

混合型株価変動モデルとオプション価格

三 浦 良 造

1 はじめに

本年（1989年）6月12日に大阪証券取引所において、日経平均株価を対象とするオプション取引が開始された。本年秋以降にはTOPIX（東証株価指数）や「名証25」を対象とするオプション取引が、それぞれ東京、名古屋において開始されるようである（[11]）。

オプションとはあらかじめ定められた価格で、定められた期日に（あるいは期日までに）、定められた商品を買うまたは売る権利のことである。日経平均株価などの指数は不確実性を伴って変動するが、指数そのものは特定商品の価格ではない。しいていえば指数の計算方式に合わせて組まれた株式ポートフォリオの価格である。しかしポートフォリオは単品として取引されているわけではない。従ってこのような指数を対象とするオプションではモノを売るまたは買うのではなく、その替りに指数とあらかじめ定められた価格との差に等しい金額のキャッシュを受け渡すのである。

オプションの価格付けの研究は株式オプションの価格という形をとって行われているが、対象はとくに株式に限らず、価格が不確実に変動する商品（または指数のようなもの）であればよい。オプション価格理論の枠組はその適用範囲が大変広い、つまり汎用性が高いのである。オプションは大きく分けて権利行使があらかじめ定められた日（満期日）に限られるヨーロッパ型と満期日までの任意の日に権利行使できるアメリカ型の2つがある。価格理論はヨーロッパ型の方が単純であり、明示的な価格式が与えられている。アメリカ型のオブ

ション価格は明示的な価格式が与えられる場合とそうでない場合がある。いずれの場合においてもヨーロッパ型価格式を基本として用いて、より複雑なアメリカ型オプション価格式を導く、または近似するのである。

このように基本的なヨーロッパ型オプション価格式は Black and Scholes ([1]) によって導かれたのであるが、その導出にあたって重要な部分は満期時における株価の確率分布形である。本稿ではこの満期時における株価の分布形が、現実のデータにおいてはブラック達が仮定した対数正規分布形とは少し異なることを問題としてとりあげ、そのようなデータが生じるランダム・メカニズムの一例を提示する。さらにこの株価変動モデルのもとで成立するヨーロッパ型オプション価格式を導く。つぎに、満期日までのデータをみることによって現実の変動が対数正規モデルからどの程度離れていたかを（事後的にはあるが）判定する統計量の例を提示し検討を加える。これによってオプション価格の現実的な内容が一步立ち入った形で描写される。とりわけていえば株価変動のボラティリティに対する現実的理解を一段と深めることになるだろう。

本稿の構成を述べておく。第2節では離散的混合型の株価変動モデルを示し、そのもとでの株式オプション価格式を第3節で与える。第4節では対数正規分布形からのゆがみを判定しモデルを同定するための統計量を提案する。この統計量と判定の方法を日本の株価データに適用した結果を第5節に示す。第6節では本稿で扱えなかった、オプション価格の偏りの推定問題について簡単に述べる。

2 株価変動モデル

時点 t からオプションの満期時点 T までの期間を n 等分して、第 i 番目の小期間を $(t_{i-1}, t_i]$ で表すことにする。つまり

$$t \equiv t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n \equiv T$$

とし、 $t_i - t_{i-1} = (T - t) / n \equiv \delta$ とする。 $X_i, 1 \leq i \leq n$ を各期間に生じる不確実な変動を含む確率変数とする。 $X_i, 1 \leq i \leq n$ は互いに独立であるとする。各時点 t_0, t_1, \dots, t_n の株価は S_0, S_1, \dots, S_n または $S_{t_0}, S_{t_1}, \dots, S_{t_n} (\equiv S_T)$ で表され、

つぎのような関係にあるとする。

$$S_i/S_{i-1} = e^{X_i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

従って、満期時の株価は

$$S_T = S_0 \cdot e^{X_1 + X_2 + \dots + X_n}$$

と書かれる。

ブラック・ショールズのオプション価格式（以後 B・S 価格式と略称する。）は上の各 X_i が正規分布に従い、平均と分散が各 X_i について共通であるという仮定のもとで導かれる。ここではそれをモデル 1 としておく。

モデル 1: $X_i, 1 \leq i \leq n$ は互いに独立でそれぞれ平均 $\mu_0 \delta$, 分散 $\sigma_0^2 \delta$ の正規分布 ($\mathcal{N}(\mu_0 \delta, \sigma_0^2 \delta)$) と略記する。) に従う。

つぎに X_i の分布が確率的に変化する場合を考える。 $Y_i, 1 \leq i \leq n$ を正規分布 $\mathcal{N}(\mu_0 \delta, \sigma_0^2 \delta)$ に従う独立な確率変数とし、さらに $Z_i, 1 \leq i \leq n$ を $Y_i, 1 \leq i \leq n$ とは独立で正規分布 $\mathcal{N}(\mu_1 \delta, \sigma_1^2 \delta)$ に従う独立な確率変数とする。 $I_i, 1 \leq i \leq n$ を $Y_i, 1 \leq i \leq n, Z_i, 1 \leq i \leq n$ とは独立で 2 項分布に従う、つまり

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{確率 } \varepsilon \\ 0, & \text{確率 } 1 - \varepsilon \end{cases}$$

のように定義される独立な確率変数とする。これらの確率変数を用いてモデル 2 を定義する。

$$\text{モデル 2: } X_i = (1 - I_i) \cdot Y_i + I_i \cdot Z_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

これは $I_i = 1$ の条件下では X_i が Z_i に等しく、 $I_i = 0$ の条件下では Y_i に等しいという意味である。 I_i の値は確率的であり事前にはわからない。従って X_i の確率分布は、 I_i の値について無条件のままでは

$$\begin{aligned} P\{X_i \leq x\} &= P\{X_i \leq x | I_i = 1\} \cdot P\{I_i = 1\} + P\{X_i \leq x | I_i = 0\} \cdot P\{I_i = 0\} \\ &= \varepsilon \cdot P\{Z_i \leq x\} + (1 - \varepsilon) \cdot P\{Y_i \leq x\} \\ &= \varepsilon \cdot N\left(\frac{x - \mu_1 \delta}{\sigma_1 \sqrt{\delta}}\right) + (1 - \varepsilon) \cdot N\left(\frac{x - \mu_0 \delta}{\sigma_0 \sqrt{\delta}}\right) \end{aligned}$$

である。 $N(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数である。 X_i の密度関数は上と同様に 2 つの正規密度関数の一次結合である。従って X_i の確率分布は正規ではな

くなる。ε が小さくて、 $\mu_1 > \mu_0, \sigma_1 > \sigma_0$ であれば右裾が長い山の形をもつ密度関数である。逆に $\mu_1 < \mu_0$ であれば山の左側の裾が長くなる。 $\mu_1 = \mu_0$ で $\sigma_1 > \sigma_0$ であれば対称形は維持されて両裾が正規形より少し長い形になる。一般に混合正規分布は正規分布より裾が長いことが知られている（例えば [14] を参照せよ）。 $\mu_1 = \mu_0$ で $\sigma_1 < \sigma_0$ であれば平均周辺への集中度が強くなる。ε, (μ_0, σ_0), (μ_1, σ_1) の値に応じて多様な（非正規形の）密度関数形を表すことができる。このモデル 2 の意義を述べておこう。t 時点において満期時点 T までの株価変動を考えると、様々な出来事が株価に影響を与えると想定される。様々な出来事の生起とそれによる株価への影響は不確実である。 $\{I_i = 1\}$ が事象の生起を表し、それによって株価の変動が影響されもとの Y_i が取り替わられて Z_i となるのである。株価データを用いて $\log_e(S_i/S_{i-1}) (\equiv X_i)$ の様子を見るとモデル 2 が示す分布形の方がモデル 1 の分布形よりも現実的であると考えられる。その一例が第 5 節の図 2・B に示されている。モデル 2 が示す株価変動は $\mu_1 > \mu_0$ (そして $\sigma_1 > \sigma_0$) であるとき“株価が上向きである”という側面を表現している。 $\mu_1 < \mu_0$ の場合は下向きということになる。モデル 2 はモデル 1 に比べてある 1 つの方向へのゆがみを確率的に追加したものである。そこでモデル 1 を「対数正規モデル」、モデル 2 を「一方向混合正規モデル」と名付けることができる。双方向へのゆがみを表すこともできる。それをモデル 3（双方向混合正規モデル）として表現しておく。まず、上の $I_i, Y_i, Z_i, 1 \leq i \leq n$ とは独立な確率変数 $J_i, U_i, 1 \leq i \leq n$ を定義しておく。 $J_i, 1 \leq i \leq n$ は独立な確率変数で

$$J_i = \begin{cases} 1, & \text{確率 } \eta \\ 0, & \text{確率 } 1 - \eta \end{cases}, \quad 1 \leq i \leq n$$

