証券とオプションの資源配分機能

——不確実性下の市場メカニズムⅠ——

山　崎　　昭

1　はじめに

ワルラスの古典的な一般均衡理論においては，市場経済に存在する不確実な要因や各個人の負担するリスクが，価格機構にいかなる影響をもたらすかを明示的に分析することはなかった．市場経済における貨幣，証券等の金融資産にかかわる経済現象を問題とするとき，当然のことながら，不確実性を明示的に組み込んだ理論体系を確立し，その枠組みの中で価格メカニズムや貨幣，証券等の機能を明確に位置付けする必要がある．

本稿では，アローとドブルーに始まる不確実性を明示的に組み込んだ一般均衡体系の枠組みにおいて，不確実性の存在が市場の機能にいかなる影響を与えるのか理解することを目標とし，その第1歩として，証券とオプションが不確実性下の市場経済における資源の配分過程において果す役割を明確にしたい．そのため，市場均衡における資源配分のパレート最適性の問題を，実物証券，金融証券，オプションとの関連において議論して行くことにする．貨幣の問題は別の機会にこれをとりあげたい．

以下，第2節では不確実性の表現方法，第3節では実物証券の資源配分機能，第4節では金融証券の資源配分機能について議論し，第5節においてオプションの一般的な規定を行った後に，第6節でオプションの資源配分機能について議論する．

2 不確実性の表現

2.1 (不確実性と自然による選択) 経済分析上問題となるような経済環境の不確実性 (uncertainty) は，すべて「自然 (Nature)」が現実に行う環境の歴史の選択に起因するものと想定し，自然による選択の対象からなる集合を Ω と記述する．したがって，「不確実である」ことの意味を「いかなる $\omega\in\Omega$ であるかを知らないこと」と解釈する．集合 Ω を**自然の状態の集合** (the set of the states of Nature) とよぶ．基本的には Ω によって不確実性が表現されたと考えるのである．

一般に人々 (経済構成員) が観察する「状態」は，ある一定の条件を満たす状態 ω の集合である．例えば，条件 $\rho(\omega)$ を満足するような Ω の部分集合 $Q_\rho=\{\omega\in\Omega|\ \rho(\omega)\}$ である．経済 $\mathcal{E}$ の中でこの Q_ρ が結果として実現することを ρ または Q_ρ が**起こる** (realizes) という．そこで，自然の状態の集合 Ω の部分集合を**事象** (events) とよぶ．

2.2 (時間的要素と不確実性) いま，分析上問題とする経済 $\mathcal{E}$ の期間を，第0期から T 期だとしよう．不確実性下の経済 $\mathcal{E}$ の第 t 期，$0\leqq t\leqq T$，を考察するには，第 t 期の不確実性つまり t 期に起こる事象を概念的に明らかにしなければならない．そこで，経済 $\mathcal{E}$ が直面する不確実な事態を表現する概念として，各 **t 期の基本的事象族** (the class of fundamental events at t) が導入される．t 期の基本的事象族は集合 Ω の分割 F_t (つまり，$\cup\{\xi|\ \xi\in F_t\}=\Omega$, $\xi_1,\xi_2\in F_t, \xi_1\neq\xi_2$ ならば $\xi_1\cap\xi_2=\phi$) によって表現される．t 期の基本的事象族を集合 Ω の分割 F_t で表わすということは，経済構成員が第 t 期に観察するのは ω が属する事象 $\xi\in F_t$ であり，これを第 t 期には「ξ が起こった」というのである．分割 F_t に属する事象 ξ を **t 期の事象** (events at t) とよぶ．

各経済構成員にとって第 t 期の不確実性というのは，分割 F_t に属する t 期の事象の中で，自然がどの事象 $\xi\in F_t$ を選択するのか t 期になるまで知らない，ということである．しかも，t 期に知り得るのは ω ではなく，ω が属する事象 $\xi\in F_t$ のみである．この意味で不確実性の表現は，経済構成員の有する

情報 (information) の表現としても理解できるのである．異なる時点 $t \neq k$ における基本的事象族 F_t, F_k の間には，それらが示す情報構造という点で矛盾の無い連関がなければならない．これに簡単に触れておこう．

2.3 (異時点間の情報構造のつながり)　異なる2つの時点を $t>k$ とする．第 t 期に事象 $\xi_t \in F_t$ が起きれば，t 期以前のいかなる時点いおいても，ξ_t に属する ω と矛盾の無い事象が生起していなければならない．これは第 k 期に $\xi_k \supset \xi_t$ を満足するような事象 $\xi_k \in F_k$ が起こっていなければならないことを意味する．換言すれば，任意の $0 \leqq k \leqq t \leqq T$ に対し，分割 F_t は分割 F_k の細分 (refinement) である．(数学注：一般に Ω の2つの分割 F, G が与えられたとき，G が F の細分であるとは，分割 G の任意の元が分割 F のある元に含まれることをいう．) このような条件を満たす各期の基本的事象族の集合 $\{F_t | 0 \leqq t \leqq T\}$ を**情報の増大系** (an increasing sequence of information) という．時間の推移とともに状態 ω に関する情報が増えていき，不確実性が徐々に解消される過程を描写している．

本稿では便宜上 $F_0 = \{\Omega\}, F_T = \{\{\omega\} \mid \omega \in \Omega\}$ として議論を進める．つまり，初期の第0期では，状態 ω に関する情報は皆無であり，最終の第 T 期では状態 ω に関する不確実性がすべて解消し，各構成員は完全情報を持つようになるものとする．第 T 期の事象 ξ が確定するということは，例えばドブルーの言葉 (Debreu (1959, p. 98) でいえば，大気の状態，自然災害，技術的条件などが全 T 期間に渡ってすべて確定することを意味する．

情報の増大系 $\{F_t | \ t=0, 1, \cdots\cdots, T\}$ が与えられたとき，これを図1のような**樹形** (a tree) で表現することもある．樹形の各結合点はそれぞれの期の事象に対応しており，不確実性の解消される過程が，例えば図中の $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_T$ のような1つの径路によって示される．

2.4 例 (不確実性の表現)　極端に単純化された仮設例で以上の説明をまとめてみると次のようになる．仮に自然の選択は，第1期から T 期までの各整数値の期の晴か雨という天候の選択のみであったとしよう．晴を1，雨を0に対応させれば，$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \cdots\cdots, \omega_T) \in R^T | \ (\forall j=1, \cdots\cdots, T) \omega_j = 1$ または $0\}$

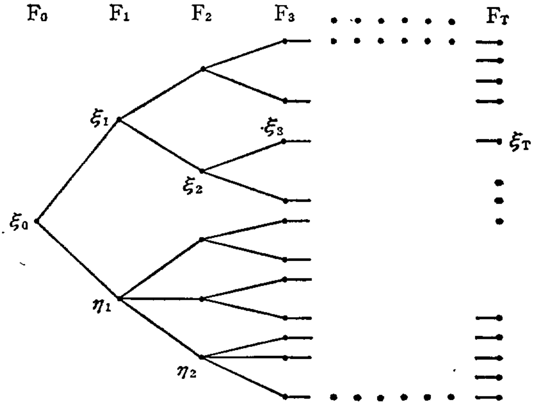

図1 情報増大系の樹形

と表現できる．言い換えれば，Ω を構成する ω は第１期から T 期までの晴，雨，雨，……，晴というような各期の天候状態の１つの歴史を示すものである．１期の事象は１期の天候が晴か雨の２つしかないから，１期の基本的事象族 F_1 は $\omega_1=1$ または０となる $\omega\in\Omega$ の区別のみである．したがって，

$$F_1=\{\Omega_1, \Omega_2\}, \Omega_1=\{\omega=(\omega_1, \cdots\cdots, \omega_T)|\ \omega_1=1\},$$
$$\Omega_2=\{\omega=(\omega_1, \cdots\cdots, \omega_T)|\ \omega_1=0\}$$

