

逐次の二標本問題について

高 橋 一
矢 島 美 寛

1. はじめに $x_1, x_2, \dots$ を平均 θ_1 , 分散 σ_1^2 の正規分布 (以下 $N(\theta_1, \sigma_1^2)$ と記す) からの確率変数列, $y_1, y_2, \dots$ を x とは独立な $N(\theta_2, \sigma_2^2)$ からの確率変数列とし二標本問題

(1. 1) $H_1: \theta_1 > \theta_2$ vs $H_{-1}: \theta_1 < \theta_2$

を考察する. これは例えば株式市場で x, y をそれぞれ銘柄 A, B の収益率とすれば期待収益率の大小の検定であり, 又薬理学において新薬 A, B に対する患者の反応を x, y とすれば A の方が B より優れている ($\theta_1 > \theta_2$) か否かの統計的決定問題である. これは固定標本, 分散未知の仮定下では Behrens-Fisher 問題と呼ばれ, 現在もまだ未解決の問題であるが, 本稿では逐次標本計画 (Sequential Sampling Plan) に基づく接近法を用いる. 逐次分析とは, Wald により考案された方法で分析に用いる標本の数を, あらかじめ決めず何らかの結論を出すのに十分な標本が集まるまでサンプリングを行う方法である (Wald, 1947). 逐次分析法の利点は $\delta = \theta_1 - \theta_2$ の絶対値が σ_1^2, σ_2^2 に比べ十分大きな時, 同じ有意水準を持つ固定標本検定法に比べ必要な (期待) 標本数が相当に少なくすむ事にある. さて実際に逐次法を適応する場合, 伝統的には特に上記薬効判定等に見られるが, $(x_i, y_i) \ i=1, 2, \dots$ なる自然な組の存在を仮定し $z_i = x_i - y_i$ を考える. もちろん $z_i \sim N(\delta, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ であるから問題は $H_1: \delta > 0$ を $H_{-1}: \delta < 0$ に対し検定する一標本問題に帰着される. この様な組は同じ様な 2 人の患者に対し A, B 両薬を無作為に割り当てるか, 又は 1 人の患者に一定期間において両薬を投与する時に得られるであろう. この標本計画を以後 [PW] (Pairwise Sampling) とよぶことにする.

一方自然な組が存在しない場合 x 標本, y 標本をどのような順序で採って行けばいいのか, 換言すればいかなる標本割り当て規則 (Allocation Rule, AR) を用いるのが新たな問題として考察の対象となる. 今全体の標本数を出来るだけ少なくすると同時に, H_1 が正しい時には x 標本を, 又 H_{-1} が正しい時には y 標本を相対的に出来るだけ多く採る方法を考えよう. これは収益率の検定や新薬の判定等に典型的に見られる要求である. 迅速な判断と同時に, たとえ実験の途中であったとしても, それまでの結果に基づき, より良いと思われる薬を, より多く使い実験を続ける事が望ましいのは言うまでも無い事であろう. これがデータに基づく標本割り当て計画 (Data Dependent Allocation Rule) と呼ばれるもので古くは, Robbins (1952) により提唱された Play the Winner Rule (PWR) がある. (Zellen (1969), Sobel and Weiss (1970)).

PWR は基本的には二項分布に適応されるものであり, そしてそれに基づく検定の停止時刻 (Stopping Time) が確率 1 で有限になるとは限らない等の問題が指摘されてきた. 正規性の仮定下で確率 1 で終了する検定法のもとでの標本割り当て問題はまず Louis (1972) により考察された. 以来 Flehinger, Louis, Robbins and Singer (1972), Robbins and Siegmund (1974), Louis (1975), Takahashi (1977, 1987), Hayre (1979), Hayre and Gittins (1981) 等により種々の改良や拡張が試みられている. 本稿では逐次的二標本問題の現在までの主な結果及び Takahashi (1987), Yajima and Takahashi (1987) 等の最近の結果を中心に論じていく. 第 2 節から第 4 節までは過去の研究のサーベイであるが第 5 節, 6 節の結果は新しいものである.

2. 単純 2 標本問題—Sequential Probability Ratio Test 本節と次節では $x_1, x_2, \dots$ は $N(\theta_1, \sigma_1^2)$ からの又 $y_1, y_2, \dots$ は $N(\theta_2, \sigma_2^2)$ からのそれぞれ独立な確率変数列, 又 σ_1^2, σ_2^2 はともに既知であると仮定しデータに基づく標本割り当て計画のもとで逐次的に検定問題 (1. 1) を考える. この問題は x, y に対する原点の共通の移動に対し不変であるから, $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n$ が観測されたあとでは $u_i = x_i - y_1, (i=1, \dots, m), v_j = y_j - y_1, (j=1, \dots, n)$

を考えれば十分である (Lehmann, 1959). u, v のみを通じ, もとのデータに依存する検定統計量を求めるために単純仮説 $H_1^*: \delta = \delta^* > 0$ を単純対立仮説 $H_{-1}^*: \delta = -\delta^*$ に対し検定する時の u, v に関する尤度比 L_{mn}^* を考えよう.

単純な計算によりそれは

$$(2. 1) \quad L_{mn}^* = \exp(2\delta^* z_{mn}), \quad z_{mn} = \tau_{mn}(\bar{x}_m - \bar{y}_n) \\ \tau_{mn} = mn / (m\sigma_2^2 + n\sigma_1^2), \quad \bar{x}_m = \sum_{i=1}^m x_i / m, \quad \bar{y}_n = \sum_{i=1}^n y_i / n,$$

となる (Robbins and Siegmund, 1974, Hayre and Gittins, 1981).