である。 $U_i, 1 \leq i \leq n$ は $J_i, 1 \leq i \leq n$ とは独立でさらに互いに独立な確率変数で正規分布 $\mathcal{N}(\mu_2 \delta, \sigma_2^2 \delta)$ に従うとする。

$$\text{モデル 3: } X_i = (1 - I_i) \cdot Y_i + I_i \cdot \{(1 - J_i) \cdot Z_i + J_i \cdot U_i\}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

これよりももっと細かく分布形の変化を表すモデルを考えることもできる。しかしそれらは表現が複雑になるだけで議論の方法と結果は上のような単純なものと同様であり、本質的な差異はない。しいていえばデータ分析において当

てはめの精度を上げるのに有効となることはあるだろう。いずれにしろ、これらのモデルは新しいものではなく考え方としては Huber ([3]) の粗大誤差モデル、そして Kon ([9]) の混合正規分布モデルと同一である。このモデルのもとでオプション価格式を導出するところが本稿の特徴である。

ここで本稿で扱うモデルと連続的時刻に対応するモデルでボラティリティが確率的に変動する場合との関係について述べておく。株価の変動が

$$dS_t/S_t = \left(\mu + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t$$

または

$$S_{t+dt}/S_t = e^{\mu dt + \sigma dW_t}$$

(ただし W_t はウィーナー過程である。)

によって記述され、 σ が確率的であるとする。このモデルの特殊な場合としてモデル2は考えられる。つまり各小期間 $(t_{i-1}, t_i]$, $1 \leq i \leq n$ において σ が定数 σ_0 または σ_1 のどちらか一方である場合である。そして σ_0 と σ_1 に対応して μ が定数 μ_0 または μ_1 をとるのである。 σ の確率変動が離散的時刻において生じるというわけである。さらに σ の確率変動が W_t のそれとは独立である場合に対応する。しいて書けば

$$dS_t/S_t = \left\{ (1-I_t) \left(\mu_0 + \frac{1}{2} \sigma_0^2 \right) + I_t \left(\mu_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \right) \right\} dt \\ + \{ (1-I_t) \sigma_0 + I_t \cdot \sigma_1 \} dW_t, \quad t \in (t_{i-1}, t_i)$$

のようになる。 I_t と W_t とは独立である。

このような連続時刻モデルのもとでのオプション価格については Hull and White ([5]) が論じているが、そこでは σ の確率変動が連続時刻的なので明示的な価格式が導かれぬ。モデル2のような離散時刻的な場合には次節で示すように容易に導かれる。従って次節で示すオプション価格式は Hull and White ([5]) の議論の特殊な場合に対応するといってよい。しかし、 σ の変動が連続時刻的であるか離散時刻的であるかの違いにより、得られる価格式が成立する経済世界の範囲についての議論の詰めが少し異なるので、次節ではそ

れを指摘する。

本稿で扱うモデルを実用に付する場合の注意を2つ述べておく。まず1つはパラメータ推定の必要性である。それはモデル1のような単純な場合にも避けられない。 ε, μ, σ をヒストリカルに推定する1つの方法は Kon ([9]) に示されている。しかし現在価格に潜在する情報を用いて推定する、いわゆるインプライド・ボラティリティの算出法のような手順はモデル2と3の場合には研究されていないようである。 ε の推定はとくに困難である。これらは今後の課題である。2つめはモデルの用い方についてである。モデル2のような視点は現在では普及していないのでモデル1のように対数正規形に固執しがちである。そのような傾向において生じやすい誤りを1つ指摘しておく。モデル2のメカニズムで生じたデータをヒストリカルに分析し、その結果をモデル1の視点で用いる場合に誤りが生じる。例として $\mu_1=3\mu_0, \sigma_1=3\sigma_0$ としよう。このときモデル2のもとで X_t の平均は $(3-2\varepsilon)\mu_0\delta$ であり、分散は $\{(9-8\varepsilon)\sigma_0^2+4\varepsilon(1-\varepsilon)\mu_0^2\}\delta$ である。この平均と分散をデータを用いて推定したとする。そして誤って X_t が正規であると想定するとき(モデル1を想定するとき)、実際は右裾が長いのに対称かつ正規形とみなしてしまうのである。平均と分散は同じだが分布形が異なる2つの分布を混同する誤りである。もう少し正確にいうと、確率分布

$$\varepsilon \cdot \mathcal{N}(\mu_0\delta, \sigma_0^2\delta) + (1-\varepsilon) \cdot \mathcal{N}(3\mu_0\delta, 9\sigma_0^2\delta)$$

を

$$\mathcal{N}((3-2\varepsilon)\mu_0\delta, \{(9-8\varepsilon)\sigma_0^2+4\varepsilon(1-\varepsilon)\mu_0^2\}\delta)$$

と見誤るのである。このような状況下ではオプション価格の見積りに偏りが生じる。このような偏りについては Hull ([4]) がよく説明しているのでここでは述べないことにする。

3 オプション価格式

モデル2のもとでのヨーロッパ型コール・オプション価格式を導く。これが

得られればプット・オプション価格はプット・コール・パリティを用いて自動的に求まる。プット・コール・パリティは X_i の分布形に関係なく成立するからである。(例えば三浦 [10] を参照。)

まず $n=2$ の場合を考える。そして $I_1=0, I_2=1$ という条件のもとで考える。 I_i と Y_i, Z_i は互いに独立だからこの条件のもとで Y_1, Z_2 はそれぞれ $\mathcal{N}(\mu_0\delta, \sigma_0^2\delta)$, $\mathcal{N}(\mu_1\delta, \sigma_1^2\delta)$ に従う。従って満期時点の株価 S_T はこの条件下で $S_T = S_t e^{Y_1+Z_2}$ で表される。満期時のコール・オプション価値の期待値は、権利行使価格を K として

$$\begin{aligned} & E[\max\{S_T - K, 0\} | S_t, I_1=0, I_2=1] \\ & = E[\max\{S_t e^{Y_1+Z_2} - K, 0\} | S_t] \end{aligned}$$

である。これをリスクのない金利 r で割引いてオプションの現在価値を求めたいところだが、 I の値がゼロのときと1のときとでは金利が異りうるのが自然であろう。そこで I の値に応じて小期間 (t_{i-1}, t_i) における金利を r_i としておく。 r_i は小期間内で一定であると仮定する。こうしておいたうえで、期間 (t, T) におけるオプションを考える。これは Geske ([2]) が提示した複合オプション (compound option) である。小期間 (t_1, T) においては通常の B-S 価格式で表されるオプションであり、小期間 $[t_0, t_1]$ においては t_1 時点で価値

$$\begin{aligned} & E[e^{-r_2(T-t_1)} \cdot \max\{S_{t_1} \cdot e^{Z_2} - K, 0\} | S_{t_1}] \\ & = S_{t_1} N(h_1) - Ke^{-r_2(T-t_1)} N(h_1 - \sigma_1 \sqrt{T-t_1}) \end{aligned}$$

(ただし

$$h_1 = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{T-t_1}} \left\{ \log_e \frac{S_{t_1}}{K} + \left(r_2 + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \right) (T-t_1) \right\}$$

である。)