となる．同様な考え方から２期の基本的事象族 F_2 は，

$$F_2=\{\Omega_{11}, \Omega_{10}, \Omega_{01}, \Omega_{00}\},$$
$$\Omega_{ij}=\{\omega=(\omega_1, \omega_2, \cdots\cdots, \omega_T)|\ \omega_1=i, \omega_2=j\}$$
$$i=0, 1, j=0, 1$$

となる．一般に，$1\leqq n\leqq T$ に対し，

$$F_n=\{\Omega_{i(1),\ldots\ldots,i(n)}|\ i(k)=1 \text{ または } 0, k=1, \cdots\cdots, n\},$$
$$\Omega_{i(1),\ldots\ldots,i(n)}=\{\omega=(\omega_1, \cdots\cdots, \omega_T)|\ \omega_1=i(1),$$
$$\cdots\cdots, \omega_n=i(n)\}$$

である．F_n は第 n 期までの天候の歴史の径路からなる集合である．この例で

は，$F_0=\{\Omega\}, F_T=\{\{\omega\} \mid \omega\in\Omega\}$ であり，さらに，$\{F_t \mid t=1, \cdots\cdots, T\}$ は情報の増大系になっている．

2.5 注（確率論における用語との比較）標準的確率論の教科書（例えば伊藤清（1976））における用語法との相異点について少し触れておきたい．自然の状態の集合 Ω に相当するのは，確率論における見本空間や標本空間（a sample space）である．$\omega\in\Omega$ を見本点とか標本点（a sample point）とよぶ．事象の定義，事象が起こることの意味等は本稿と全く同じである．確率論では Ω の上の試行（an experiment, a trial）$\mathcal{T}$ を考え，試行 $\mathcal{T}$ の確率法則 π を伴う Ω の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \pi)$ を考える．（$\mathcal{F}$ は Ω 上の σ 集合代数である．）本稿でこの試行 $\mathcal{T}$ に相当するのは，理論分析上のデータとして所与と考える経済 $\mathcal{E}$ である．経済 $\mathcal{E}$ は次節で定義する．$\mathcal{E}$ の定義の中で確率論の「試行」にあたるのは，$\mathcal{E}$ が情報の増大系 $\{F_t \mid t=0, 1, \cdots\cdots, T\}$ を定めるという側面である．経済 $\mathcal{E}$ の確率法則，つまり分割 F_T が生成する σ 集合代数上の確率測度，を所与として分析を進めてもよいが，本稿の分析の範囲では確率測度空間を明示的に取り扱う必要はない．

3　実物証券の資源配分機能

3.1（不確実性と財概念の拡張）経済における不確実性を，自然がいかなる状態 ω を Ω から選択するのか分らないという意味での**状態依存性**（contingency）として表現し，その不確実性の構造が情報の増大系 $\{F_t \mid 0\leqq t\leqq T\}$ によって与えられたとする．不確実性を明示的に考察しなかった古典的なワルラス・モデル（Walras (1874–77), Arrow-Debreu (1954), McKenzie (1955), Nikaido (1956) 参照）を拡張する最も自然な方法がアローとドブルーによって示された（Arrow (1953; 1964), Debreu (1953; 1959)）．それは種々の財を識別するときに，単に物質的な違いや，それらが取引される場所と時間の違いを考慮するにとどまらず，事象の違いをも考慮するということである．このような財概念の拡張による不確実性の導入が自然だと考えられる理由は，一般均衡理論における基礎的諸概念——消費者の選好，初期保有量，生産集合等

――が財空間の中で定義されるからである.

3.2 (実物証券としての状態依存財) 不確実性の異時点間の構造が情報の増大系 $\{F_t| 0 \leqq t \leqq T\}$ によって与えられているとき，各事象毎に財を識別することで，時間的な違いによる財の識別は同時に達成される．したがって，各事象毎に物質的・空間的（地理的）に識別した財を考えることになる．このように事象毎に識別された財を**コンティンジェントな財** (a contingent commodity) とよぶ．厳密性を欠くが，本稿ではこれを**状態依存財** (a state dependent commodity) とよぼう（正確には「事象」依存財である）.

状態依存財の中では，第0期の事象 $\xi_0(=\{\Omega\})$ に対応する各種の財が，スポット（現物）市場で取引される財である．市場取引が現物の受け渡しを伴わない状態依存財を**純粋な状態依存財** (a pure contingent commodity, a pure state dependent commodity) とよべば，0期以外の事象 $\xi \in F_t, t>0$, に依存して取引される財が純粋な状態依存財であり，これらは先物契約・取引の特殊ケースである．通常の先物取引は自然の状態には依存しない契約だから，例えば t 期の先物であれば，F_t に属する事象 ξ すべてに渡って同一単位の状態依存財の取引を行うことと等しくなる．いずれにしても，純粋な状態依存財については通常の現物財のイメージを持つよりも，先物契約・先物予約の一種と考える方が的確である．それは将来のある時点 t におけるある事象 $\xi_t \in F_t$ が起こることを条件に，ある財一定量の受け渡し義務を発生させる契約だからである.

このようにドブルー (Debreu (1953; 1959)) が導入した状態依存財は，アロー (Arrow (1953; 1964)) の「財に対する請求権」(a commodity claim)」そのものか，あるいはそれを多少とも一般化した概念であり，ある特定の物質的特徴を持った「財」の一定単位を，ある特定の時間と場所で，ある特定の事象が起きることを条件に受け渡すことを約定した**実物証券** (a real security) である．状態依存財1単位の受け渡しを約定した証券を**ドブルー証券** (a Debreu security) とよぶことにする.

3.3 (アロー・ドブルー経済) 一般に，位相が入ったベクトル空間 L (本稿では主としてユークリッド空間) が与えられたものとし，これを財空間 (the commodity space) とする．$x \in L$ を財ベクトル (a commodity vector) もしくは状態依存財ベクトル (a contingent commodity vector) という．L の(閉) 部分集合 X を消費集合，X と X 上の2項関係 $\succ \subset X \times X$ の組 $(X, \succ)$ を選好関係とよぶ．初期保有量ベクトルを $e \in L$ で表記する．

経済構成員の母集団を有限集合 A で表わす．経済 $\mathcal{E}$ は$(\{(X_a, \succ_a), e(a)\}_{a \in A}, \{F_t | t=0, 1, \cdots\cdots, T\})$ で表現される．ここで個別の企業を分析の対象として経済 $\mathcal{E}$ の中に表記することは可能であるが，本稿では不確実性下の経済における企業の意思決定の問題には立ち入らないので，生産活動は所与とし，生産物はすべて状態依存財ベクトルの初期保有の形で各経済構成員に分配されている状態が $\mathcal{E}$ によって表現されているものとして議論を進める．