付記 2. 1 簡単な計算により $E_\delta(z_{mn}) = \tau_{mn}\delta$, $\text{Var}_\delta(z_{mn}) = \tau_{mn}$

したがって $z_{mn} \sim N(\tau_{mn}\delta, \tau_{mn})$ となる.

H_1^* を H_{-1}^* に対し検定する不変な SPRT は (2. 1) より, ある正数 a, b に対し二次元の停止時刻を

$$(2. 2) \quad (M', N') = \text{first}\{(m, n); z_{mn} \notin (-a, b)\}$$

で定義し

$$(2. 3) \quad z_{M'N'} \geq b \Rightarrow H_1^* \text{ を採択}$$

$$z_{M'N'} \leq -a \Rightarrow H_{-1}^* \text{ を採択}$$

なる決定方式で与えられる. 今仮りに u, v 列を通じてのみ x, y に依存する [AR] が与えられたとすれば, Wald (1947, p. 41) の議論より

$$(2. 4) \quad P_\delta^*(H_1^* \text{ を棄却}) \leq \exp(-2\delta^* a) \{1 - P_{-\delta^*}(H_{-1}^* \text{ を棄却})\} \\ P_{-\delta^*}(H_{-1}^* \text{ を棄却}) \leq \exp(-2\delta^* b) \{1 - P_\delta(H_1^* \text{ を棄却})\}$$

が成立する. 一般の $\delta \neq 0$ に対しても同様な関係が導かれるが以下簡単化の為 $a=b$ とし, さらに x, y に対称な [AR] を仮定すると (即ち, $P_\delta(H_1 \text{ を棄却}) = P_{-\delta}(H_{-1} \text{ を棄却})$),

$$(2. 5) \quad P_\delta(\text{error}) \leq \{1 + \exp(2\delta b)\}^{-1}$$

が成り立つ. (2. 4), (2. 5) における不等式は z_{mn} が境界を交差する際の剰余, $z_{M'N'} - b \geq 0, z_{M'N'} + a \leq 0$ から生じている. Wald 近似は剰余をゼロとし, (2. 4), (2. 5) で等号が成立していると仮定しエラー確率を a, b の関数で表すものである. ここで注意すべき点は, 剰余の大きさは適用される [AR] に依存するが, Wald 近似された確率は [AR] とは独立となる事である. 一方

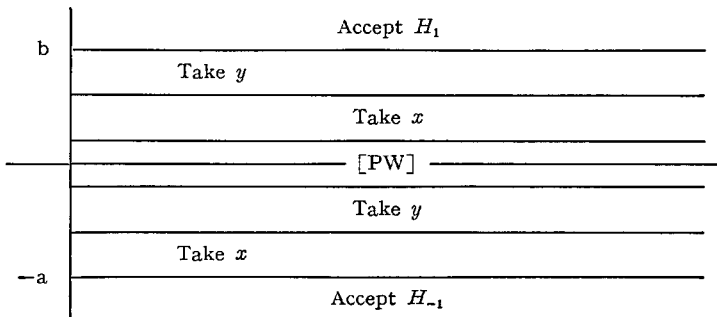
$E_\delta(M')$ や $E_\delta(N')$ については, もちろん [AR] に依るが $E_\delta(\tau_{M'N'})$ の Wald 近似も任意の [AR] に対し独立に定まる. 技術的には $\{z_{mn} - \tau_{mn}\delta, F_{mn}, m+n \geq 3\}$, (但し F_{mn} は $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$ より生成されたシグマ加法族) が 2 次元のマルチンゲールとなる事より Doob の Optional Stopping 定理を用い求める事が出来る. 即ち任意の [AR] に対し

$$(2.6) \quad E_\delta(\tau_{M'N'}) \simeq \begin{cases} [b/\delta] \{\exp(2b\delta) - 1\} / \{\exp(2b\delta) + 1\} & \delta \neq 0 \\ b^2 & \delta = 0 \end{cases}$$

となる. $z_{mn} - \tau_{mn}\delta$ がマルチンゲールとなる事は直接計算によるか, 又は次の補題より証明出来る.

補題 2.1 (Robbins and Siegmund, 1974) $\{W(t), t \geq 0\}$ を単位時間あたりの平均 δ , 分散 1 のブラウン運動とする. この時 $\{z_{mn}, m+n \geq 3\}$ の同時分布は $\{W(\tau_{mn}), m+n \geq 3\}$ の同時分布と等しい.

次に [AR] について考えてみよう. 今 H_1 のもとでは x が, 又 H_{-1} のもとでは y が優れた母集団としよう. $(m, n) < (M', N')$ である時, z_{mn} の値が b に近いならば (H_1 が正しいであろうとの予想のもとに) 次の標本は x_{m+1} となるであろう. 逆に z_{mn} が $-a$ に近い時には y_{n+1} を次の標本とするであろう. 一方 $\lim_{m \rightarrow \infty} \tau_{mn} = n\sigma_2^{-2} (\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_{mn} = m\sigma_1^{-2})$ より, たとえ x 標本の方が明らかに優れている場合といえども, x 標本のみを取り続ければ τ_{mn} は点 $n\sigma_2^{-2}$ で停止してしまい, 確率過程 z_{mn} はその点に停ってしまう. したがって検定を早く終了させる為には, あえて y 標本をも取る必要が出てくる. そこで直確的