に等しくなる複合オプションである。これの t 時点 ($t < t_1$) における価値は

$$\begin{aligned} & E[e^{-r_1(t_1-t)} \cdot E[e^{-r_2(T-t_1)} \cdot \max\{S_{t_1} \cdot e^{Z_2} - K, 0\} | S_{t_1}] | S_t] \\ & = e^{-(r_1+r_2)\delta} \cdot E[\max\{S_t \cdot e^{Y_1+Z_2} - K, 0\} | S_t] \\ & = e^{-(r_1+r_2)\delta} \cdot E[\max\{S_t \cdot e^{(\mu_0+\mu_1)\delta + \sqrt{(\sigma_0^2+\sigma_1^2)\delta} W} - K, 0\} | S_t] \end{aligned}$$

(ただし W は $\mathcal{N}(0, 1)$ に従う確率変数である.)

$$= e^{-(r_1+r_2)\delta} \cdot \int_{\{S_t \cdot e^{a+bW} > K\}} (S_t \cdot e^{a+bW} - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{W^2}{2}} dW$$

(ただし, $a = (\mu_0 + \mu_1)\delta$, $b = \sqrt{(\sigma_0^2 + \sigma_1^2)\delta}$ とおく.)

$$\begin{aligned} &= e^{-(r_1+r_2)\delta} \cdot S_t \cdot e^{a+\frac{1}{2}b^2} \int_{\{W > \frac{1}{b}(\log \frac{K}{S_t} - a)\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(W-b)^2} dW \\ &\quad - K \cdot e^{-(r_1+r_2)\delta} \cdot N\left(\frac{1}{b}\left(\log \frac{S_t}{K} + a\right)\right) \\ &= e^{-(r_1+r_2)\delta} \cdot e^{a+\frac{1}{2}b^2} \cdot S_t \cdot N\left(\frac{1}{b}\left(\log \frac{S_t}{K} + a + b^2\right)\right) \\ &\quad - K \cdot e^{-(r_1+r_2)\delta} \cdot N\left(\frac{1}{b}\left(\log \frac{S_t}{K} + a\right)\right) \end{aligned}$$

である. 各小期間内ではオプション価格が効用関数に依存しないのでリスク中立な経済世界においてこの計算を行っている. ここでは $I_1=0, I_2=1$ の条件下で

$$r_1 = \left(\mu_0 + \frac{1}{2}\sigma_0^2\right)\delta, \quad r_2 = \left(\mu_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)\delta$$

であるから上の式は

$$= S_t \cdot N(h) - K \cdot e^{-(r_1+r_2)\delta} \cdot N(h-b)$$

である. ただし

$$h = \frac{1}{b} \left(\log \frac{S_t}{K} + a + b^2 \right) = \frac{1}{b} \left(\log \frac{S_t}{K \cdot e^{-(r_1+r_2)\delta}} + \frac{1}{2}b^2 \right)$$

である.

この計算結果は条件 $I_1=0, I_2=1$ の替りに $I_1=1, I_2=0$ を置いても同一である. I_t の実現値のなかで 1 の個数 (従ってゼロの個数でもよい) に従って結果が定まる. これに注意しておけば一般の n についての計算は容易に実行される. もう 1 つ重要な点は条件 $I_1=0, I_2=1$ が生起する確率は $(1-\varepsilon) \cdot \varepsilon$ であり, この生起事象内で上の計算が成立する. 他の条件が生起するとき, とくに $I_1=0,$

$I_2=0$, または $I_1=1, I_2=1$ のときは少し異なる結果が得られる。これらそれぞれの事象の生起確率を対応するオプション価格に乘じて足し合せたものが t 時点におけるオプション価格である。それは $\tau=T-t$ とおいて

$$C(S_t, T; K) = \sum_{k=0}^2 \{I_1+I_2=k \text{ のときのコール・オプション価格}\} \cdot P\{I_1+I_2=k\}$$

である。 t 時点においては I_1, I_2 がどの値をとるかが未知なのでこのような期待値の形となる。このオプション価格はリスク中立な経済世界においてのみ成立することに注意しておく。 I_i に関する条件下で求めたオプション価格はリスク中立世界で計算されたものの各経済世界でも成立するものであった。しかし各生起事象のもとでの価格を総合するときに通常の経済世界では効用を用いて総合し、 $u(\cdot)$ を効用関数として

$$C(S_t, \tau; K) = \sum_{k=0}^2 u(\{I_1+I_2=k \text{ のときのコールオプション価格}\}) \cdot P\{I_1+I_2=k\}$$

のように表されるべきである。最後の詰めのところ(だけ)で経済世界、あるいは効用関数に依存する形になったがこれが $n=2$ の場合のモデル2のもとのコール・オプション価格である。

一般の n の場合について、リスク中立世界におけるヨーロッパ型コール・オプション価格を記述しておく。(σ が連続時刻的に不確実な変動をもつ場合の価格は Hull and White ([6]) が論じている。)

$I_i=1$, つまり Z_i が現われるときの r_i を R_1 とし、 $I_i=0$ のときの r_i を R_0 とする。 $I=I_1+\dots+I_n$ とおく。 $I=k$ の条件下のコール・オプション価格は

$$\begin{aligned} C_k(S_t, \tau; K) &= E[e^{-(r_1+r_2+\dots+r_n)\delta} \cdot \max\{S_T - K, 0\} | S_t, I=k] \\ &= e^{-(kR_1+(n-k)R_0)\delta} \cdot E[\max\{S_t \cdot e^{k\mu_1+(n-k)\mu_0+\sqrt{k\sigma_1^2+(n-k)\sigma_0^2}W} - K, 0\} | S_t] \\ &= S_t \cdot N(h_k) - K \cdot e^{-(kR_1+(n-k)R_0)\delta} \cdot N(h_k - b_k) \end{aligned} \quad (1)$$

ただし

$$b_k = \{(k\sigma_1^2 + (n-k)\sigma_0^2)\delta\}^{1/2}$$

$$h_k = \frac{1}{b_k} \left\{ \log_e \frac{S_t}{K} + (kR_1 + (n-k)R_0)\delta + \frac{1}{2}b_k^2 \right\} \quad 1 \leq k \leq n$$

と書き表される。従って t 時点におけるコール・オプション価格は

$$C(S_t, \tau; K) = \sum_{k=0}^n E[e^{-(r_1 + \dots + r_n)\delta} \cdot \max\{S_T - K, 0\} | S_t, I=k] \cdot P\{I=k\}$$

$$= \sum_{k=0}^n C_k(S_t, \tau; K) \cdot P\{I=k\}$$

$$= S_t \cdot \left\{ \sum_{k=0}^n N(h_k) \cdot \binom{n}{k} \varepsilon^k (1-\varepsilon)^{n-k} \right\}$$

$$- K \cdot \left\{ \sum_{k=0}^n e^{-(kR_1 + (n-k)R_0)\delta} \cdot N(h_k - b_k) \cdot \binom{n}{k} \varepsilon^k (1-\varepsilon)^{n-k} \right\} \quad (2)$$

である。ただし $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ である。

この式を吟味しよう。まず r_i とボラティリティ σ がそれぞれ 2 つの値を確率的に、しかも相関 1 で R_0, R_1 そして σ_0, σ_1 の値をとるとしてその確率変動に関して、対応するコール・オプション価格式の期待値をとったものが上の式である。この点で上の (2) 式は Hull and White [5] の (8) 式の特殊な場合といえる。また上の (1) 式は複合オプションとして導いたが、形のうえでは各 k について

$$a_k = (k\mu_1 + (n-k)\mu_0)\delta$$

$$b_k = \{(k\sigma_1^2 + (n-k)\sigma_0^2)\delta\}^{1/2}$$

として、株価変動をモデル 1 のもとで

$$X_i \text{ が } N(a_k/n, b_k^2/n) \text{ に従う}$$

とし、オプション期間中の一定金利が $(kR_1 + (n-k)R_0)\delta/n$ に等しいとする場合のコール・オプション価格と同一である。従って t 時点の価格式はこの k の確率変動に関して、対応する価格式の期待値をとったものとして得られる。つぎに、モデル 2 において X_i の平均と分散は (μ_0, σ_0^2) または (μ_1, σ_1^2) のど