A から L への写像 x は，各構成員 $a \in A$ がいかなる状態依存財ベクトル $x(a) \in L$ を受け取るかを示す．写像 $x : A \rightarrow L$ が各 $a \in A$ に対し $x(a) \in X_a$ を満たすとき，x を経済 $\mathcal{E}$ の**配分** (an allocation) という．配分 x が**実行可能** (feasible) であるとは

$$\sum_{a \in A} x(a) \leqq \sum_{a \in A} e(a)$$

を満足することである．

一般に M を L の部分線型空間とし，市場取引の対象となる状態依存財の空間を表わすものとする．M を**市場** (markets) とよぼう．$M=L$ のとき**完全市場**もしくは**完備市場** (complete markets) といい，$M \neq L$ のとき**不完全市場** (incomplete markets) という．市場 M に対し M 上の線型汎関数 $p : M \rightarrow R$ を**市場価格**あるいは単に**価格** (場合によっては価格ベクトル) とよぶ．

経済 $\mathcal{E}$ において $M=L$ のとき，つまり，状態依存財市場が完備しているとき，経済 $\mathcal{E}$ を**アロー・ドブルー経済** (an Arrow-Debreu economy) とよぶ．

ここで再度状態依存財市場における売買の意味を確認しておきたい．純粋な状態依存財の取引は，取引の時点における実物取引を意味しないし，さらに先物契約・予約とも違って，将来実現する事象によっては，将来の時点で実物財の具体的な引き渡しが実行されない可能性がある．それにもかかわらず契約は現時点で成立しており，契約に対する対価の支払いも現時点で行われる．将来，

実物財の引き渡しが約束されない事象が起こったからといって，現時点で支払った金額を将来時点で請求することはできない．つまり，支払いは取消し不能 (irrevocable) である．

3.4 (アロー・ドブルー均衡) アロー・ドブルー経済 $\mathcal{E}$ において市場価格 $p: L \to R$ が与えられたとき，各経済構成員 $a \in A$ の需要集合 $\varphi(a, p)$ は，

$$\varphi(a,p)=\{z \in X_a \mid y \in X_a \text{ かつ } p \cdot y \leqq p \cdot e(a) \text{ ならば } y \not\succ_a z\}$$

となる．

経済 $\mathcal{E}$ の**アロー・ドブルー均衡** (an Arrow-Debreu equilibrium) とは，実行可能な配分 x と市場価格 p とからなる組 (x, p) で，各構成員 $a \in A$ に対し $x(a) \in \varphi(a, p)$ が成立するものをいう．

以上のような状態依存財市場が完備したアロー・ドブルー経済の均衡においては，消費者の嗜好や財の初期保有量（さらに，生産セクターを明示的に考察するときは生産技術集合）の不確実性いかんによらず，各経済構成員が意図する消費計画（および生産計画）はコンティンジェントな契約として計画数量が「確定」しているだけでなく，その市場価値も現時点で計算されてしまうことになる．その結果，構成員が直面する将来時点の不確実性はすべて意図した不確実性であり，「最適なリスク負担」を各個人が行うことになる．事実，厚生経済学の第1および第2の基本定理がアロー・ドブルー均衡における配分について成立することを容易に確認できる (Debreu (1954 ; 1959) 参照)．しかもこの2つの命題の成立が，財空間 L が有限次元か否かに依存しない点にも注意したい．

以上，本節の議論の本質的ポイントは，市場経済における資源配分のパレート最適性をもたらす価格メカニズムそれ自体が，不確実性の存在によって直接に阻害されるのではなく，人々が異なる不確実な事象の下で消費する財を異なる財と認識する限りにおいて，それらを異なる財として直接・間接に取引させるようなマーケット・インスティテューションを創設しうるか否かに，不確実性下の資源配分の最適性がかかっているということである．これがアロー・ドブルー経済の持つ理論的意味合いだと私は思う．

本稿では以下財空間 L を有限次元の場合に限って議論を進める．L が有限次元となるためには，まず，自然の状態の集合 Ω が有限個の元からなり，加えて考察の対象となる第0期から T 期の間において一様に離散的な市場取引のみが行われなければならない．もちろん，一般に L が無限次元の場合を考察することが望ましいが，本稿ではこの問題に立ち入らない．

4　金融証券の資源配分機能

4.1（ドブルー証券とアロー証券）　ここまでは財空間をベクトル空間 L とするだけで，より具体的な数学構造を明示しなかった．記号の複雑化を避けるため，今後便宜上，$\Omega=\{1, 2, \cdots\cdots, s\}$ とおき，さらに，市場取引は第0期のスポット取引と最終第 T 期の純粋な状態依存取引のみとする．情報の増大系 $\{F_t|0\leqq t\leqq T\}$ も単純に F_T と表現されることになる．第 T 期の事象はすべて $\{\omega\}$，$\omega\in\Omega$，だとしたから，以下，状態依存財は文字通り「事象」依存財である．また，物質的・空間的（地理的）に識別される実物財の種類は1から l までであるとする．

実物の財空間は R^l，純粋な状態依存財空間は R^{ls} である．したがって，アロー・ドブルー経済の財空間は $L=R^{l(1+s)}$ となる．ここで，空間 R^{ls} の ls 個の単位ベクトル $e_1=(1, 0, \cdots\cdots, 0), \cdots\cdots, e_{ls}=(0, \cdots\cdots, 0, 1)\in R^{ls}$ を，1から l までの中のある特定の財を1から s までのある特定の状態に依存して1単位手渡すことを約定した契約と考え，これらをドブルー証券とする．このような l 種類の財取引をする現物市場と，ls 種類の実物証券を取引する市場をすべて備えた経済を指してアロー・ドブルー経済とよんだのである．

ところで，あらゆる将来の状態を想定した実物証券の取引市場を創設するということは，その実現可能性の議論以前に，経済機構の効率性の視点から望ましいものではない．より自然だと考えられるのが金融証券（financial securities）の取引市場である．アローは，実物証券が完備した市場の代わりに，状態依存の金融証券が完備した市場を考察し，資源配分の効率性という観点からは，完備した金融証券市場が完備した実物証券市場の役割を果しうることを示した

(Arrow (1953; 1964)). この議論を本稿の枠組みの中で表現すると以下のようになる.

金融証券は**状態依存所得** (a contingent income, a state dependent income) であり, 一般に, Ω 上の実数値関数 $d:\Omega\to R$ によって表現できる. $d(\omega)$ は状態 $\omega\in\Omega$ において証券 d を1単位保有している者が受け取る配当である. 集合 $\Omega=\{1,\cdots\cdots,s\}$ としたから, 便宜上, 証券 d をユークリッド空間 R^s のベクトル $d\in R^s$ とみなすことが多い. 本稿でも随時この両者の視点から証券 d を表現する. R^s を**状態依存所得空間** (the contingent income space) とよぶ.

経済 $\mathcal{E}$ における金融証券の集合を $\{d_j|\ j=1,\cdots\cdots,n\}$ とする. $d_j\in R^s$ を列ベクトルとみなして, d_1 から d_n まで並べた行列 $[d_1\cdots\cdots d_n]$ を**証券行列** (the security matrix) といい, これを D と書く. 各 $\omega=1,\cdots\cdots,s$ に対し D_ω で行列 D の ω 行のベクトルを表わすことにする. $D_\omega\in R^n$ である. 金融証券の数 n が状態の数 s と一致し, しかも各証券 d_j の取る値が, $\omega=j$ ならば $d_j(\omega)=1$, $\omega\neq j$ ならば $d_j(\omega)=0$ を満たすとき, これら n 種類の証券を**アロー証券**(Arrow securities) とよぶ. アロー証券の場合, 行列 D は対角元が1の s 行 s 列の単位行列 I_s に等しい.