には左図の様な [AR] が考えられる。

以上の考察をふまえ問題の定式化を以下図る。歴史的には Robbins and Siegmund (1974) による直観的な規則から始まり, Louis (1975) のベイズ解, 又 Takahashi (1977), Hayre (1979) 等により別の考えに基づく [AR] が提唱されているが, それらの中で Hayre の [AR] が一番合理的である様に思われる。したがって以下では Hayre の規則を中心に議論を進める。Hayre は $\delta = \mu_1 - \mu_2$ が真の値である時 x 標本を一つ取るコストを $g(\delta)$, 又 y 標本一つのコストを $h(\delta)$ と仮定する。ここで $h(\delta) - g(\delta)$ は δ と同符号を持つと仮定する。即ち H_1 のもとでは y 標本のコストが, 又 H_{-1} のもとでは x 標本のコストが高くなる。さてサンプリングの全コストの期待値 (リスク) は

$$(2.7) \quad R(\delta) = g(\delta)E_{\delta}(M') + h(\delta)E_{\delta}(N')$$

で表される。ところで $M' = \{\sigma_1^2 + (M'/N')\sigma_2^2\} \tau_{M'N'}$,

$N' = \{\sigma_2^2 + (N'/M')\sigma_1^2\} \tau_{M'N'}$ であるから

$$(2.8) \quad R(\delta) \geq \{\sigma_1 g(\delta)^{1/2} + \sigma_2 h(\delta)^{1/2}\}^2 E_{\delta}(\tau_{M'N'})$$

を得る。ここで等号は

$$(2.9) \quad P_{\delta}\{M'/N' = \sigma_1 w(\delta)/\sigma_2\} = 1$$

の時成立する, 但し $w(\delta) = \{h(\delta)/g(\delta)\}^{1/2}$ 。したがって $m/n = \sigma_1 w(\delta)/\sigma_2$

となるように各時点でサンプリングを行えばリスク $R(\delta)$ を最小に出来るが, δ が未知であるから δ を

$$(2.10) \quad \hat{\delta}_{mn} = z_{mn}/\tau_{mn} = (\bar{x}_m - \bar{y}_n)$$

で推定する事より, 次の [AR] を得る。

[Hayre の規則, HA] (Hayre, 1979). $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n$ が観測されたあと $(m, n) < (M', N')$ であるならば, 次の標本は

$$> \quad \Rightarrow y_{n+1}$$

$$(2.11) \quad m/n = \sigma_1 w(\hat{\delta}_{mn})/\sigma_2 \Rightarrow \text{どちらでもよい}$$

$$< \quad \Rightarrow x_{m+1}$$

Hayre (1979) は [HA] のもとで $E_{\delta}(M' + N')^k$ がすべての $k=1, 2, \dots$ に対し有限である事を示した。

付記 2.2 Hayre (1979) は基本的には H_1, H_{-1} に加え $H_0: \delta=0$ の中より一つ選ぶ多重決定問題を Sobel and Wald (1949) の方法で考察しているが、上記結果については本質的には変わらない。

[HA] の大標本的性質、小標本的性質については Hayre (1979) に詳しい。本稿では次節以下で展開する Repeated Significance Test (RST) の枠組みの中での Siegmund (1985) や Takahashi (1987) の結果を論じていく。

3. 単純二標本問題—RST 前節では歴史的順序にしたがい Wald の SPRT に基づく検定法を論じてきたが、応用上 SPRT は(一標本問題でも) ①標本数が有界でない為実験計画作成にあたり不便である, ② $|\delta|$ が小さな時の期待標本数が固定標本検定のそれと比べずっと大きくなる, ③ t -検定や z -検定と異なる検定関数を用いる為, 統計学の非専門家には使いにくい等の欠点指摘されている。①については標本数の上限を設定する, ②については H_1, H_{-1} の二者択一ではなく, $H_0: \delta=0$ をも組み入れ,

(3. 1) $H_1: \delta > 0, H_0: \delta = 0, H_{-1}: \delta < 0$

の中より一つ選ぶ多重決定問題を考える方が合理的であろう (Hayre, 1979). さらに③をも考慮すると一標本問題における Armitage (1975) の RST (Repeated Significance Test) が多くの実際的な要求に答えている様に思われる。

RST とは, まず標本数の上限 T_1 と下限 $T_0 (0 \leq T_0 < T_1)$ を決めておき, $H_0: \delta=0$ に対する通常の z -検定や t -検定を標本数 T_0 から新しい標本が採られるたびに行い, もしも T_1 個目の標本が採られるまでに一度でも有為な結果が得られたならば, そこでサンプリングを中止し H_0 を棄却する。一方 T_1 までに一度も有為な結果が出なければ H_0 を採択する検定方式である。多少 ad-hoc 的な面はあるがその直観的な簡明さは RST の大きな利点である。一方その簡明さとは裏腹に RST は SPRT と比べそのエラー確率や期待標本数の計算がずっと難しい。この為に RST の利用は今までごく限られた問題に制限されていた。しかしながら近年急速に研究が進んだ非線型再生理論やブラウン運動の曲線交差問題等の結果を利用することにより, より広範な応用が可能となってきた (Woodroffe, 1982, Siegmund, 1985)。

二標本問題における RST は正数 b に対し二次元の停止時間を

$$(3.2) \quad (M, N) = \text{first}\{(m, n); \tau_{mn} \geq T_0, |z_{m,n}| \geq b(\tau_{mn})^{1/2}\}$$