ちらか一方であり小期間 $(t_{i-1}, t_i]$ のなかでは一定である。従ってこの小期間に対して、オプション価格式が効用関数に依存しないという議論が有効であり、価格式をリスク中立世界で求めてもそれはもとの経済世界でも成立するものとして保証される。(この点については、例えば [8] を参照せよ。)しかし、 X_i の平均と分散が連続時刻的に確率変動すると価格式導出の過程でこのような保証が難しくなる。ここがパラメーターの確率変動の扱いにおいて離散時刻的な場合と連続時刻的な場合との違いである。

オプション価格式 (2) をモデル 2 と連携させるとモデルの操作性のよさが現われることも指摘しておこう。オプション期間中に X_i のパラメーター μ と σ が変化すると見込まれるとき、変化の方向と変化の大きさを μ と σ の値の増減によって表現する。変化の時期と変化の不確実性を I_i と ε の値によって表現する。変化のシナリオが一本であれば I_i の値を確定することにより、オプション価格に関しては (1) 式の C_k が得られる。シナリオが多岐に渡れば (2) 式のようにそれぞれの可能性を生起確率を用いて平均することによりオプション価格式が得られる。コール・オプション価格はボラティリティ σ の増加関数なので、上の (1) 式で $R_0=R_1$ とするとき $\sigma_0 < \sigma_1$ であれば、 k の値が大きい程 C_k の値は大きい。従ってシナリオに応じた価格を算出し比較することにより当面のオプション価格の妥当性を測ることができるのである。分布の確率的大小に応じたオプション価格の大小の比較はすでに田畑・沢木 ([13]) によって論じられているが、本節の方法は表現がパラメトリックであるため大小の差が計測できるという利点がある。

4 モデルの同定

第2節の3つのモデルは株価変動の方向づけを大まかに表現したものである。オプション期間中そして満期において、株価変動の方向が期首に想定した通りであったかまたは異なる方向であったかを判定する手段が欲しいところである。この判断が伴えば事後的であれ期首に設定したオプション価格の妥当性あるいは偏りについてある程度の計測が可能である。Kon ([9]) が用いた混合正規

分布の母数推定法を用いれば ε, μ, σ の推定が可能である。それをもとにしてデータが得られた期間中におけるモデルの同定は可能である。ここではもっと簡単な統計量を扱うことにする。統計量の値をみて第2節の3つのモデルのうちの1つに、大まかにではあるが同定できるように工夫する。分布の形を判断してモデルの同定を行うだけであって母数の推定までは行わない。

用いる統計量は X_1, X_2, \dots, X_n の標本平均 \bar{X} と標本メディアン X_M , 四分位点 V そして標本標準偏差 $\hat{\sigma}$ である。それぞれの定義はつぎの通りである。

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad X_M = \text{median}\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

$$V = (X(.75) - X(.25))/2$$

(ただし $X(t)$ は順序統計量であり、 $t=i/(n+1)$ のとき $X(t)$ は小さい方から i 番目の観測値である。)

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

これらの統計量の性質を、 X_1, X_2, \dots, X_n が独立であり、同一の分布 F に従う場合について述べ、そのなかで分布の正規性がくずれるときの特徴を指摘しておく。この特徴を組み合わせてモデルの同定のために用いる。

第2節で述べたように t 時点から満期時点 T までの株価の変動が

$$S_{it} = S_i \cdot e^{X_1 + X_2 + \dots + X_t}, \quad 1 \leq i \leq n$$

と表されると仮定する。従って X_i の平均と分散はそれぞれ (定数) $\times (1/n)$ のオーダーであり、 n が大きくなることはオプション期間をさらに細かく分割することを意味する。

$$\mu_F = \int x dF(x), \quad \sigma_F^2 = \int (x - \mu_F)^2 dF(x)$$

とおく。

性質:

(i) \bar{X} は n が大きいとき近似的に $\mathcal{N}(\mu_F, \sigma_F^2/n)$ に従う。 F が正規分布

$\mathcal{N}(\mu\tau/n, \sigma^2\tau/n)$ であるときは \bar{X} の分布は正確に $\mathcal{N}(\mu\tau/n, \sigma^2\tau/n^2)$ である。

(ii) X_M は n が大きいとき近似的に $\mathcal{N}(\xi, 1/(4nf(\xi)^2))$ に従う。ただし ξ は $F(\xi)=0.5$ を満足する点、つまり F のメディアンである。 f は F の密度関数である。

(iii) n が大きいとき、 $\bar{X}-X_M$ の期待値は $\mu_F-\xi$ である。 F が対称ならば $\mu_F-\xi=0$ である。 F が右裾の長い分布であるとき $\mu_F-\xi$ は正の大きな値をとる。

ここで $\bar{X}-X_M$ の分散を求めておこう。形式的な演算を行うことによって求める。 $F_n(\cdot)$ を X_1, X_2, \dots, X_n の経験分布関数とする。 $\Gamma_n(\cdot)$ を $X_i \equiv F^{-1}(U_i)$ とするときの一樣確率変数 $U_i, 1 \leq i \leq n$ の経験分布関数とする。

$$\begin{aligned} \bar{X}-X_M &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_n^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right) - F_n^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ F_n^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right) - F^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right) \right\} \\ &\quad - \left\{ F_n^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \right\} \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right) - F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \right\} \end{aligned}$$

である。第3項は F が対称分布であるとき $1/\sqrt{n}$ のオーダーでゼロに収束する。第1項と第2項の和の分散を調べる。 $F_n(x) = \Gamma_n(F(x))$ という関係が定義により成立するので少し粗いが $F_n^{-1}(t) = F^{-1}(\Gamma_n^{-1}(t))$ である。これを用いて第1項と第2項の和は

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ F^{-1}\left(\Gamma_n^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)\right) - F^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right) \right\} - \left\{ F^{-1}\left(\Gamma_n^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) - F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \right\}$$

と書かれる。 n が大きいとき、 $\sqrt{n} \{ \Gamma_n^{-1}(t) - t \}$ の分布はブラウン橋 (Brownian Bridge) $-B(t)$ により近似されるので、上の和の分布は

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^1 \frac{B(t)}{f(F^{-1}(t))} dt + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{B(0.5)}{f(F^{-1}(0.5))}$$

で近似される。これは正規分布に従う確率変数であり、平均はゼロで分散は

$$\frac{1}{n} \int_0^1 \int_0^1 \frac{B(s)}{f(F^{-1}(0.5))} \cdot \frac{B(t)}{f(F^{-1}(t))} ds dt + \frac{1}{n} \left(\frac{B(0.5)}{f(F^{-1}(0.5))} \right)^2 - \frac{2}{n} \frac{B(0.5)}{f(F^{-1}(0.5))} \int_0^1 \frac{B(t)}{f(F^{-1}(t))} dt$$

の期待値に等しい。第1項、第2項の期待値はそれぞれ \bar{X} , X_M の分散に等しい。第3項の期待値は \bar{X} と X_M の共分散である。それは形式的には

$$\frac{1}{n} \left\{ \int_0^{1/2} \frac{t}{f(F^{-1}(t))} dt + \int_{1/2}^1 \frac{(1-t)}{f(F^{-1}(t))} dt \right\} / f(F^{-1}(0.5))$$

と表される。この分散式をみて直ちに F の分布形と対応をつけて分散の大小を論じるのは難しい。ここでは \bar{X} と X_M の、 n が大きいときの相関係数を記すだけに留めておく。それは

$$\frac{2}{\sigma_F} \left\{ \int_0^{1/2} \frac{t}{f(F^{-1}(t))} dt + \int_{1/2}^1 \frac{(1-t)}{f(F^{-1}(t))} dt \right\}$$

である。ここで用いた数学的方法は参考文献 [12] に詳しく説明されている。

性質:

- (iv) X_i が正規分布に従うとき、四分位点は X_i の分布の標準偏差の約 0.675 倍である。従って、このとき $(0.675)\hat{\sigma}/V$ は 1 の回りに集中して分布する。 X_i の分布が正規よりも両裾が長いとき、 $(0.675)\hat{\sigma}/V$ は 1 よりも大きな値をとる傾向が強くなる。

性質(iv)についてここで簡単に説明しておこう。一般に F をゼロに関して対称な分布とすると、尺度母数はずぎのように定義される。(詳しくは文献 [3] を参照せよ。) $\chi(\cdot)$ を偶関数として、

$$\int \chi\left(\frac{y}{s}\right) dF(y) = 0 \tag{3}$$

を満足する s を尺度母数と呼ぶ。 σ_F^2 は

$$\chi(y) = y^2 - 1,$$

$V (\equiv F^{-1}(0.75))$ は

$$\chi(y) = \text{sgn}\{|y| - 1\}$$

(ただし $\text{sgn}\{y\}=y/|y|$ である.)