4.2 (金融証券市場とスポット市場) さてアロー・ドブルー経済における完全市場とは異なり, 本節では経済 $\mathcal{E}$ が以下のような市場構造を持つものとする.

第0期には現物の実物財を取引するスポット市場と, n 種類の金融証券を取引する市場がある. その他の市場は第0期には一切開かれないものとする. したがって, アロー・ドブルー経済とは異なり, 将来の第 T 期には必ず l 種類の財を現物取引する市場が開かれることになる. T 期になってから開かれるスポット市場がいかなるものであるかについては, 各経済構成員が予想をたてることになる. つまり, T 期の不確実性に対応した各状態 $\omega\in\Omega$ ごとのスポット市場を念頭において計画をたてる. 当然のことながら, こうした T 期の s 種類のスポット市場における取引には, 第0期にコミットすることは不可能であり, その点先物市場やドブルー証券の市場と相違していることに注意する必要

がある.

第0期の証券市場における金融証券の価格をベクトル $q=(q^1, \cdots\cdots, q^n) \in R_+{}^n$, スポット市場の価格をベクトル $p_0 \in R_+{}^l$ と書き, T 期に開かれるスポット市場の価格を状態 ω 毎にベクトル $p_\omega \in R_+{}^l, \omega \in \Omega$, とし, 価格ベクトルをまとめて, $p=(p_0, p_T) \in R_+{}^{l(s+1)}, p_T=(p_\omega)_{\omega=1,\cdots\cdots,s}$ と書くことにする. p_0 は第0期の市場価格であるが, p_T は状態 ω 毎に予想された T 期のスポット市場の価格である.

4.3 (証券・スポット市場均衡) $\theta=(\theta^1, \cdots\cdots, \theta^n) \in R^n$ を金融証券 $d_j, j=1, \cdots\cdots, n$, のポートフォリオとし, $x=(x_0, x_T) \in L=R^{l(s+1)}$ を消費ベクトルとする. ここで $x_0 \in R^l$ は第0期の消費ベクトル, $x_T=(x_1, \cdots\cdots, x_\omega, \cdots\cdots, x_s) \in R^{ls}$ は第 T 期に実行する消費ベクトルを各状態 ω 毎に計画したものである. x_T は純粋な状態依存財ベクトル, つまりドブルー証券からなるベクトル, ではない.

各経済構成員 $a \in A$ の計画は, このような証券ポートフォリオと消費計画の組 $(\theta(a), x(a))$ からなり, 本節で考えている金融証券市場, スポット市場の取引構造にマッチした予算制約を満たさなければならない.

いま, 価格ベクトルを $(q, p) \in R_+{}^n \times R_+{}^{l(s+1)}$ とする. このとき, 構成員 $a \in A$ の計画 $(\theta(a), x(a))$ に対する予算制約は,

(1)　$q \cdot \theta(a) \leqq 0$,

(2)　$(\forall \omega=0, 1, \cdots\cdots, s)\ p_\omega \cdot x_\omega(a) \leqq p_\omega \cdot e_\omega(a) + \theta(a) \cdot D_\omega$

である. ここで $\omega=0$ は第0期を示しており, 証券行列 D には「第0期の証券」d_0 を付加してある. 第4節では, 以下, 各証券 d_j は $\Omega_0=\Omega \cup \{0\}$ の上で定義されるものと考える. d_0 は $\omega=0$ のとき $d_0(\omega)=1, \omega \neq 0$ のとき $d_0(\omega)=0$ を満たす関数である. d_0 は第0期の所得移転を行う金融手段であり, これを内部通貨, IOU などと考えてよい.

上の予算制約を満たす計画 $(\theta(a), x(a)), x(a) \in X_a$, の集合を $\beta(a, q, p)$ と書く. 構成員 $a \in A$ が選択するのは, (1) と (2) の制約を満たす計画の中で選好を最大化する計画であるから, これを需要集合 $\varphi(a, q, p)$ として

$$\varphi(a, q, p)=\{(\theta(a), x(a)) \in \beta(a, q, p) \mid (\eta, y) \in \beta(a, q, p) \text{ ならば } y \not\succ_a x(a)\}$$

と定める.

金融証券 $d_j, j=0, 1, \cdots\cdots, n-1$, を擁する経済 $\mathscr{E}=(\{(X_a, >_a), e(a)\}_{a\in A}, F_T)$ が与えられたとき, $\mathscr{E}$ の**証券・スポット市場均衡**あるいは**アロー均衡** (an Arrow equilibrium) とは, $\theta: A\to R^n$ と $x: A\to L$ および価格ベクトル (q, p) からなる組 $((\theta, x), (q, p))$ で条件

$$(\text{A. }1)(\forall a\in A)(\theta(a), x(a))\in\varphi(a, q, p),$$

$$(\text{A. }2)\ (1)\ \textstyle\sum_{a\in A}\theta(a)\leqq 0,$$

$$(2)\ \textstyle\sum_{a\in A}x(a)\leqq\sum_{a\in A}e(a)$$

を満たすものをいう.

(A. 2) の (1) は金融証券市場における需給の均衡条件で, 右辺が 0 になっているのは, 当初に以前からの証券の持ち越しがないことを意味する. $\theta(a)\in R^n$ の成分は負になってもよく, 空売りが許容されている. x を経済 $\mathscr{E}$ の配分とみれば, (2) は配分の実行可能性の要請である. 各期のスポット市場の需給均衡を状態毎に要請している.

4.4 定理 (金融証券市場の有効性) 経済 $\mathscr{E}=(\{(X_a, >_a), e(a)\}_{a\in A}, F_T)$ において各構成員の選好 $(X_a, >_a)$ は局所非飽和性を満たすものとし, (x, p) を経済 $\mathscr{E}$ のアロー・ドブルー均衡とする. このとき, アロー証券 $d_j, j=1, \cdots\cdots, s$, と 0 期の所得を移転する第 0 期の証券 d_0 が存在すれば, アロー・ドブルー均衡におけるパレート最適な配分 x を $\mathscr{E}$ の証券・スポット市場均衡として実現できる. つまり, $\mathscr{E}$ の証券・スポット市場均衡 $((\theta, x), (q, p))$ が存在する.

証明 $q=(1, \cdots\cdots, 1)\in R_+^n(n=s+1)$ とおく. 各 $a\in A$, 各 $\omega=0, 1, \cdots\cdots, s$ に対し

$$\theta_\omega(a)=p_\omega\cdot(x_\omega(a)-e_\omega(a))$$

とおき, $\theta: A\to R^n$ を定める. つまり, a の第 ω 証券の需要額を状態 ω における a のスポット取引の超過需要価値額に等しくする. このとき, $((\theta, x), (q, p))$ が証券・スポット市場均衡になることを確認する.