で定義し

$$(3.3) \quad \begin{array}{ll} \tau_{MN} > T_1 & \Rightarrow H_0 \text{ を採択} \\ \tau_{MN} \leq T_1, \quad z_{MN} \begin{cases} \geq b(\tau_{MN})^{1/2} & \Rightarrow H_1 \text{ を採択} \\ \geq -b(\tau_{MN})^{1/2} & \Rightarrow H_{-1} \text{ を採択} \end{cases} \end{array}$$

という決定方式で与えられる。(3.3)に基づく検定のエラー確率及び τ_{MN} の期待値の計算は z_{mn} をブラウン運動で近似する事より近似的に求められる。

さて任意の [AR] は τ_{mn} が次に $\tau_{m+1,n}$ となるか, $\tau_{m,n+1}$ となるかを決定するに過ぎない。換言すればブラウン運動による近似に際しては時間パラメータ t の進む速さをコントロールするだけである。したがってエラー確率等の近似計算は使われる [AR] とは独立に行われる。よって任意の $\delta > 0$ に対して,

$$(3.4) \quad P_\delta(\tau_{MN} \leq T_1) \simeq 1 - \Phi\{\sqrt{T_1}(\delta_1 - \delta)\} + \phi\{\sqrt{T_1}(\delta_1 - \delta)\}/\delta\sqrt{T_1}, \quad b \rightarrow \infty$$

但し $\delta_1 = b/\sqrt{T_1}$, 又

$$(3.5) \quad P_0(\tau_{MN} \leq T_1) \simeq (b - b^{-1})\phi(b)\log(T_1/T_0) + 4\phi(b)/b, \quad b \rightarrow \infty,$$

一方

$$(3.6) \quad E_\delta(\tau_{MN} \wedge T_1) \simeq (b^2 - 1)/\delta^2, \quad b \rightarrow \infty$$

を得る (Siegmund, 1985)。

RST の枠組みの中でも Hayre の標本割り当て規則 [HA] は有効である。

2 節と同じ記号を用いた時 [HA] のもとでは漸近的に

$$(3.7) \quad \begin{array}{l} E_\delta(M) \simeq \sigma_1\{\sigma_1 + \sigma_2 w(\delta)\} E_\delta(\tau_{MN}) \\ E_\delta(N) \simeq \sigma_2\{\sigma_2 + \sigma_1 w(\delta)^{-1}\} E_\delta(\tau_{MN}) \end{array} \quad b \rightarrow \infty$$

となる。したがって [HA] のもとでのリスク, $R^H(\delta)$ は漸近的に $\{\sigma_{1g}(\delta)^{1/2} + \sigma_2 h(\delta)^{1/2}\}^2 E_\delta(\tau_{MN})$ に等しくなり $R(\delta)$ の下限を実現する (cf. (2.8)).

付記 3.1 小標本の場合 $R(\delta)$ を最小にする規則が [HA] で与えられるか否かは未解決である。最適解が存在するのなら各時点に於ける最適化がトータルな最適解を与える (DeGroot, 1970, Chow, Robbins and Siegmund, 1971, Louis, 1975) 事はここでもおそらく正しいであろう。Louis (1975) は最適解

の存在証明を忘れた故に完全に正しくはなかったが、もちろん大筋では正しい。
[HA] に対し同様の議論は数学的興味は多少ともあろうが、実用的には今の所
あまり面白い問題とはいえない。

小標本における [HA] のリスクの大きさは、Takahashi (1987) がモンテ
カルロ法に基づく模擬実験を行い [PW] と比較している。\$|\delta|\$ が大きくなる
につれリスクの比 ([HA]/[PW]) は単調に減少しており、総じて [HA] の
効率の高い様に思われる (cf. Siegmund, 1985)。

4. 回帰モデル (1) 本節では回帰モデル

$$(4.1) \quad \begin{aligned} x_i &= \alpha_1 + \beta \xi_i + \varepsilon_i^{(1)} & \varepsilon_i^{(1)} &\sim N(0, \sigma_1^2) \\ y_i &= \alpha_2 + \beta \eta_i + \varepsilon_i^{(2)} & \varepsilon_i^{(2)} &\sim N(0, \sigma_2^2) \end{aligned}$$

を考える。ここで \$\varepsilon_i^{(j)}\$ は i. i. d., \$\alpha_1, \alpha_2, \beta\$ は未知のパラメータとし、多重決
定問題

$$(4.2) \quad H_1: \alpha_1 > \alpha_2, \quad H_0: \alpha_1 = \alpha_2, \quad H_{-1}: \alpha_1 < \alpha_2$$

を考える。さらにここでも \$\sigma_1^2, \sigma_2^2\$ が既知の場合を主に論じよう。問題は \$x, y\$
に対する原点の共通の移動に対し不変である。しかし局外母数 \$\beta\$ (nuisance
parameter) の存在により変換

$$(4.3) \quad \begin{aligned} u_i &= x_i - y_i - [(\xi_i - \eta_i)/(\eta_2 - \eta_1)](y_2 - y_1) & i \geq 1 \\ v_i &= y_i - y_1 - [(\eta_i - \eta_1)/(\eta_2 - \eta_1)](y_2 - y_1) & i \geq 3 \end{aligned}$$

を考える。明らかに \$E(u_i) = \alpha_1 - \alpha_2, E(v_i) = 0\$ となる。以後 \$\delta = \alpha_1 - \alpha_2\$ と書
き \$(\xi_1, x_1), \dots, (\xi_m, x_m), (\eta_1, y_1), \dots, (\eta_n, y_n)\$ が観測された後の \$u_1, \dots\$,
\$u_m, v_3, \dots, v_n\$ の同時密度関数を考える事により 2 節と同様本問題における不
変な検定関数を計算すると

$$(4.4) \quad z_{mn}^* = \tau_{mn} \{ \bar{x}_m - \bar{y}_n - b_{mn}(\bar{\xi}_m - \bar{\eta}_n) \}$$