のように $\chi(\cdot)$ を特定するときを得られる尺度母数である. F を $\mathcal{N}(0, \sigma_F^2)$ とするとき,

$$F^{-1}(0.75) = (0.675)\sigma_F$$

が成立する. 対称分布 G が F より裾が重い, または長いとは $G^{-1}(t)/F^{-1}(t)$ が $1/2 < t < 1$ の範囲で t の増加関数であることとして定義される. 正規分布 F より裾が重い G のもとではゼロから遠い位置により多くの確率が分布するので, (3) 式を満足するためには $G^{-1}(0.75)$ より σ_G の方がずっと大きくなるので

$$(0.675)\sigma_G > G^{-1}(0.75)$$

という関係になりやすい.

さて, モデルの同定のための統計量を定義する.

$$\alpha = \bar{X} - X_M$$

$$\beta = (0.675)\hat{\sigma}/V$$

とする. α がゼロに近いときは性質(i)(ii)(iii)によりモデル1またはモデル3が妥当である. このなかで β が1に近ければ性質(iv)によりモデル1と判断し, β が1から遠ければモデル3と考えるのが自然である. α がゼロから離れていて正の値であるときは性質(iii)によりモデル2の上向き, つまり $\mu_1 > \mu_0, (\sigma_1 > \sigma_0)$ の場合であり, 負の値であるときはモデル2の下向きと考えるのが自然である. このとき β はとくに有効な役割をもたない.

5 日本の株価データ

第2節のモデルと第4節の統計量および判定方法を適用して, 日本の株価変動の様子を調べた. 本節ではその結果をまとめておく. オプション価格のデータは本稿では扱えなかった. まだ取引が開始されたばかりなのでデータの量が整うまで待つことにする. 株価データとして, 日本証券経済研究所計測室作成の月次投資収益率データを用いた^{注)}.

1952年1月から1981年12月まで30年間の, 東京証券取引所第一部上場銘柄

柄の(荷重)平均の月次投資収益率を5年間毎, 6期間に分割しそれぞれの期間について,

A: $X_t (\equiv \log_e(S_{t+1}/S_t))$ の時系列

B: X_t の正規確率プロット

C: \bar{X} と X_M の時系列

D: $2 \cdot (0.675) \cdot \hat{\sigma}$ と $2 \cdot V$ の時系列

を算出し図に表した. 図の数字1から6は時期の順を表し, 英字AからDは上記の通り図の内容を表す. CとDは60ヶ月分のデータを最初からの k 個 $1 \leq k \leq 60$, について統計量の値を計算し時系列として表した.

第1期は図1.Bにみられるように全体としてほぼ正規である. しかし図1.Aにみられるように, 60ヶ月のうち前半はかなり乱雑な分布であるが後半はばらつきの度合が小さくなっている. 前半と後半を通じて平均は同等のようである. これはモデル2のケースで $\mu_1 = \mu_0, \sigma_0 < \sigma_1$ の場合といえよう. 統計量 $\alpha (= \bar{X} - X_M)$ の値はゼロに近く, $\beta (= (0.675) \cdot \hat{\sigma} / V)$ は1よりやや大きい(図1.C, 図1.D).

第2期はモデル2の下向きのケースである. 60ヶ月のうち時々 X_t の小さな値が生じる(図2.A). 全体としては左裾長の分布形である(図2.B). α の値は負である(図2.C).

第3期はモデル3のケースである. $\{J=1\}, (\mu_2 < \mu_0)$ の生起確率 η が $\{I=1\}, (\mu_1 < \mu_0)$ の生起確率 ε より小さい(図3.A). 両裾が正規より長く, 右裾は左裾よりさらに長い(図3.B). α は正の値である(図3.C).

第4期は第2期とほぼ同様にモデル2の下向きのケースである.

第5期は60ヶ月を上期, 中期, 下期に分けてそれぞれの期で正規のようであるが分布の母数値が異なる(図5.A). 第5期の分布形はモデルの同定が難しい. モデル1として約20ヶ月毎に母数の値が変化したとみるか, あるいはモデル3で $\{I=1\}, (\mu_1 > \mu_0)$ と $\{J=1\}, (\mu_2 < \mu_0)$ の生起確率 ε と η がそれぞれ大きくて, どちらかが連続して生起する形である. しかし全体としてほぼ正規である(図5.B). α はゼロに近く(図5.C), β は1より小さい(図5.D).