まず, $(\theta(a), x(a))$ が a の予算制約を満たすことを確認しよう.

$$(\forall a\in A)q\cdot\theta(a)=\textstyle\sum_{\omega\in\Omega_0}p_\omega\cdot(x_\omega(a)-e_\omega(a))$$
$$=p\cdot x(a)-p\cdot e(a)\leqq 0.$$

この最後の等号・不等号が成立するのは，(x, p) がアロー・ドブルー均衡だからである．

また，$\theta(a)$ の定義から

$$(\forall\omega\in\Omega_0)p_\omega\cdot x_\omega(a)=p_\omega\cdot e_\omega(a)+\theta_\omega(a)$$
$$=p_\omega\cdot e_\omega(a)+\theta(a)\cdot D_\omega$$

を得る．よって，$(\forall a\in A)(\theta(a), x(a))\in\beta(a, q, p)$ となる．

次に，$(\forall a\in A)(\theta(a), x(a))\in\varphi(a, q, p)$ を示したい．そこで，今，仮に $(\eta(a), y(a))\in\beta(a, q, p)$ が $y(a)>_a x(a)$ であったとしよう．(x, p) はアロー・ドブルー均衡だから，$p\cdot y(a)>p\cdot x(a)$，つまり，

$$\textstyle\sum_{\omega\in\Omega_0}p_\omega\cdot(y_\omega(a)-e_\omega(a))>\sum_{\omega\in\Omega_0}p_\omega\cdot(x_\omega(a)-e_\omega(a))=0$$

ここで最後の等号が成立するのは選好の局所非飽和性による．仮定により $(\eta(a). y(a))$ は予算制約を満たしているから

$$(\forall\omega\in\Omega_0)\eta_\omega(a)=\eta(a)\cdot D_\omega\geqq p_\omega\cdot(y_\omega(a)-e_\omega(a))$$

である．したがって，$q=(1, \cdots\cdots, 1)$ より

$$q\cdot\eta(a)\geqq\textstyle\sum_{\omega\in\Omega_0}p_\omega\cdot(y_\omega(a)-e_\omega(a))>0$$

を得るが，これは $(\eta(a), y(a))\in\beta(a, q, p)$ に矛盾する．よって，$(\theta(a), x(a))\in\varphi(a, q, p)$ である．

x が (A. 2) の (2) を満たすのは (x, p) がアロー・ドブルー均衡であることの直接の帰結である．最後に，(A. 2) の (1) をチェックすればよい．

$$(\forall\omega\in\Omega_0)\textstyle\sum_{a\in A}\theta_\omega(a)=\sum_{a\in A}p_\omega\cdot(x_\omega(a)-e_\omega(a))$$
$$=p_\omega\cdot\textstyle\sum_{a\in A}(x_\omega(a)-e_\omega(a))$$
$$\leqq 0.$$

最後の等号・不等号は x の実行可能性による．∎

この定理においてはアロー証券のみを考えることが不可欠なのではない．アロー証券の張る空間があらゆる不確実性に対処しうるように，状態依存所得空間 R^s 全体を張ることがポイントである．事実，次の系が成立する．

系　定理 4.4 の経済 $\mathcal{E}$ において，アロー証券の代わりに，より一般的に証券 $d_j, j=1, \cdots\cdots, n$, が与えられたとする．このとき，これらの証券が作る s 行 n 列の証券行列 D の階数が状態の数 s と等しいならば，定理 4.4 の結論が成立する．

証明　行列 D の階数は s だから，R^n から R^s への線型写像とみるとき，D による R^n の像の次元は s である．したがって，R^s の標準基底を $e_1=(1, 0, \cdots\cdots, 0), \cdots\cdots, e_s=(0, \cdots\cdots, 0, 1)$ とすれば，R^n における s 個のベクトル $v_j, j=1, \cdots\cdots, s$, で $Dv_j=e_j$ となるものが存在する．Dv_j は n 種類の金融証券から構成された複合証券であり，作り方からこれらはアロー証券と同一の状態依存所得をもたらす．ゆえに，定理 4.4 の証明の中で，第 0 期の証券 d_0 とともにこれらの複合証券をアロー証券の代わりに用いても，定理 4.4 の結論が成立する．∎

4.5 (定理の意味)　上の定理と系の意味を考えよう．ドブルーの実物証券の場合であれば，これらを取引する sl 種類の取引市場の創設・存在が，市場価格メカニズムを利用した最適な資源配分を実現するための前提条件となる．不確実性下の市場経済においてパレート最適な資源配分が達成されるには，各個人が不確実性に的確に対処しえなければならない．それには想定しうるすべての自然の状態に依存した所得の移転を，各個人の観点から最も好ましい形で行いえること，つまり，所得配分上最適なリスク・テーキングを実現しうるような金融証券市場の創設・存在のみで十分である．これが上記の定理と系の主張である．

さて，ここで再びアロー・ドブルー均衡における価格 p と証券・スポット市場均衡における価格 p の相違点に注意しておきたい．アロー・ドブルー均衡では，第 0 期に l 種類の財のスポット取引と同時に，実物証券の形で状態に依存した先物の売買を実行している．ベクトル $p=(p_0, p_T)$ の p_0 はスポット市場における財の価格，p_T はドブルー証券または状態に依存した先物売買の価格である．これに対し，証券・スポット市場均衡における価格ベクトル $p=(p_0, p_T)$ では，p_0 はアロー・ドブルー均衡同様第 0 期のスポット取引におけ

る l 種類の財の均衡取引価格であるが，p_T はアロー・ドブルー均衡と異なり，状態依存先物契約の価格ではない．状態に応じて変化すると予想された第 T 期のスポット市場における均衡価格体系である．簡単に言えば予想価格である．したがって，個人 a の消費計画 $x(a)$ のうち，p_T に対応した $x_T(a)$ の部分は，第0期に a が取引にコミットしているわけではない．T 期には $x_T(a)=(x_1(a),\cdots\cdots,x_\omega(a),\cdots\cdots,x_S(a))$ の消費を状態 ω に応じて行おうと計画しているにすぎない．さきのアロー・ドブルー均衡では，$x_T(a)$ は状態に依存した形で個人 a がその消費計画にコミットした先物契約になっている点に注意したい．

不確実性下の経済において最適な資源配分を達成するための新たな市場の開設・創設という観点からは，金融証券市場はドブルー型の実物証券市場よりもドラスチックに効率的である．ls 種類の必要市場数に対し，わずか $(s+1)$ 種類（この中に通貨に相当する第0期の証券を含めたことに注意）の市場数でよいからである．（もし現実的にこの種の取引市場を考えると，実物証券の場合は商品先物市場の1形態であるため，文字通り ls の市場数が必要だろう．金融証券の取引市場は $(s+1)$ 必要になるというよりも，むしろ東京証券市場のような取引市場で $(s+1)$ 種類の証券を取り扱うというイメージになろう．）

しかし，現実の不確実性をすべて表現するような Ω を考えると，取引費用の問題を無視するとしても，全種類の金融証券市場を創設することの可能性を疑わざるを得ないだろう．では，実際のこれまでの証券取引の中に，市場化された既存の金融証券から新しい証券を創出（クリエート）するようなメカニズムはなかっただろうか．この問題を次にとりあげてみたい．

5　金融証券とオプション

5.1（原証券とポートフォリオ）　一般の金融証券は，自然の状態の集合 Ω の上で定義された実数値関数 $d:\Omega\to R$ である．市場化された証券が $d_j, j=1,\cdots\cdots,n,$ で与えられたとき，これらを**原証券**（primitive securities）という．前節のように d_j を状態依存所得空間 R^s のベクトルとみて，原証券を証券行列

