n^{-1/2}\log n) + \frac{\sqrt{n}}{2\varDelta} \cdot O_p\left(n^{-\frac{1}{2}}\varDelta^{\frac{1}{2}}\left(\log \frac{n}{\varDelta}\right)^{1/2}\right) \\
& \leqq O_p\left(\varDelta^{-\frac{1}{2}}\left(\log \frac{n}{\varDelta}\right)^{1/2}\right)
\end{aligned}$$

である．(証明終り)

3 形状母数の推定

3.1 $\frac{d}{dt} \cdot f(F^{-1}(t))$ にもとづく推定

$x \to 0$ のとき $f(x)=c \cdot x^\alpha$ とする．一般に $\frac{df(F^{-1}(t))}{dt}=\frac{f'(F^{-1}(t))}{f(F^{-1}(t))}$ であるが，$f(x)=cx^\alpha$ のとき $\frac{f'(x)}{f(x)}=\alpha x^{-1}$ である．つまり $\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x=\alpha$ である．この関係

を用いて，$F^{-1}(t)\cdot\dfrac{df(F^{-1}(t))}{dt}$ を $t\to 0$ に対して推定することにより α を推定する．

条件 1. $\varDelta_n, b_n, k_n$ を n に依存した整数で $n\to\infty$ のとき $\varDelta_n\to\infty, b_n\to\infty, k_n\to\infty$ であり，そして $\varDelta_n/b_n\to 0, b_n/k_n\to 0, \dfrac{k_n}{b_n{\varDelta_n}^{1/2}}\to 0, k_n/n\to 0$ であるとする．

いま $i=k_n+b_n, j=k_n-b_n$ ととり，$f\left(F^{-1}\left(\dfrac{i}{n+1}\right)\right)$ を $\left\{\dfrac{X(i+\varDelta_n)-X(i-\varDelta_n)}{2\varDelta_n/n}\right\}^{-1}$ で推定する．

この推定量は $\dfrac{dF^{-1}(t)}{dt}=\dfrac{1}{f(F^{-1}(t))}$ であることを用いて $\left(\dfrac{dF^{-1}(t)}{dt}\right)^{-1}$ を推定している．

微分の定義に従って，$\dfrac{df(F^{-1}(t))}{dt}$ を $t=\dfrac{k_n}{n+1}$ において，

$$A_n=\frac{\left\{\dfrac{X(i+\varDelta_n)-X(i-\varDelta_n)}{2\varDelta_n/n}\right\}^{-1}-\left\{\dfrac{X(j+\varDelta_n)-X(j-\varDelta_n)}{2\varDelta_n/n}\right\}^{-1}}{(i-j)/n}$$

によって推定する．従って α の推定量は

$$\hat{\alpha}_3=A_n\cdot X_{(k_n)}$$

と定義される．

定理 1.

$k_n>b_n>\varDelta_n$ に対し，条件 1 のもとで $n\to\infty$ のとき $\hat{\alpha}_3$ は α に確率収束する．

証明　$\hat{\alpha}\xrightarrow{p}\alpha$ であることを示すためにまず A_n を分解する．$\varDelta_n, b_n, k_n$ の添字 n は以下では省略する．

$X(i)\equiv F^{-1}(U(i)), i=1, 2, \cdots\cdots, n$ として

$$\frac{2\varDelta/n}{X(i+\varDelta)-X(i-\varDelta)}=\frac{U(i+\varDelta)-U(i-\varDelta)}{F^{-1}(U(i+\varDelta))-F^{-1}(U(i-\varDelta))}\cdot\frac{2\varDelta/n}{U(i+\varDelta)-U(i-\varDelta)}$$

$$=f(F^{-1}(t_i{}^*))\left\{1+(1-Y_i)+\frac{(1-Y_i)^2}{Y_i}\right\}$$

と表わされる．ただし

$$U(i-\varDelta)<t_i{}^*<U(i+\varDelta),$$

$$Y_i\Leftarrow\frac{U(i+\varDelta)-U(i-\varDelta)}{2\varDelta/n}$$

である．

同様にして

$$\frac{2\varDelta/n}{X(j+\varDelta)-X(j-\varDelta)}=f(F^{-1}(t_j{}^*))\left\{1+(1-Y_j)+\frac{(1-Y_j)^2}{Y_j}\right\}$$