図1.A

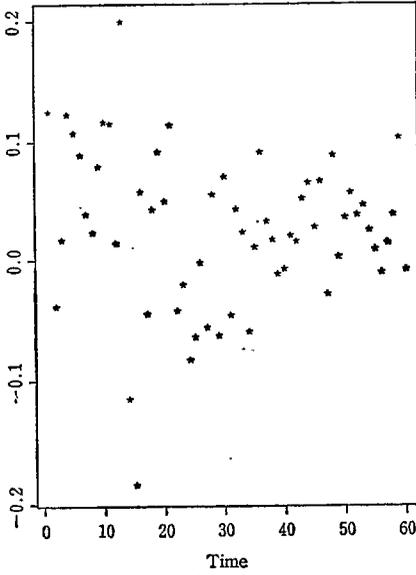


図1.B

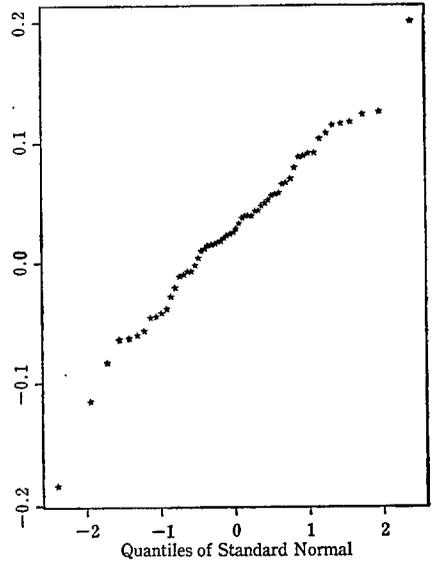


図1.C

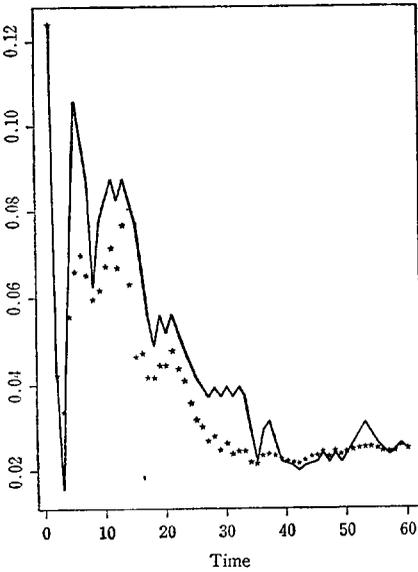


図1.D

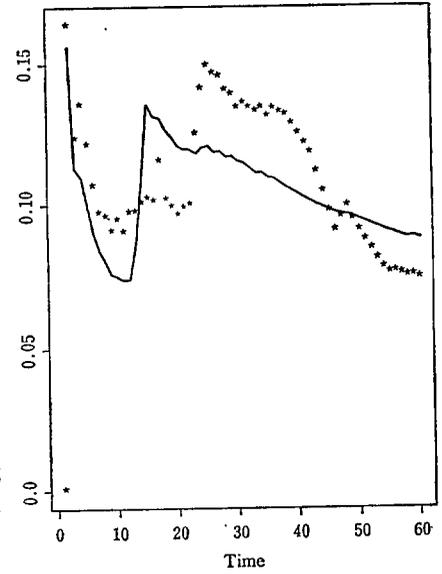


図 2.A

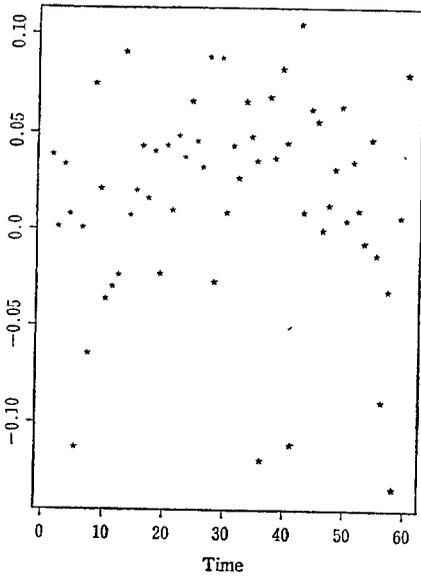


図 2.B

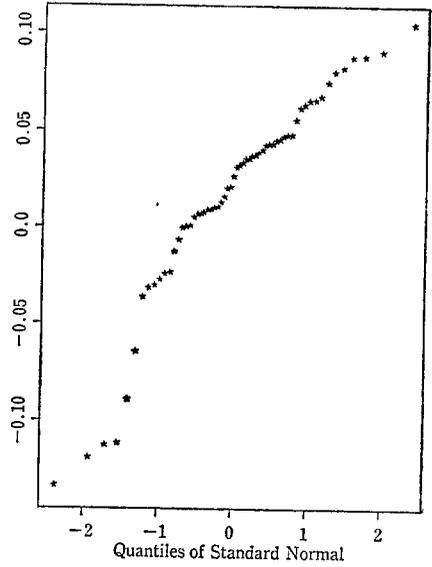


図 2.C

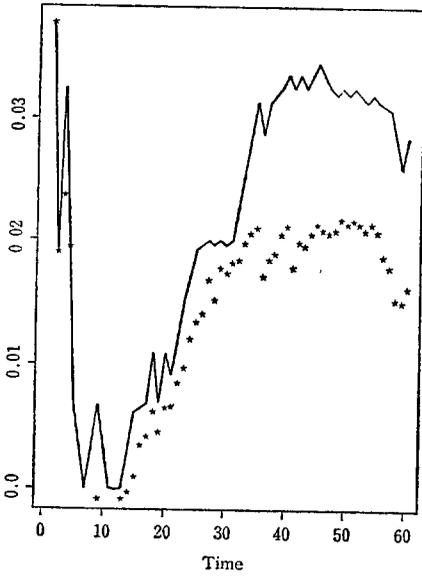


図 2.D

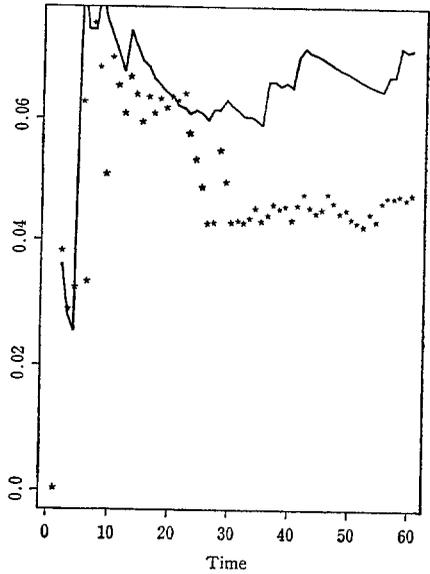


図 3. A

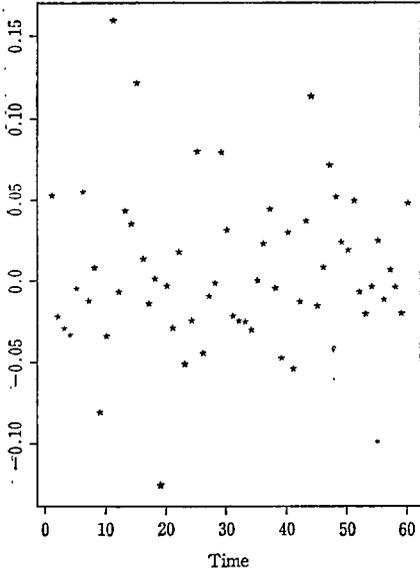


図 3. B

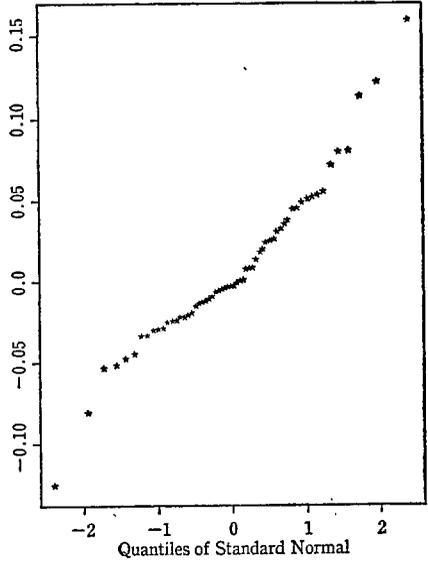


図 3. C

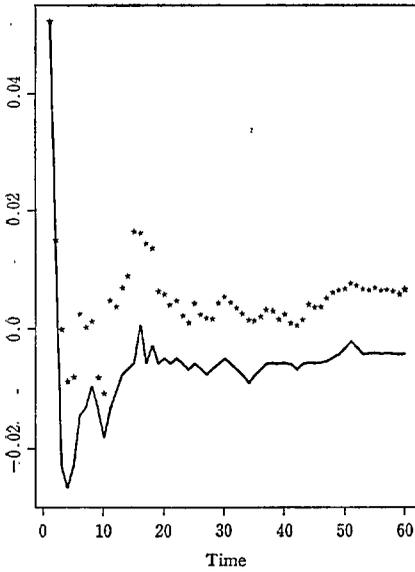
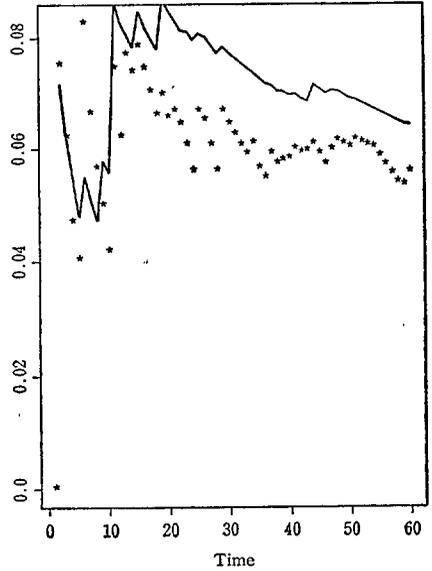