D で表現する．原証券 j の各状態における配当額が行列 D の j 列 d_j として表現される．

原証券のポートフォリオは，$\theta=(\theta^1,\cdots\cdots,\theta^n)\in R^n$ で表わされ，j 証券の購入は $\theta^j>0$ で，空売りは $\theta^j<0$ で表わされる．ポートフォリオ θ を組むということは，原証券 $d_j, j=1,\cdots\cdots,n$, を組み合わせて，異なる1つの証券を作ることを意味する．このように θ によって合成された証券を**複合証券** (a derived security) とよぶ．ポートフォリオ θ による複合証券は

$$D\theta=\theta^1d_1+\cdots\cdots+\theta^nd_n$$

である．原証券ベクトル $d_j, j=1,\cdots\cdots,n$, の1つの線型結合である．この形の複合証券の集合を Θ と書こう．つまり，$\Theta=\{D\theta\in R^s|\ \theta\in R^n\}$ である．Θ は状態依存所得空間 R^s の部分線型空間となるが，行列 D の階数が状態の数 s に等しければ，系 4.4 の証明に見られるように，s 行 n 列の証券行列 D に対し，n 行 s 列の行列 V で，DV が s 行 s 列の単位行列 I_s に等しくなるものがある．つまり，V を構成する s 種類の複合証券 $v_k\in\Theta, k=1,\cdots\cdots,s$, は，アロー証券と全く同一の機能を持つことになる．このように，通貨もしくは第0期の証券 d_0 の存在を前提とすれば，原証券 $d_j, j=1,\cdots\cdots,n$, による資源配分の効率性は，証券行列 D の階数が s に等しいかどうかにかかっている．言葉を換えれば，複合証券の集合が状態依存所得空間 R^s と一致するか否かにかかっている．本節と次節において，既存の原証券を用いたポートフォリオを組むのみでは，資源配分上十分な状態間の所得移転が可能ではないときに，所得移転の範囲を拡大し，資源配分の効率性を促進する役割を担いうるオプション取引について，その詳細を分析することにしたい．

5.2 (オプションの定義) オプションの概念を一般的に規定することから始めよう．いま，ある証券 $d:\Omega\to R$ が与えられたとする．このとき，証券 d と実数空間の上で定義された実数値関数 $f:R\to R$ の組 (d,f) をもって，**証券 d の上で書かれたオプション** (an option written on the security d) という．オプションの代わりに**単純オプション** (a simple option) ということもある．また，関数 d と f との合成関数 $f\circ d:\Omega\to R$ をオプションとよぶことも多い．(図 2

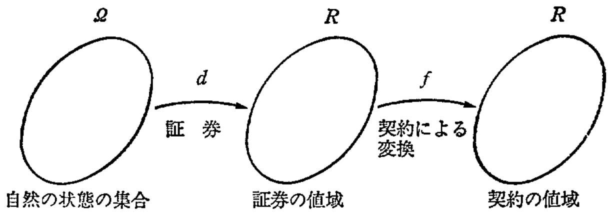

図2　証券 d 上のオプション (d, f)

参照）

ここで与えた定義は広義のオプションで，どちらかと言えば，d 上の契約という側面を強調している．オプション (d, f) は次のように解釈される．つまり，それは証券 $d: \Omega \to R$ に対し，その実現値 $d(\omega)$ を契約 f によって変換することを約定したものである．したがって，オプション (d, f) の購入者は，事実上，合成関数 $f \circ d: \Omega \to R$ が示す証券を保有したことになる．$f \circ d$ をオプションとよぶときは，オプションの証券的側面を強調したことになる．オプション契約や取引の最も重要な側面は，オプション (d, f) が新しい金融証券 $f \circ d$ を創出したことになるという点である．その意味でオプションも複合証券であるが，原証券を用いたポートフォリオによる複合証券とオプションの決定的な相違点は，ポートフォリオは原証券の線型結合であるため原証券が張る部分線型空間を拡大することは無いが，オプションの場合オプション契約 f は非線型となることが一般的で，その結果オプションによる複合証券 $f \circ d$ は，原証券が張る部分線型空間には属さないことが多い．実はこの点がオプションの本質的な役割を明確に示している．

5.3（実務上のオプション契約）　実務の上では，ある証券 d が与えられたとき，任意の実数値関数 f を可能な契約と考え，オプション (d, f) を組むことはまず無い．殆どのオプションは，コールオプション（call option）とよばれる買いオプションと，プットオプション（put option）とよばれる売りオプションの 2 種類である．オプションという呼称の由来もここにある．オプション

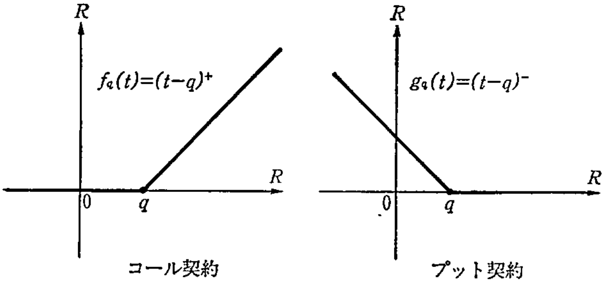

図3　コールとプットのオプション契約

の日常語としての意味は,「選択する自由・権利」であり，経済用語として広くは，ある特定の経済行為を選択する権利を与える契約を指す．実務的には，証券・金融商品・商品などを約定の期日（満期日）に契約価格（実行価格ともいう）で売買する権利を与える契約である．理論的にはこれらのオプションを以下のように定義できる．

任意の実数 t に対し，$t^+=\max\{t,0\}, t^-=\max\{-t,0\}$ とする．証券 $d:\Omega\to R$ が与えられたとき，実数 q に対し，関数 $f_q:R\to R$ を $(\forall t\in R)f_q(t)=(t-q)^+$ と定める．このとき，d と f_q の組 (d,f_q) はオプションであるが，このオプションを**証券 d の上で書かれた実行価格 q のコールオプション** (a call option written on the security d with the striking price q) という．同様に，関数 $g_q:R\to R$ を $(\forall t\in R)g_q(t)=(t-q)^-$ と定めるとき，d と g_q の組 (d,g_q) を**証券 d の上で書かれた実行価格 q のプットオプション** (a put option written on the security d with the striking price q) という．(図3参照)

合成関数として（つまり，複合証券として）コールオプションは $f_q\circ d(\omega)=(d(\omega)-q)^+$，プットオプションは $g_q\circ d(\omega)=(d(\omega)-q)^-$ だから，これらのオプションを購入した人は，その購入に多少のプレミアムを支払うことにより，証券 d がもたらす「リスク」をヘッジしたことになる．