但し \$\bar{\xi}_m = \sum_{i=1}^m \xi_i / m, \bar{\eta}_n = \sum_{i=1}^n \eta_i / n, \tau_{mn}, \bar{x}_m, \bar{y}_n\$ 等は前節までと同様、さらに

$$(4.5) \quad \begin{aligned} b_{mn} = & \{ (\sigma_2^2 \sum_{i=1}^m \xi_i x_i + \sigma_1^2 \sum_{i=1}^n \eta_i y_i) (m \sigma_2^2 + n \sigma_1^2) \\ & - (m \sigma_2^2 \bar{\xi}_m + n \sigma_1^2 \bar{\eta}_n) (m \sigma_2^2 \bar{x}_m + n \sigma_1^2 \bar{y}_n) \} \\ & \div \{ (\sigma_2^2 \sum_{i=1}^m \xi_i^2 + \sigma_1^2 \sum_{i=1}^n \eta_i^2) (m \sigma_2^2 + n \sigma_1^2) \} \end{aligned}$$

$$-(m\sigma_2^2\bar{\xi}_m+n\sigma_1^2\bar{\eta}_n)^2\}$$

である (cf. Takahashi 1977, 1987). 代数計算より

$$(4.6) \quad \begin{aligned} E_{\delta}(z_{mn}^*|\xi_m, \eta_n) &= \tau_{mn}^* \delta \\ \text{Var}_{\delta}(z_{mn}^*|\xi_m, \eta_n) &= \tau_{mn}^* \end{aligned}$$

但し $\tau_{mn}^* = \tau_{mn} C_{mn}$,

$$\begin{aligned} C_{mn} &= \{\sigma_2^2 \sum_{i=1}^m \xi_i^2 + \sigma_1^2 \sum_{i=1}^m \eta_i^2 - (m\sigma_2^2 \bar{\xi}_m^2 + n\sigma_1^2 \bar{\eta}_n^2)\} \\ &\quad \div \{\sigma_2^2 \sum_{i=1}^m \xi_i^2 + \sigma_1^2 \sum_{i=1}^m \eta_i^2 \\ &\quad - (m\sigma_2^2 \bar{\xi}_m + n\sigma_1^2 \bar{\eta}_n)^2 / (m\sigma_2^2 + n\sigma_1^2)\} \end{aligned}$$

$$\xi_m = (\xi_1, \dots, \xi_m), \eta_n = (\eta_1, \dots, \eta_n).$$

C_{mn} は m と n に関して増加関数 ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ の場合は Lai and Robbins (1977) で示されている. 一般の場合も同様). したがって $\tau_{mn}^* = \tau_{mn} C_{mn}$ を新たな時間パラメータとすることにより補題 2.1 と同様の結果がここでも成立する.

補題 4.1 ξ_m と η_n が与えられた時の z_{mn}^* の条件付き分布は $W(\tau_{mn}^*)$ の分布に等しい. ここで $W(t)$ は単位時間あたりの平均 δ , 分散 1 のブラウン運動, 又 $m+n \geq 4$ である.

C_{mn} は $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ の時, ξ の平均と η の平均が等しいか否かを検定する検定関数となっている. したがって $0 \leq C_{mn} \leq 1$ が常に成立, ここで $\bar{\xi}_m = \bar{\eta}_n$ でかつ ξ_i, η_i が退化していなければ $C_{mn} = 1$ である. 回帰モデル (4.7) における決定方式も前節までと同様二次元の停止時刻を

$$(4.7) \quad (M^*, N^*) = \text{first}\{(m, n); \tau_{mn}^* \geq T_0, |z_{mn}^*| \geq b(\tau_{mn}^*)^{1/2}\}$$

で定義し

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \tau_{M^*N^*}^* &> T_1 && \Rightarrow H_0 \text{ を採択} \\ \tau_{M^*N^*}^* &\leq T_1, \quad z_{M^*N^*}^* \begin{cases} \geq b(\tau_{M^*N^*}^*)^{1/2} & \Rightarrow H_1 \text{ を採択} \\ \leq -b(\tau_{M^*N^*}^*)^{1/2} & \Rightarrow H_{-1} \text{ を採択} \end{cases} \end{aligned}$$

で与えられる. (4.8) のエラー確率や $\tau_{M^*N^*}^*$ の期待値等は z_{mn}^* のブラウン運動近似より Siegmund の方法で決まる (SPRT タイプの決定方式につい

ては Takahashi (1977) を参照). 標本割り当て規則 [AR] についても (2.7) で定義されるリスク $R(\delta)$ に対し (2.8) と同様の結果

$$(4.9) \quad R(\delta) \geq E_{\delta}[\{\sigma_1(g(\delta)/C_{M^*N^*})^{1/2} + \sigma_2(h(\delta)/C_{M^*N^*})^{1/2}\}^2 \tau_{M^*N^*}]$$