が得られる．ただし $U(j-\varDelta)<t_j{}^*<U(j+\varDelta)$ である．これらを合わせて

$$\begin{aligned}A_n=\frac{n}{2b}\Bigg[&f(F^{-1}(t_i{}^*))-f(F^{-1}(t_j{}^*))\\&+\{f(F^{-1}(t_i{}^*))\cdot(1-Y_i)-f(F^{-1}(t_j{}^*))\cdot(1-Y_j)\}\\&+\left\{f(F^{-1}(t_i{}^*))\cdot\frac{(1-Y_i)^2}{Y_i}-f(F^{-1}(t_j{}^*))\cdot\frac{(1-Y_j)^2}{Y_j}\right\}\Bigg]\end{aligned}$$

と表わされる．こうしておけば $\hat{\alpha}-\alpha$ はつぎのように分解される．

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_3-\alpha&=A_n\cdot X(k)-\alpha\\&=\frac{n}{2b}\{f(F^{-1}(t_i{}^*))-f(F^{-1}(t_j{}^*))\}\cdot F^{-1}(U(k))-\alpha\\&\quad+\frac{n}{2b}\{(1-Y_i)\cdot f(F^{-1}(t_i{}^*))-(1-Y_j)f(F^{-1}(t_j{}^*))\}\cdot F^{-1}(U(k))\\&\quad+\frac{n}{2b}\left\{f(F^{-1}(t_i{}^*))\cdot\frac{(1-Y_i)^2}{Y_i}-f(F^{-1}(t_j{}^*))\cdot\frac{(1-Y_j)^2}{Y_j}\right\}F^{-1}(U(k))\\&\eqqcolon I_n+II_n+III_n\end{aligned}$$

I_n, II_n, III_n, がそれぞれ $n\to\infty$ のときゼロに確率収束することを示す．

$t_j{}^*\leqq s_k{}^*\leqq t_i{}^*$ なる $s_k{}^*$ が存在して

$$I_n=\frac{n}{2b}\cdot\frac{f'(F^{-1}(s_k{}^*))}{f(F^{-1}(s_k{}^*))}\cdot(t_i{}^*-t_j{}^*)\cdot F^{-1}(U(k))-\alpha$$

である．さらに $f(\cdot)$ の関数形を利用して

$$\begin{aligned}&=\frac{n}{2b}\cdot\frac{\alpha}{F^{-1}(s_k{}^*)}\cdot(t_i{}^*-t_j{}^*)\cdot F^{-1}(U(k))-\alpha\\&=\alpha\cdot\left\{\frac{n}{2b}\cdot(t_i{}^*-t_j{}^*)\cdot\frac{F^{-1}(U(k))}{F^{-1}(s_k{}^*)}-1\right\}\end{aligned}$$

である．ここで

$$\left|\frac{n}{2b}\cdot(t_i{}^*-t_j{}^*)-1\right|$$

$$\leqq \frac{n}{2b}|-U(i+\Delta)+t_i^*|+\frac{n}{2b}|-t_j^*+U(j-\Delta)|$$

$$+\left|\frac{n}{2b}\{U(i+\Delta)-U(j-\Delta)\}-1\right|$$

$$\leqq \frac{n}{2b}|U(i+\Delta)-U(i-\Delta)|+\frac{n}{2b}|U(j+\Delta)-U(j-\Delta)|$$

$$+\left|\frac{n}{2b}\left[\left\{U(i+\Delta)-\frac{i+\Delta}{n+1}\right\}-\left\{U(j-\Delta)-\frac{j-\Delta}{n+1}\right\}+\frac{i+\Delta-j+\Delta}{n+1}\right]-1\right|$$

$i-j=2b$, $\Delta/b\to 0(n\to\infty)$ であるから，$n\to\infty$ のとき

$$\left(\frac{n}{b}\cdot\frac{i-j+2\Delta}{n+1}-1\right)\longrightarrow 0$$

である．一般に $U(i)-\dfrac{i}{n+1}=O_p(\sqrt{n})$ であるから，

第3項は補題1, 2を用いて，

$$O_p(1/\sqrt{b_n})+O_p(\Delta/b)$$

である．$n\to\infty$ のとき条件1のもとでゼロに確率収束する．第1項，第2項も補題1, 2を用いて補題3の証明と同様の分解により

$$O_p(\sqrt{\Delta/b})+O_p(\Delta/b)$$

である．$n\to\infty$ のとき条件1のもとでゼロに確率収束する．

$n\to\infty$ のとき $\left(U(k)-\dfrac{k}{n+1}\right)\xrightarrow{p}0$, $\left(s_k^*-\dfrac{k}{n+1}\right)\xrightarrow{p}0$ だから $\{F^{-1}(U(k))/F^{-1}(s_k^*)-1\}\xrightarrow{p}0$ である．これで $n\to\infty$ のとき $I_n\xrightarrow{p}0$ であることが示された．