一般に，$t=t^+-t^-$ と分解できるから，

$$(\forall\omega\in\Omega)d(\omega)-q=f_q\circ d(\omega)-g_q\circ d(\omega)$$

となるが，これは

$$(\forall\,\omega\in\Omega)f_q\circ d(\omega)=g_q\circ d(\omega)+d(\omega)-q$$

という形で，コールオプション，プットオプション，オプションが書かれた証券，この3者が実現する状態依存所得の関係を示している．

6 オプションと資源配分機能

6.1（売買オプションが張る状態依存所得空間） 市場で取引される原証券を $d_j, j=1,\cdots\cdots,n$, とする．原証券の各々を状態依存所得空間 R^s のベクトルとみなすように，原証券 d_j の上で書かれたオプション (d_j,f) が創造する複合証券 $f\circ d_j$ を R^s のベクトルとみなそう．このとき，原証券 $d_j, j=1,\cdots\cdots,n$, の上で書かれたオプション全体が張る（もしくは，生成する）R^s の部分線型空間を L_O と書く．また，オプションをコールオプションに限定したときに生成される部分線型空間を L_C, プットオプションに限定したときに生成される部分線型空間を L_P と書く．定義から当然 $L_C\subset L_O, L_P\subset L_O$ となるが，実は $L_O=L_C=L_P$ が成立する．つまり，市場に存在する金融証券 $d_j, j=1,\cdots\cdots,n$, の上で書かれるオプション全体が張る状態依存所得空間内の部分線型空間は，一般的なオプションを考えなくとも，コールオプションのみ，あるいはプットオプションのみが張る空間と一致する．これは実務上取引の対象となるオプションがコールオプションとプットオプションであるという事実を理論的に裏付けていることにもなる．オプションが張る空間を問題にする場合，コールオプションあるいはプットオプションが張る空間を分析すれば十分なのである．

6.2 命題（売買オプションの十分性）

$$L_O=L_C=L_P$$

証明 $L_O=L_C$ を示す．コールオプションはオプションだから $L_C\subset L_O$ である．したがって，$L_O\subset L_C$ を示せばよい．

$w\in L_O$ としよう．L_O の定義から $w=t_1u_1+\cdots\cdots+t_ku_k, (1\leqq k\leqq s)$, 各 $j=1,\cdots\cdots,k$ について $t_j\in R, u_j\in R^s$ で，かつ，各 u_j は d_1 から d_n までのいずれかの証券 $d_{i(j)}$ の上で書かれたオプション $(d_{i(j)},f_j)$ で $u_j=f_j\circ d_{i(j)}$ と書ける

ものが存在する．$w \in L_C$ を示すには，各 u_j がいずれも L_C に属すること，つまり，コールオプションの線型結合になっていること，をいえばよい．添字を略して $u=f \circ d$ として以下の議論を進める．

自然の状態の集合 $\Omega=\{1, \cdots\cdots, s\}$ の d の値による分割 $\{\Omega_i | \ i=1, \cdots\cdots, m\}$ を考え，添字 i の大小順と Ω_i の上での d の値の大小順が一致するように添字 i を定める．もちろん，各 Ω_i の上で d の値と u の値は一定である．d と u の Ω_i 上の値をそれぞれ $v_i, u_i, i=1, \cdots\cdots, m,$ と書く．さらに v_0 を $v_0<v_1$ となるように任意に定める．

証券 d の上で書かれたコールオプション (d, f_q) を実行価格 $q=v_i, i=0, 1, \cdots\cdots, m-1,$ に対して考え，実行価格 $q=v_{j-1}$ に対する合成関数を $f_q \circ d=h_j$ と書く．そして，$h_j, j=1, \cdots\cdots, m$ の係数 c_j を次のように定める．

$$c_1=\frac{u_1}{v_1-v_0}, \quad c_2=\frac{u_2-c_1(v_2-v_0)}{v_2-v_1},$$

$$c_3=\frac{u_3-(c_2(v_3-v_1)+c_1(v_3-v_0))}{v_3-v_2}, \cdots\cdots \text{一般に,}$$

$$c_j=\frac{u_j-(c_{j-1}(v_j-v_{j-2})+\cdots\cdots+c_2(v_j-v_1)+c_1(v_j-v_0))}{v_j-v_{j-1}}$$

とする．このとき，$u=c_1h_1+\cdots\cdots+c_mh_m$ が成立することを確認できる．よって，$u \in L_C$ となり，一般に，$w \in L_C$ が成立する．ゆえに，$L_O \subset L_C$ である．

同種の議論により $L_O \subset L_P$ が示されるが，これは省略する．∎

以下の議論にとって便利なように上の命題を異なった形で表現しておこう．

L_{DO} を証券 $d_j, j=1, \cdots\cdots, n,$ とそれらの上で書かれたオプションが生成する状態依存所得空間 R^s 内の部分線型空間とし，L_{DC} と L_{DP} とをそれぞれオプションをコールオプション，プットオプションに限定したときに，証券とオプションが張る部分線型空間とする．また，この定義の中で証券 $\{d_j | \ j=1, \cdots\cdots, n\}$ の代わりに，それらのポートフォリオとして作られる複合証券の集合 Θ を考える場合は，$L_{\Theta O}, L_{\Theta C}, L_{\Theta P}$ と表記することにする．上記命題は次のようにも表現できる．

系（売買オプションの十分性）

$$(1)\quad L_{DO}=L_{DC}=L_{DP}$$

$$(2)\quad L_{\theta O}=L_{\theta C}=L_{\theta P}$$

6.3（証券とオプションが張る状態依存所得空間の次元）　不確実性下の市場経済における資源配分機能という点で，一般的なオプションも，実際に商取引で用いられるコールオプションやプットオプションも，その機能は違わないことを命題 6.2 と系とが示していた．

第4節でみたように，既存の金融証券が張る状態依存所得空間の次元が，状態の数 s と一致すれば，最適な資源配分を均衡において実現できる．市場に既に存在する金融証券がこのような条件を満たさなくとも，オプションの導入によって創造される新しい複合証券が補完的に機能し，金融証券とオプションが張る所得空間の次元が増大する．そこで次に，オプションがこのような機能を十分に発揮するための条件を示すことにしたい．

まず，記号を幾つか導入する．証券 d_j とその上で書かれたオプションが生成する部分線型空間を $L_j \subset R^s$ と書く．各 $j=1, \cdots\cdots, n$, に対し， $J_j, e_j(\omega, \omega'), S_j$ を次のように定める．

$$J_j=\{(\omega, \omega') \in \Omega\times\Omega \mid \omega<\omega' \text{ かつ } d_j(\omega)=d_j(\omega')\},$$

$$e_j(\omega, \omega')=(0, \cdots, 0, \overset{\omega}{1}, 0, \cdots, 0, -\overset{\omega'}{1}, 0, \cdots, 0),$$

$$S_j=\mathrm{span}\ \{e_j(\omega, \omega') \mid (\omega, \omega') \in J_j\}.$$

$e_j(\omega, \omega')$ は ω と ω' 以外の座標はすべて0で ω 座標は 1, ω' 座標は -1 の R^s のベクトル, S_j は証券 d_j の値が等しい2つの状態 ω, ω' を「逆向き」としたベクトルが生成する部分線型空間である．この S_j を用いて状態依存所得空間内の部分線型空間 L_{DO}（したがって，L_{DC} と L_{DP}）の次元，$\dim(L_{DO})$，が s となる条件を表現できる．

6.4 命題（オプションの効率性条件）

$$\dim\ (L_{DO})=s \iff \cap_{j=1,\cdots\cdots,n} S_j=\{0\}$$

証明　$L_{DO}=L_1+\cdots\cdots+L_n$ だから，$L_{DO}^{\perp}, L_j^{\perp}$ を R^s における L_{DO}, L_j の直交補空間とすれば，$v \in L_{DO}^{\perp} \iff v \in \cap_{j=1,\cdots\cdots,n} L_j^{\perp}$ である．したがって，各 j について $L_j=S_j^{\perp}$ が成立すれば，$L_j^{\perp}=(S_j^{\perp})^{\perp}=S_j$ より，

$$\dim(L_{DO})=s \Leftrightarrow L_{DO}{}^{\perp}=\{0\}$$
$$\Leftrightarrow \cap_{j=1,\ldots\ldots,n} L_j{}^{\perp}=\{0\}$$
$$\Leftrightarrow \cap_{j=1,\ldots\ldots,n} S_j=\{0\}$$