が成立する. ここで等号は $w(\delta) = \{h(\delta)/g(\delta)\}^{1/2}$ と書くとき

$$(4.10) \quad P_{\delta}\{M^*/N^* = (\sigma_1/\sigma_2)w(\delta)\} = 1$$

の時成立する. したがって (2.11) で定義された [HA] がここでも最も合理的な [AR] であろう. [HA] のもとでの期待標本数は, 大標本の仮定下で次の結果が示される. ξ, η 列を $C_{M^*N^*} \rightarrow \alpha \in [0, 1]$ となる様を選ぶのならば

$$(4.11) \quad \begin{aligned} E_{\delta}(M^*) &\simeq \alpha^{-1} \sigma_1 \{\sigma_1 + \sigma_2 w(\delta)\} E_{\delta}(\tau_{M^*N^*}) \\ E_{\delta}(N^*) &\simeq \alpha^{-1} \sigma_2 \{\sigma_2 + \sigma_1 w(\delta)^{-1}\} E_{\delta}(\tau_{M^*N^*}) \end{aligned} \quad b \rightarrow \infty$$

が成り立つ. 小標本においてはモンテカルロ法に基づく模擬実験の結果が分散未知の場合も含め Takahashi (1987) に報告されている. [HA] の有効性は単純二標本問題の時と比べても十分満足すべき所にある様である. もっとも Takahashi (1987) では ξ と η の平均は共に等しく取ってある故当然の結果といえる. より現実的には x と y との平均を等しくする様 ξ, η を選ぶ, いわゆる確率近似法 (Stochastic Approximation, Robbins and Monro 1951) 等の適用が考えられよう.

5. 回帰モデル (II) 本節ではモデル

$$x_i = \alpha + \beta_1 \xi_i + \varepsilon_i^{(1)} \quad \varepsilon_i^{(1)} \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2)$$

$$(5.1) \quad y_i = \alpha + \beta_2 \eta_i + \varepsilon_i^{(2)} \quad \varepsilon_i^{(2)} \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2)$$

β_1, β_2 は未知のパラメータ, α は未知の局外母数として次の仮説検定問題

$$(5.2) \quad H_1: \beta_1 > \beta_2 \quad \text{vs} \quad H_{-1}: \beta_1 < \beta_2$$

を考える. 本節で考察する問題は近年研究が進んでいるポートフォリオ理論への応用 (特に CAPM の理論) が期待される. 以下簡単化のため σ^2 は既知と仮定する. 問題は x, y に対する共通の位置変換をほどこしたあと, 共通の尺度変換 (Scale Change) に対し不変であるから実はここでも変換 (4.3) を考えればよい. 即ち $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n$ が観測されたあと $u_1, u_2, \dots, u_m, v_3, v_4, \dots, v_n$ にのみ依存する統計量は

$$(5.3) \quad w_{mn} = (\sigma S)^{-2} \{ (\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2) s_{\xi}^2 s_{\eta}^2 \\ + [mn/(m+n)] [(\bar{\xi}_m s_{\eta}^2 + \bar{\eta}_n s_{\xi}^2)(\bar{x}_m - \bar{y}_n) \\ - (\hat{\beta}_2 s_{\eta}^2 \bar{\xi}_m - \hat{\beta}_1 s_{\xi}^2 \bar{\eta}_n)(\bar{\xi}_m - \bar{\eta}_n)] \}$$

$$\text{但し } \hat{\beta}_1 = \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x}_m) \xi_i / s_{\xi}^2, \quad \hat{\beta}_2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n) \eta_i / s_{\eta}^2 \\ s_{\xi}^2 = \sum_{i=1}^m (\xi_i - \bar{\xi}_m)^2, \quad s_{\eta}^2 = \sum_{i=1}^n (\eta_i - \bar{\eta}_n)^2 \\ \bar{x}_m = \sum_{i=1}^m x_i / m, \quad \bar{y}_n = \sum_{i=1}^n y_i / n, \quad \bar{\xi}_m = \sum_{i=1}^m \xi_i / m, \quad \bar{\eta}_n = \sum_{i=1}^n \eta_i / n \\ S^2 = \sum_{i=1}^m \{ \xi_i - (\Sigma \xi_i + \Sigma \eta_i) / (m+n) \}^2 \\ + \sum_{i=1}^n \{ \eta_i - (\Sigma \xi_i + \Sigma \eta_i) / (m+n) \}^2.$$

代数計算より, $\Delta = \beta_1 - \beta_2$ と書く時

$$(5.4) \quad E_{\Delta} \{w_{mn}\} = D_{mn} \Delta \\ \text{Var}_{\Delta} \{w_{mn}\} = D_{mn}$$

$$\text{但し } D_{mn} = (\sigma S)^{-2} \{ s_{\xi}^2 s_{\eta}^2 + (mn/m+n)(\bar{\xi}_m^2 s_{\eta}^2 + \bar{\eta}_n^2 s_{\xi}^2) \}.$$

前節までと同様 w_{mn} の同時分布もブラウン運動で(時間パラメータは D_{mn} である)近似されると予想されるが, ここでは SPRT タイプの検定を考えよう。

2節と同様二次元の停止時刻を

$$(5.5) \quad (M, N) = \text{first} \{ (m, n); |w_{mn}| \geq b \}$$

で定義し,

$$(5.6) \quad w_{MN} \begin{cases} \geq b & \Rightarrow H_1 \text{ を採択} \\ \leq -b & \Rightarrow H_{-1} \text{ を採択} \end{cases}$$

を決定規則とすれば $P_{\Delta}(M+N < \infty) = 1$ となる任意の対称な標本割り当て規則に対し

$$(5.7) \quad P_{\Delta}(\text{error}) \leq \{1 + \exp(2b\Delta)\}^{-1}$$

を得る (cf. 2.5). 一方2節と同様

$$(5.8) \quad \{w_{mn} - D_{mn}\Delta, F_{mn}, m+n \geq 4\} \\ F_{mn} = \sigma(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n)$$