図 3. D



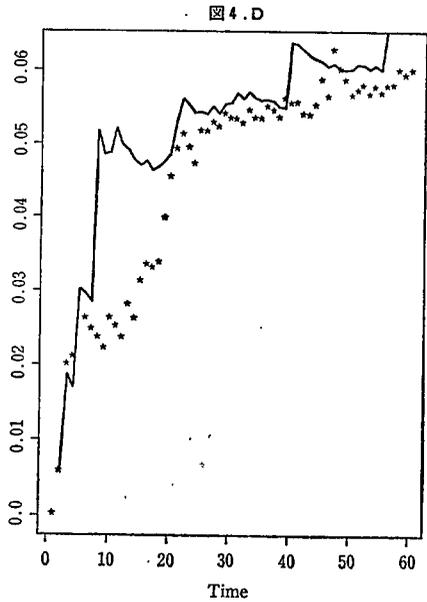
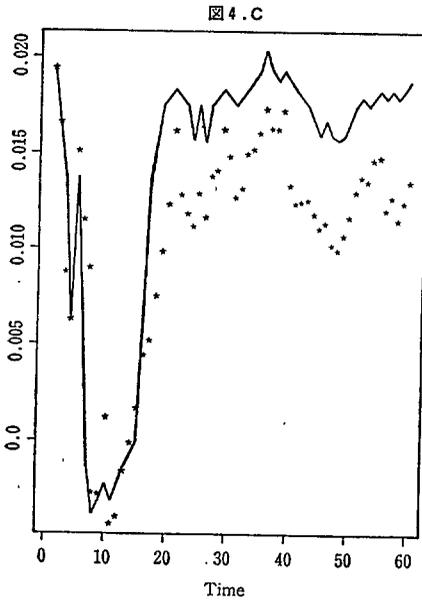
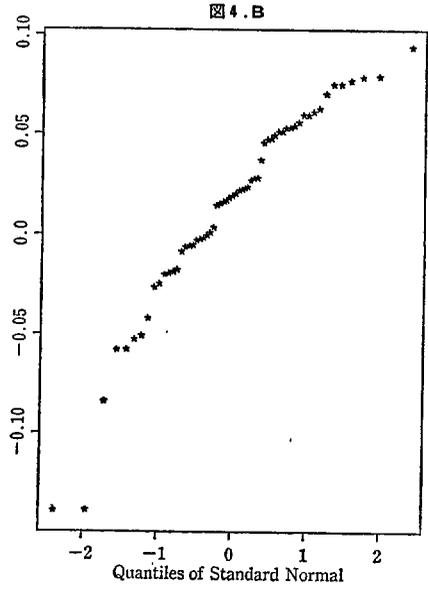
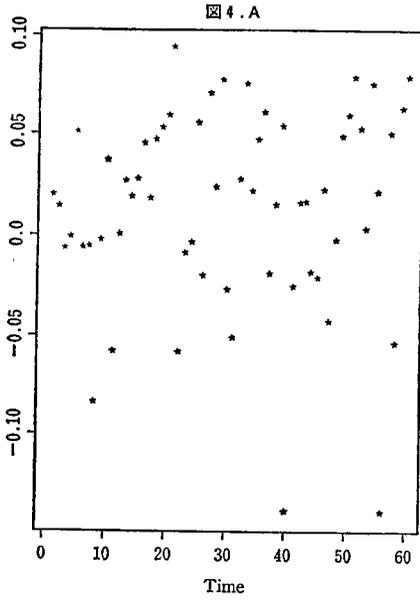