を得る．ところが，

$$v \in L_j \Leftrightarrow (\forall(\omega,\omega') \in J_j)v(\omega)=v(\omega')$$
$$\Leftrightarrow (\forall(\omega,\omega') \in J_j)e_j(\omega,\omega')\cdot v=0$$
$$\Leftrightarrow v \in S_j{}^{\perp}$$

であり，$L_j=S_j{}^{\perp}$ が成立している．ここで，第1行の $\Leftarrow$ が成立する理由は，各 $\omega \in \Omega$ に対し，オプション (d_j, f_ω) を

$$f_\omega(t)=\begin{cases} 1 & , \ t=d_j(\omega) \\ 0 & , \ t\neq d_j(\omega) \end{cases}$$

によって定めれば，$L_j \supset \mathrm{span}\,\{f_\omega \circ d_j \in R^s \mid \omega \in \Omega\}$ が成立するからである．■

6.5（ポートフォリオとオプション） 上の命題は，市場に存在する金融証券のみでは，状態依存所得空間内の任意の方向に所得移転を行う手段を持たないとき，オプション取引の導入によりそれを可能にするための必要・十分条件を与えている．不確実性下の経済においてパレート最適な資源配分を達成しうるような1つの経済環境を示しているのである．具体的に金融証券の行列 D が与えられたとき，命題6.4の条件 $\cap_j S_j=\{0\}$ が成立するか否かをチェックするのは困難ではない．

命題の証明から分かるように，通常のオプションの弱みは，原証券が相異なる2つの状態 ω, ω' を識別しえないとき，オプションによって創出した複合証券も ω と ω' とを識別しえないことである．このような単純オプションの弱点は，オプションを既存の個々の証券の上にのみ書かせるのではなく，それらのポートフォリオに書かせることにより（つまり，既存の証券の線型結合上に書かせることにより）多少とも改めることが可能である．

例えば，2種類の証券 d_1, d_2 がベクトル $d_1=(1,2,1,2), d_2=(0,0,1,1)$ によって与えられたとしよう．このとき，d_1 の上で書かれるオプションは状態1と3，2と4を識別しえないし，d_2 の上で書かれるオプションは状態1と2，3

と4を識別できない．ところがポートフォリオ $\theta=(1,2)$ によってできる複合証券は，$(1,2,1,2)+2(0,0,1,1)=(1,2,3,4)$ だから，すべての状態を的確に識別する証券となり，単一の既存の証券の上で書かれるオプションと比較し，より有力な資源配分上の手段を提供する．その結果，オプションの効率性の条件としては，さきの命題の場合と比較し，よりすっきりした形の必要・十分条件が得られる．これが次の定理である．なお，第6節の定理・命題は，いずれも Ross (1976) によるものである．

6.6 定理

$$\dim(L_{\Theta O})=s \iff (\exists\theta\in\Theta)(\forall\omega,\omega'\in\Omega,\omega\neq\omega')(D\theta)^{\omega}\neq(D\theta)^{\omega'}$$

証明　($\Leftarrow$) $\theta\in\Theta,(\forall\omega\neq\omega')(D\theta)^{\omega}\neq(D\theta)^{\omega'}$ としよう．各 $\omega\in\Omega$ に対し，オプション $(D\theta,f_{\omega})$ を

$$f_{\omega}(t)=\begin{cases}1 & ,\ t=(D\theta)^{\omega}\\ 0 & ,\ t\neq(D\theta)^{\omega}\end{cases}$$

と定めれば，行列 $[f_1\circ\theta,\cdots\cdots,f_{\omega}\circ\theta,\cdots\cdots,f_s\circ\theta]$ は，行を適当に入れ替えることにより，単位行列 I_s に等しいと考えて，一般性を失わない．よって，$\dim(L_{\Theta O})=s$ を得る．

($\Rightarrow$)　$\dim(L_{\Theta O})=s$ とする．集合 C，$C(\omega,\omega')$ を

$$C=\{\eta\in R^n|\ (\exists\omega\neq\omega')(D\eta)^{\omega}=(D\eta)^{\omega'}\},$$
$$C(\omega,\omega')=\{\eta\in R^n|\ (D\eta)^{\omega}=(D\eta)^{\omega'}\}$$

と定めれば，$C=\cup\{C(\omega,\omega')|\ \omega,\omega'\in\Omega,\omega\neq\omega'\}$ である．

$\eta\in R^n$ に対し，$(\exists\omega\neq\omega')(D\eta)^{\omega}=(D\eta)^{\omega'}$ ならば $\eta\in C$ である．上の定理中の右辺の否定命題が成立し $(\forall\eta\in R^n)(\exists\omega\neq\omega')(D\eta)^{\omega}=(D\eta)^{\omega'}$ ならば，$C=R^n$ である．$\omega\neq\omega'$ に対し $C(\omega,\omega')$ は R^n の部分線型空間だから，仮に $C=R^n$ だったとすれば，ある $\omega\neq\omega'$ に対し $C(\omega,\omega')=R^n$ となる．よって，$D_{\omega}=D_{\omega'}$ が成立する．しかし，これは $\dim(L_{\Theta O})<s$ を意味し，仮定に反する．■

文　献

Arrow, K. J., 1953, Le Rôle des Valeurs Boursières pour la Repartition de la Meillure des Risques" *Econometrie*, Colloq. Internat., C. N. R. S. 40, 41—47.

Translated in: *Review of Economic Studies* 31, 1964, 91-96.

Arrow, K. J., and G. Debreu, 1954, Existence of Equilibrium for a Competitive Economy. *Econometrica* 22, 265—290.

Breeden, D., and R. Litzenberger, 1978, Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices, *Journal of Business* 51, 621—651.

Debreu, G., 1953, Une Economie de l'Incertain, unpublished, Electricité de France.

Debreu, D., 1959, *Theory of Value*, New York: John Wiley.

Duffie, D., 1988, *Security Markets: Stochastic Models*, New York: Academic Press.

Huang, C., and R. Litzenberger, 1988, *Foudations for Financial Economics*, New York: North-Holland.

伊藤 清, 1976,『確率論』岩波書店.

McKenzie, L., 1955, Competitive Equilibrium with Dependent Donsumer Preferences, in National Bureau of Standards and Department of the Air Force, *The Second Symposium on Linear Programming*, Washington D. C.

Nikaido, H., 1956, On the Classical Multilateral Exchange Problem, *Metroeconomica* 8, 135—145.

Ross, S. A., 1976, Options and Efficiency, *Quarterly Journal of Economics* 90, 75—89.

Varian, H. R., 1987, The Arbitrage Principle in Financial Economics, *Journal of Economic Perspectives* 1, 55—72.

Walras, L., 1874—1877, *Elements d'Economie Politique Pure*, Lausanne: Corbaz. Translated as: *Elements of Pure Economics*, Chicago: Irwin (1954).

[本稿は財団法人日本証券奨学財団の研究調査助成金による研究『証券市場における先物・オプション取引の一般均衡分析』の一部である.]

(一橋大学教授)