は二次元のマルチンゲールとなる事は直接計算で示されるから, 適当な正則性

の条件下で

$$(6.9) \quad E_d(w_{MN}) = E_d(D_{MN})\Delta$$

が成立. よって Wald (1947) の方法より $\Delta \neq 0$ ならば,

$$(5.10) \quad E_d(D_{MN}) \simeq b\Delta^{-1} \{ \exp(2b\Delta) + 1 \}.$$

一方代数計算により, もしも $\bar{\xi}_m \rightarrow \mu \leftarrow \bar{\eta}_n$, $s_{\xi}^2/m \rightarrow \alpha^2 \leftarrow s_{\eta}^2/n$ ($m, n \rightarrow \infty$) が成り立つよう ξ, η を選んでやれば, $S^2 = s_{\xi}^2 + s_{\eta}^2 + (mn/m+n)(\bar{\xi}_m - \bar{\eta}_n)^2$ であるから,

$$(5.11) \quad D_{mn} \sim (mn/m+n)(\alpha^2 + \mu^2) \quad m, n \rightarrow \infty$$

を得る. したがって上記仮定下では

$$(5.12) \quad E_d(MN/M+N) \\ \simeq b\Delta^{-1} [\{ \exp(2b\Delta) - 1 \} / \{ \exp(2b\Delta) + 1 \}] \sigma^2 / (\alpha^2 + \mu^2)$$

が成立する. 故に条件,

$$(5.13) \quad \bar{\xi}_m \simeq \bar{\eta}_n \quad \text{for all } m, n$$

のもとで本問題でも [HA] を標本割り当て規則として適用する事は合理的であろう. 現在小標本に於ける [HA] のもとでの (5.5), (5.6) の性質を模擬実験等で研究している. その結果は近日中に発表される予定である.

6. 自己回帰モデル 前節までは観測値相互間に独立性の仮定が成立するとして議論を進めてきたが, 多くの経済モデル等にあらわれる変数は必ずしも互いに独立とはいいがたい. そこで本節では x 列, y 列は互いに独立し, しかし $x_1, x_2, \dots$ は平均 θ_1 , 分散 1 の又 $y_1, y_2, \dots$ は平均 θ_2 , 分散 1 の一次の自己回帰過程にしたがうと仮定しよう. 即ち

$$(6.1) \quad \begin{aligned} x_i - \theta_1 &= \rho(x_{i-1} - \theta_1) + \varepsilon_i^{(1)} \quad \varepsilon_i^{(1)} \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2) \\ y_i - \theta_2 &= \rho(y_{i-1} - \theta_2) + \varepsilon_i^{(2)} \quad \varepsilon_i^{(2)} \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2) \end{aligned}$$

但し $|\rho| \leq 1$, $\sigma^2 = 1 - \rho^2$ は既知であると仮定しておく. 本節でも前節と同様仮説検定問題

$$(6.2) \quad H_1: \theta_1 > \theta_2 \quad \text{vs} \quad H_{-1}: \theta_1 < \theta_2$$

を考える. 問題は x, y に対する共通の位置変換に対し不変であるから, 2 節と同様の変換 u, v を考えればよい. ここで $x_1, x_2, \dots, x_m$ と $y_1, y_2, \dots, y_n$

が観測されたあと $u_1, u_2, \dots, u_m$ と $v_1, v_2, \dots, v_n$ の尤度比は直接計算より

$$(6.3) \quad L_{mn} = \exp(2\delta z_{mn}),$$

$$(6.4) \quad z_{mn} = [\tilde{m}\tilde{n}(\bar{x}_m - \bar{y}_n) + \rho\{2\tilde{m}\bar{y}_n - 2\tilde{n}\bar{x}_m + \tilde{n}(x_1 + x_m) - \tilde{m}(y_1 + y_n)\}] \\ + \{(1+\rho)(\tilde{m} + \tilde{n})\}$$

但し任意の l に対し $\tilde{l} = (l-2)(1-\rho) + 2$.

ここで $\rho=0$ の時は $\tilde{m}=m$, $\tilde{n}=n$ となり L_{mn} は (2.1) と一致する. 2節と同様にして z_{mn} に基づく SPRT を考える. まず二次元の停止時刻

$$(6.5) \quad (M, N) = \text{first}\{(m, n); |z_{mn}| \geq b\}$$

定義し, そして

$$(6.6) \quad z_{MN} \begin{cases} \geq b & \Rightarrow H_1 \text{ を採択} \\ \geq -b & \Rightarrow H_{-1} \text{ を採択} \end{cases}$$

を決定規則とする. この時 Wald の方法により

$$(6.7) \quad P_\delta(\text{error}) \leq \{1 + \exp(2\delta b)\}^{-1}$$

を得る. 但し $\delta = \theta_1 - \theta_2$ である.

次に期待標本数について考察する. この目的の為, 次の補題を用意する.

補題 6.1 $\{z_{mn} - E_\delta(z_{mn}), F_{mn}, m+n \geq 3\}$ は二次元のマルチンゲールである.

ここでは F_{mn} は $u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n$ により生成される σ -加法族である.