図 5 . A

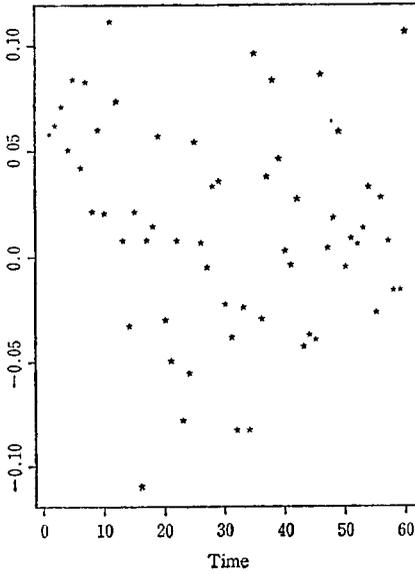


図 5 . B

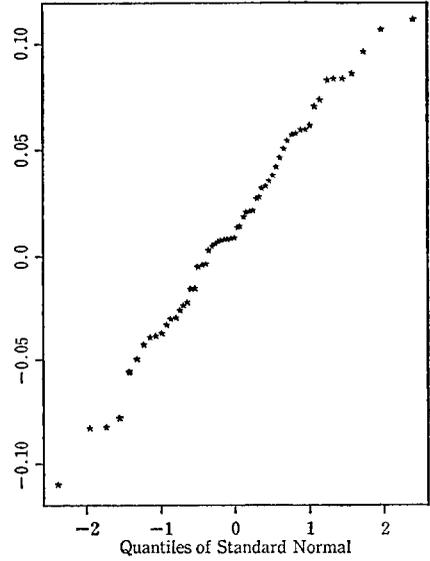


図 5 . C

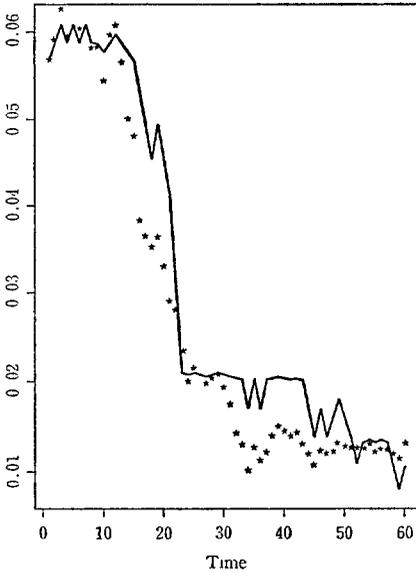


図 5 . D

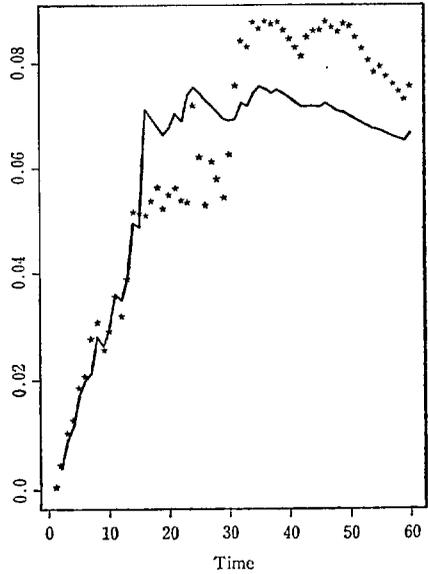


図 6 . A

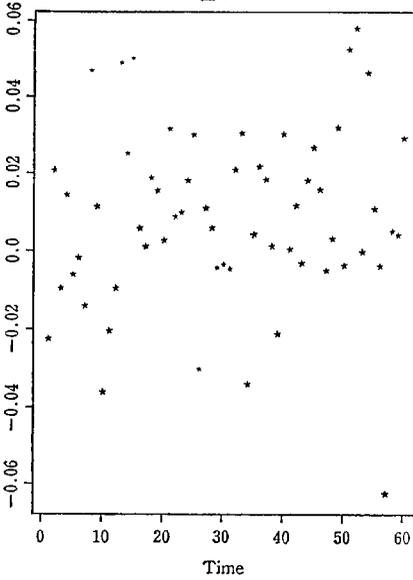


図 6 . B

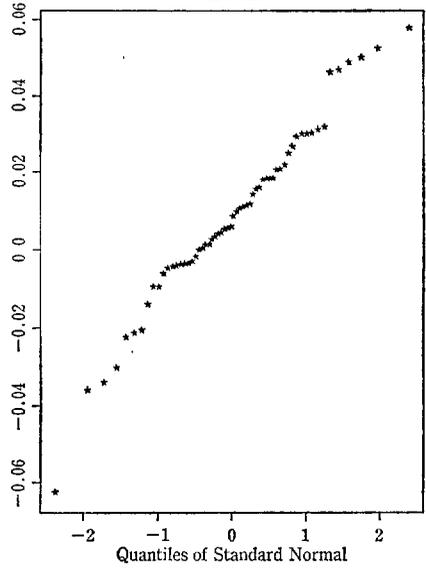


図 6 . C

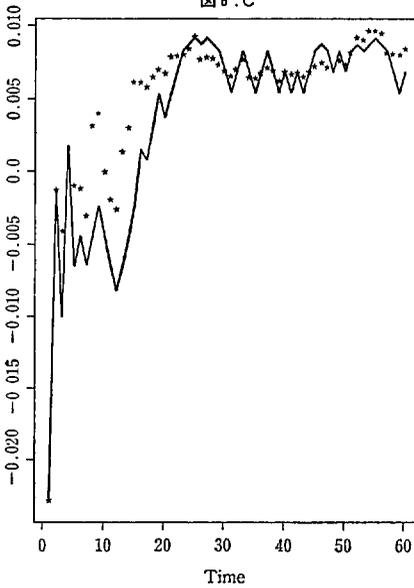
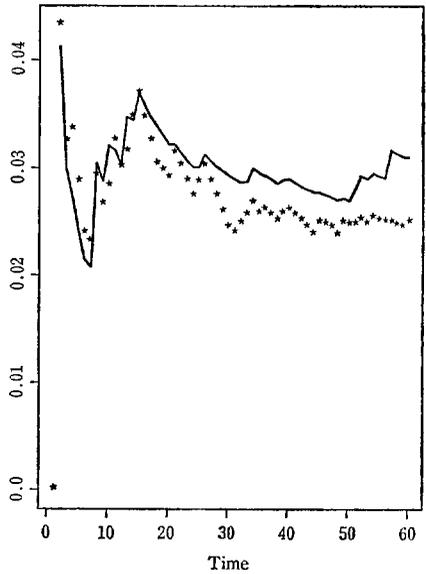


図 6 . D



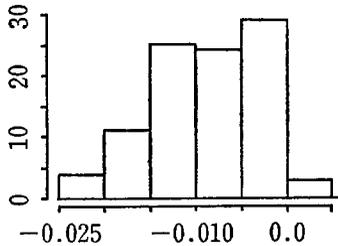


図7.A

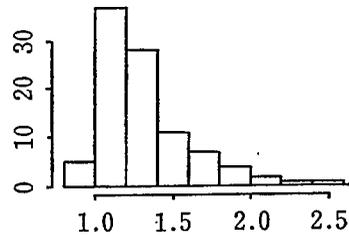


図7.B

第6期はモデル3のケースである。 $\{J=1\}$, $(\mu_2 < \mu_0)$ の方が $\{I=1\}$ より生起確率が高い。 $\mu_1 > \mu_0$ であって σ_1 が σ_0 よりかなり小さいようである (図 6. A)。全体として対称形に近いが両裾が長い (図 6. B)。 α がゼロに近く (図 6. C)、 β が 1 より大きい (図 6. D)。

この分析でわかるように市場平均については、分布形がほぼ対称であるかまたは左裾が長い時期が多い。ところが個別銘柄についてみると様子が異なる。上の分析とはデータの時期は異なるが、1979年1月から1984年12月までの月次投資収益率をみると $\alpha > 0$ である銘柄が圧倒的に多い。また $\beta > 1$ である銘柄が圧倒的に多い。例として銘柄番号 1000 番代の銘柄について α の値 (図 7. A) と β の値 (図 7. B) の頻度を示す棒グラフを掲げておく。図 7. A の横軸の目盛は $-\alpha$ である。これらの銘柄の挙動の平均として市場平均があるのだが、この時期ももし市場平均の X_t の左裾が長いようならそれは各銘柄の収益率レベル、とくに μ の値のちがいによるものかも知れない。

本節では統計量を用いて X_t の分布形を大まかに判断するだけで母数の推定にまでは踏みこんでいない。しかしながら、本節の大まかなデータ分析を通じて感じられることは X_t の変動型 (分布形) の変化に対応するオプションを定義することの可能性である。 α と β を逐次計算することにより、 X_t の分布形に対してある程度の把握ができる。従ってこのような統計量にもとづいたオプ

ション, いいかえれば期首に想定したモデルと実際に生じた変動型との差異をオプションとして証券化することである. 株価の不確実な変動を (1) モデル内での変動と (2) モデル自体の不確実な変化に分けるという視点をとれば, (1) は株式オプションの対象であり (2) がここでいう “モデル・オプション” の対象である. 次節ではモデル・オプションの一端を α について簡単に述べる.

6 課題: 価格の偏りの推定

本稿では扱わなかった問題を今後の課題として, 最後に述べる.

X_i の分布 F あるいは G のもとでのコール・オプション価格をそれぞれ C_F, C_G とし, 両者の差 (偏り) を E_G と表すと, これらの間の関係式は

$$C_G = C_F + E_G \quad (4)$$

である. 現実の分布 G を誤って F であると想定するとき E_G という価格差が生じるのである. 第5節の図にあるようにオプション期間中の $X_i, 1 \leq i \leq n$ の実現値を逐次みていくうちに, 統計量 α そして β を通じて F と G の隔りに, あるいは同等性に気がつく. 何らかの統計量を用いて E_G の推定量を構成することが1つの問題である. もし E_G に対する推定量が構成できるならばそれをもとにして, 想定したモデルと現実の変動型とのずれに対するオプション, いわばモデル・オプションを定義することがもう1つの問題である.

$\alpha = \bar{X} - X_M$ は n が大きいときには $[\mu_G - G^{-1}(0.5)]$ の回りに集中するのでそれを利用することができる. しかし, 満期時点の株価

$$S_T = S_t \cdot e^{X_1 + \dots + X_n} = S_t \cdot e^{n \cdot \bar{X}}$$

を複製するために, α を n 倍すると $n \cdot X_M$ が散慢な分布をもつ. この不都合が1つの障害である.

(4) 式の1つの表現は Jarrow and Rudd ([7]) によって与えられている. この表現の推定可能性はともかくとして, しかしそれよりは単純な形で, 例えば第3節の価格の差のようなもので E_G を表現し, そこに含まれる母数を Kon ([9]) が用いた推定方式によって推定するという手順も検討されるべきであろう.

注) 計算は慶応義塾大学理工学部数理科学科柴田研究室の「S システム」を用いて行った。機器の操作について同研究室の方々の御助力を得たのでここに記して感謝する。もし計算に誤りがあればそれは著者の責任である。

参考文献

- [1] Black, Fischer and Scholes, Myron (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities." *Journal of Political Economy* 81, 637—654.
- [2] Geske, Robert (1977). "The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 12. 541—552.
- [3] Huber, Peter (1981). 『Robust Statistics』 John Wiley & Sons, Inc. 第3章.
- [4] Hull, John (1989). 『Options, Futures, And Other Derivative Securities.』 Prentice Hall, Inc. 第12章.
- [5] Hull, John and White Alan (1987). "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities." *The Journal of Finance*, 42, 281—300.
- [6] Hull, John and White Alan (1988). "An Analysis of the Bias in Option Pricing Caused by A Stochastic Volatility." in 『Advances in Futures and Options Research. Vol. 3』 29—61. Editor, Fabozzi, Frank.
- [7] Jarrow, Robert and Rudd, Andrew (1982). "Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Process." *Journal of Financial Economics*. 10. 347—369.
- [8] Jarrow, Robert and Rudd, Andrew (1983). 『Option Pricing』 Richard D. Irwin, Inc. 第8章.
- [9] Kon, Stanley J. (1984). "Models of Stock Returns—A Comparison." *The Journal of Finance*. 39. 146—165.
- [10] 三浦良造 (1989). 『モダンポートフォリオの基礎』 同文館 第3章.
- [11] 日本経済新聞. 1989年6月14日 朝刊第27面.
- [12] Shorack, Galen and Wellner, Jon (1986). 『Empirical Processes with Applications to Statistics.』 John Wiley and Sons, Inc. 第19章.
- [13] 田畑吉雄・沢木勝茂 (1984). "American Call Option の最適行使問題". 大阪大学経済学 Vol. 34. No. 2・3, 283—289.
- [14] 竹内啓 (1973). 『数理統計学的方法的基礎』 東洋経済新報社 第4章.

(一橋大学助教授)