II_n についてみよう．

$$II_n=\frac{n}{2b}[(1-Y_i)\{f(F^{-1}(t_i^*))-f(F^{-1}(t_j^*))\}$$

$$+\{(1-Y_i)-(1-Y_j)\}f(F^{-1}(t_j^*))]\cdot F^{-1}(U(k))$$

$$=\frac{n}{2b}\{f(F^{-1}(t_i^*))-f(F^{-1}(t_j^*))\}\cdot F^{-1}(U(k))\cdot(1-Y_i)$$

$$+\frac{n}{2b}(-Y_i+Y_j)\cdot f(F^{-1}(t_j^*))\cdot F^{-1}(U(k))$$

と表わされる．第1項は α に確率収束する部分と $(1-Y_i)$ の積であり，$(1-Y_i)$ は補題3によりゼロに確率収束する．従って第1項はゼロに確率収束する．

第2項についてはまず

$$\frac{n}{2b}|-Y_i+Y_j|\leqq\frac{n}{2b}\{|1-Y_i|+|1-Y_j|\}$$

$$\leqq\frac{n}{2b}\left\{O_p\left(\varDelta^{-\frac{1}{2}}\left(\log\frac{n}{\varDelta}\right)^{1/2}\right)\right\}$$

$$=O_p\left(\frac{n}{b\varDelta^{1/2}}\left(\log\frac{n}{\varDelta}\right)^{1/2}\right)$$

である. $t\to 0$ のとき

$$f(F^{-1}(t))\cdot F^{-1}(t)\sim(\text{定数})\cdot t$$

であるから,

$$t_j{}^*\sim\frac{k}{n+1},\ U(k)\sim\frac{k}{n+1}$$

であることをふまえて

$$f(F^{-1}(t_j{}^*))\cdot F^{-1}(U(k))\sim O_p\left(\frac{k}{n}\right)$$

と考えてよい. 従って第2項は

$$O_p\left(\frac{k}{n}\right)\cdot O_p\left(\frac{n}{b\varDelta^{1/2}}\cdot\left(\log\frac{n}{\varDelta}\right)^{1/2}\right)$$

$$=O_p\left(\frac{k}{b\varDelta^{1/2}}\cdot\left(\log\frac{n}{\varDelta}\right)^{1/2}\right)$$

である. $n\to\infty$ のとき条件1のもとでゼロに収束する.

III_n については, $f(F^{-1}(t^*))\cdot F^{-1}(U(k))$ に対して上と同様に考え補題3を用いて

$$III_n=\frac{n}{2b}\cdot O_p\left(\frac{k}{n}\right)\cdot O_p\left(\varDelta^{-1}\left(\log\frac{n}{\varDelta}\right)\right)$$

$$=O_p\left(\frac{k}{b\varDelta}\left(\log\frac{n}{\varDelta}\right)\right)$$

である. $n\to\infty$ のとき条件1のもとでゼロに収束する.

3.2 $\frac{d}{dt}\log F^{-1}(t)$ にもとづく推定

つぎに $x\to 0$ のとき $F(x)=c\cdot x^{\beta}$ とする. $\frac{d}{dt}\left[\log F^{-1}(t)\right]=\frac{1}{F^{-1}(t)\cdot f(F^{-1}(t))}=$

$\dfrac{1}{\beta\cdot t}$ という関係を利用して β の推定量を作る．$f(x)=c\cdot x^{\alpha}$ と書く場合とは $\beta=\alpha+1$ の関係にある．記法の簡略化のために β とした．

$\left[t\cdot\dfrac{d}{dt}[\log F^{-1}(t)]\right]^{-1}$ を微分 $\dfrac{d}{dt}$ のところを順序統計量を用いた差分の形で表わすという考え方は本節前半と同じである．$t=\dfrac{k_n}{n+1}$ においてそれを行う．

条件 2. $n\to\infty$ のとき，$k_n/n\to 0$ とする．さらに $n\to\infty$ のとき $\sqrt{n}/k_n\to 0$, $\Delta_n/k_n\to 0$, $\to 0$, $k_n\to\infty$, $\Delta_n\to\infty$ とする．

$$\hat{\beta}_4=\left[\frac{k_n}{n+1}\left\{\frac{\log X(k_n+\Delta_n)-\log X(k_n-\Delta_n)}{\dfrac{2\Delta_n}{n+1}}\right\}\right]^{-1}$$