補題 6.1 の証明は (Yajima and Takahashi, 1987) に述べられている. さて直接計算により

$$(6.8) \quad E_\delta(z_{mn}) = \{\tilde{m}\tilde{n}/\tilde{m} + \tilde{n}\} \{\delta/(1+\rho)\}$$

を得る. したがって M, N を各々 $\tilde{M}, \tilde{N}$ で置き換えれば補題 7.1 より, もしも $E_\delta(\tilde{M}\tilde{N}/\tilde{M} + \tilde{N}) < \infty$ ならば

$$(6.9) \quad E_\delta\{z_{\tilde{M}\tilde{N}} - (\tilde{M}\tilde{N}/\tilde{M} + \tilde{N})(\delta/(1+\rho))\} = 0$$

が成立する. それ故次の近似式を得る.

$$(6.10) \quad E_\delta(\tilde{M}\tilde{N}/\tilde{M} + \tilde{N}) \simeq (1+\rho)C$$

ここで $C = b\delta^{-1}\{\exp(2b\delta) - 1\}/\{\exp(2b\delta) + 1\}$

である. また $M = (\tilde{M} - 2\rho)/(1-\rho)$, $N = (\tilde{N} - 2\rho)/(1-\rho)$

より次の関係を得る (cf. Robbins and Siegmud, 1974).

(I) [PW] を用いた時,

$$E_{\delta}(M) = E_{\delta}(N) \simeq 2C[(1+\rho)/(1-\rho)] - 2\rho/(1-\rho)$$

$$E_{\delta}(M+N) \simeq 4C[(1+\rho)/(1-\rho)] - 4\rho/(1-\rho).$$

(II) 任意の [AR] に対し

$$\min\{E_{\delta}(M), E_{\delta}(N)\} \geq E_{\delta}(\tilde{M}\tilde{N}/\tilde{M}+\tilde{N})/(1-\rho) - 2\rho/(1-\rho).$$

(III) 任意の [AR] に対し

$$E_{\delta}(M+N) \geq 4E_{\delta}(\tilde{N}\tilde{M}/\tilde{N}+\tilde{M})/(1-\rho) - 4\rho/(1-\rho),$$

ここで等号は $P_{\delta}(M=N)=1$ の時, 即ち [PW] の時成立. したがって x_t, y_t が自己回帰過程にしたがっている時も標本総数の期待値は [PW] の時に最小となる. しかしその値は $\rho(C-1)$ の値の正負により独立の仮定下の場合より大きくなったり (>0) 又逆に小さくも (<0) なる.

自己回帰モデルにおいてもやはり [HA] が (2.7) の $R(\delta)$ を最小にする [AR] であろう. その大標本的性質及び小標本的性質は現在著者により研究されている. その結果及び証券市場論等への一部は近日中に出版される (Yajima and Takahashi, 1987).

参考文献

- Armitage, P. (1975). *Sequential Medical Trials*, 2nd ed., Oxford: Blackwell.
- Chow, Y. S., Robbins, H., and Siegmund, D. (1971). *Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping*, Houghton-Mifflin, Boston.
- De Groot, M. (1970). *Optimal Statistical Decisions*, McGraw-Hill, New York.
- Flehinger, B. J., Louis, T. A., Robbins, H., and Singer, B. (1972). Reducing the number of inferior treatments in clinical trials, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 69, 2993—2994.
- Hayer, L. S. (1979). Two population sequential tests with three hypotheses, *Biometrika* 66, 465—474.
- Hayer, L. S. and Gittins, J. C. (1981). Sequential selection of the larger of two normal means. *J. Am. Statist. Assoc.* 76, 696—700.
- Lai, T. L. and Robbins, H. (1977). Strong consistency of least-squares estimates in regression models. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 74, 2664—2669.

- Lehmann, E. L. (1959). *Testing Statistical Hypotheses*, John Wiley and Sons, Inc., New York.
- Louis, T. A., (1972). *Two Population Hypothesis Testing with Data Dependent Allocation*, Ph. D. Dissertation, Columbia University.
- Louis, T. A. (1975). Optimal allocation in sequential tests comparing the means of two Gaussian populations, *Biometrika* 62, 359—369.
- Robbins, H. (1952). Some aspects of the sequential design of experiments, *Bull. Amer. Math. Soc.* 58, 527—535.
- Robbins, H. and Monro, S. (1951). A stochastic approximation method, *Ann. Math. Statist.* 22, 400—407.
- Robbins, H. and Siegmund, D. (1974). Sequential tests involving two populations, *J. Am. Statist. Assoc.* 69, 132—139.
- Siegmund, D. (1985). *Sequential Analysis*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.
- Sobel, M. and Wald, A. (1949). A sequential decision procedure for choosing one of three hypotheses concerning the unknown mean of normal distribution, *Ann. Math. Statist.* 20, 502—522.
- Sobel, M. and Weiss, G. H. (1970). Play-the-Winner sampling for selecting the better of two binomial populations, *Biometrika* 57, 357—365.
- Takahashi, H. (1977). Sequential two sample problem in regression, *Hitotsubashi J. of Soc. Sci.* 2, 28—39.
- Takahashi, H. (1987). Some thoughts in sequential two sample problems with data dependent allocation rule, to appear *Hitotsubashi J. of Econ.*
- Wald, A. (1947). *Sequential Analysis*, John Wiley and Sons, New York.
- Woodaroffe, M. (1982). *Nonlinear Renewal Theory in Sequential Analysis*, SIAM, Philadelphia.
- Yajima, Y. and Takahashi, H. (1987). Sequential two sample problem for time series data, to appear.
- Zellen, M. (1969). Play the winner rule and controlled clinical trial, *J. Am. Statist. Assoc.* 64, 131—146.

(一橋大学教授)

(和歌山大学助教授)