と定義する．以下 k_n, Δ_n の添字 n を省略する．

定理 2.

k_n, Δ_n に対して，条件 2 のもとで $n\to\infty$ のとき $\hat{\beta}_4$ は β に確率収束する．

証明　$\hat{\beta}_4$ の挙動を調べる．$F^{-1}(t)=\left(\dfrac{t}{c}\right)^{1/\beta}$ であるから

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_4&=\left[\frac{k}{2\Delta}\{\log F^{-1}(U(k+\Delta))-\log F^{-1}(U(k-\Delta))\}\right]^{-1}\\&=\left[\frac{k}{2\Delta}\log\left(\frac{U(k+\Delta)/c}{U(k-\Delta)/c}\right)^{1/\beta}\right]^{-1}\\&=\left[\frac{k}{2\Delta}\cdot\frac{1}{\beta}\log\frac{U(k+\Delta)}{U(k-\Delta)}\right]^{-1}\end{aligned}$$

である．従って

$$\hat{\beta}_4-\beta=\beta\left\{\left[\frac{k}{2\Delta}\log\frac{U(k+\Delta)}{U(k-\Delta)}\right]^{-1}-1\right\}\rightleftarrows\beta\left\{\frac{1-Z(k)}{Z(k)}\right\}$$

である．$Z(k)$ の 1 への収束を吟味する．

$$\begin{aligned}Z(k)&\equiv\frac{k}{2\Delta}\log\frac{U(k+\Delta)}{U(k-\Delta)}\\&=\frac{k}{2\Delta}\log\left\{\frac{U(k+\Delta)-U(k-\Delta)}{U(k-\Delta)}+1\right\}\\&=\frac{k}{2\Delta}\{T_k-T_k^{2}+\cdots\cdots\}\end{aligned}$$

である．ただし

$$T_k=\frac{U(k+\Delta)-U(k-\Delta)}{U(k-\Delta)}$$

である．T_k は

$$T_k=\frac{(k-\Delta)/(n+1)}{U(k-\Delta)}\cdot\frac{2\Delta/(n+1)}{(k-\Delta)/(n+1)}\cdot\frac{U(k+\Delta)-U(k-\Delta)}{2\Delta/(n+1)}$$

と分解される．従って

$$1-Z(k)=1-\frac{k}{2\Delta}T_k+\frac{k}{2\Delta}T_k{}^2+O_p\left(\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2\right)$$

である．

$$U(k-\Delta)=\left\{U(k-\Delta)-\frac{k-\Delta}{n+1}\right\}+\frac{k-\Delta}{n+1}$$

とみれば

$$T_k=\left\{1+O_p\left(\frac{\sqrt{n}}{k}\right)\right\}\frac{2\Delta}{k-\Delta}Y_k$$

である．ただし Y_k は本節前半と同じく

$$Y_k=\frac{U(k+\Delta)-U(k-\Delta)}{2\Delta/n}$$

である．従って

$$\begin{aligned}1-Z(k)=&1-\frac{k}{k-\Delta}\cdot Y_k\cdot\left\{1+O_p\left(\frac{\sqrt{n}}{k}\right)\right\}\\&+\left\{1+O_p\left(\frac{\sqrt{n}}{k}\right)\right\}^2\cdot\frac{2k\cdot\Delta}{(k-\Delta)^2}\cdot Y_k{}^2+O_p\left(\left(\frac{\Delta}{k}\right)^2\right)\\=&(1-Y_k)+Y_k\left[O_p\left(\frac{\sqrt{n}}{k}\right)+\frac{\Delta}{k+\Delta}\cdot\left\{1+O_p\left(\frac{\sqrt{n}}{k}\right)\right\}\right]\\&+\left\{1+O_p\left(\frac{\sqrt{n}}{k}\right)\right\}^2\cdot\frac{2k\cdot\Delta}{(k-\Delta)^2}\cdot Y_k{}^2+O_p\left(\left(\frac{\Delta}{K}\right)^2\right)\end{aligned}$$

である．補題 3 を用いれば

$$|1-Z(k)|\leqslant O_p\left(\Delta^{-1/2}\left(\log\frac{n}{\Delta}\right)^{1/2}\right)+O_p(n^{1/2}k^{-1})+O_p\left(\frac{\Delta}{K}\right)$$

である．$n\to\infty$ のとき条件 2 のもとで

$$1-Z(k)\xrightarrow{p}0$$

である．(証明終)

$\hat{\alpha}_3$ と $\hat{\beta}_4$ の特性について簡単に述べておく．

(1) $\hat{\alpha}_3, \hat{\beta}_4$ ともに推定対象の値に依存しない構成をもつ．

(2) $\hat{\alpha}_3$ の α への収束の速さについて少し詳しくみよう．$k_n=n^p, b_n=n^q, \Delta_n=n^r$ とする．I_n の収束の速さは $(\Delta/b)^{1/2}$ である．

II_n は $\Delta^{-\frac{1}{2}}$ よりゆるい $k/(b\cdot\Delta^{1/2})$ の速さである．III_n は $\frac{k}{b\Delta}$ の速さである．$\frac{k}{b\Delta}$ より $\frac{k}{b\Delta^{1/2}}$ の方がゆるいので，結局全体として $\hat{\alpha}_3$ の α への収束の速さは $(\Delta/b)^{1/2}$ と $k/(b\cdot\Delta^{1/2})$ のゆるい方である．$(\Delta/b)^{1/2}=n^{\frac{1}{2}(r-q)}, k/(b\cdot\Delta^{1/2})=n^{p-q-\frac{1}{2}r}$ である．条件1は

$$1>p>q>r>0, p-q-\frac{1}{2}r<0$$

を意味する．この範囲内で選ばれた p, q, r に対して，$\hat{\alpha}_3$ の α への収束の速さのオーダーは

$$\min\left\{-\frac{1}{2}(r-q), -\left(p-q-\frac{1}{2}r\right)\right\}$$

である．

(3) $\hat{\beta}_4$ の β への収束の速さをみよう．$1-Z(k)$ の評価にみられるように収束の速さは，

$k_n=n^p$, $\Delta_n=n^r$, として，$\Delta^{-\frac{1}{2}}=n^{-\frac{1}{2}r}, n^{1/2}/k_n=n^{\frac{1}{2}-p}, \Delta/k=n^{r-p}$, の最もゆるいものによって表わされる．条件2は

$$0<r<p<1, \frac{1}{2}<p$$

を意味する．この範囲内で選ばれた p, r に対して

$$\min\left\{\frac{1}{2}r, p-\frac{1}{2}, p-r\right\}$$

が収束の速さのオーダーである．

参考文献

[1] Boente, G. and Fraiman, R. (1988). On the asymptotic behavior of general

maximum likelihood estimates for the nonregular case under nonstandard conditions. Biometrika. Vol. 75, No. 1. pp. 45—56.

[2] Csörgö, M. and Révész, P. (1981). Strong approximations in Probability and Statistics. Academic Press.

[3] De Haan, L. and Resnick, S. I. (1980). A simple asymptotic estimate for the index of a stable distribution. Journal of Royal Statistical Society, B. Vol. 42, pp. 83—88.

[4] DuMouchel, W. H. (1983) Estimating the stable index α in order to measure tail thickness: a critique. Annals of Statistics. Vol. 11. No. 4. 1019—1031.

[5] Hall, P. (1982). On some simple estimates of an exponent of regular variation. Journal of Royal Statistical Society, B. Vol. 44, pp. 37—42.

[6] Hall, P. and Welsh, A. H. (1984). Best attainable rate of convergence for estimates of parameters of regular variation. Annals of Statistics. Vol. 12, No. 3, pp. 1079—1083.

[7] Hall, P. and Welsh, A. H. (1985). Adaptive estimates of parameters of regular variation. Annals of Statistics. Vol. 13, No. 1, pp. 331—341.

[8] Hill, B. M. (1975). A simple general approach to inference about the tail of a distribution. Annals of Statistics. Vol. 3, No. 5, pp. 1163—1174.

[9] Miura, Ryozo (1984). Spacing estimation of the asymptotic variance of rank estimators of location. Proceedings of the Indian Statistical Institute Golden Jubilee International Conference on Statistics: Applications and New Directions. J. K. Ghosh and J. Roy, Editors. Indian Statistical Institute 刊.

[10] 三浦良造 (1986). (非) 正則性母数の推定. シンポジウム・統計モデル論の展望 (予稿集). 統計数理研究所, 1986年1月.

[11] Woodroofe, M. (1972). Maximum likelihood estimators of a translation parameter of a truncated distribution. Annals of Mathematical Statistics. Vol. 43, No. 1, pp. 113—122.

[12] Woodroofe, M. (1974). Maximum likelihood estimation of translation parameter of truncated distribution II. Annals of Statistics. Vol. 2, No. 2, pp. 474—488.

(一橋大学教授)