ファジィ選好とスッピス公正原理

須　賀　晃　一

序

選択可能な社会状態の集合が与えられたとき，社会を構成する人々が許容しうる何らかの公正原理に基づいてそれらの社会状態を順序づけ，どれを選択するかという問題を考えよう．このとき，人々のもつ価値判断を集計して１つの社会的公正判断を導出することが可能か否かという困難な問題を除くとしても，選ばれた公正原理から完備順序を構成することができないために，その集合に属するすべての社会状態を完全に順序づけることはできないという難点は，これまで多くの公正原理に対して指摘されてきた．パレート原理やここで取り上げるスッピス [13] の公正原理はその例である．

ところで，完備順序を構成できないという欠陥は，しばしば当該原理のあいまいさを示すと考えられている．だがこの考え方に対しては，完備順序という要請が過大なものであり，むしろ部分順序で満足すべきであるとする警告も発せられている[1)]．しかしながら，問題の核心は順序が完備かそうでないかにあるのではないと主張したい．比較すべき２つの選択対象のうち，一方はある観点からは他方より望ましいだが，別の側面からは望ましくないと見なされるのである．したがって，あらゆる観点から考えて２つを比較しようとすれば，考慮すべき点が増えてくるにつれて比較の結果はあいまいにならざるをえないであろう．完備順序にせよ，部分順序にせよ，人間の価値判断が本質的にもっているあいまいさを無視していることに変わりはない．われわれが議論の出発点をファジィ選好関係に求めるのも，このような理由からである．

ここでの基本的な立場は，選好関係から公正判断を導くという，いわゆる選好功利主義的な方法に依拠するならば，価値判断のあいまいさの源泉は公正原理の構築方法にではなく，その材料となる選好関係にあるというものである．本稿で取り上げるスッピス公正原理は自己と他者の立場の交換によって状態の比較を考えるのだが，立場の交換の方法は決してあいまいではない．むしろ，あいまいさの源泉は選好関係にあるのであり，ファジイ選好関係から始めなければならないことになる．しかも，公正原理である以上何らかの形で個人間比較をもち込まざるをえないのである[2)]．

そこで本稿では，序数的な選好の個人間比較が可能であることを前提とし，さらにあいまいさを許すように拡張した枠組みを用いる．その定式化が次節の課題である．第2節では，ファジィ選好に基づいてスッピス公正原理を構成し，第3節でそこから導かれる選択関数の特性を考察する．第4節では，選択関数を利用して任意に与えられた社会状態の選択可能集合の要素を順序づける方法を例示する．

1　ファジィ集合とファジィ選好関係

Xを社会状態の集合で通常の集合，$3 \leqq \# X < \infty$，とし，$N=\{1, 2, \cdots\cdots, n\}$，$2 \leqq n < \infty$，を個人の集合とする．$X$のファジィ部分集合$A$は帰属度関数$A: X \to [0, 1]$によって特徴づけられる．通常の部分集合は$A(x) \subset \{0, 1\}$であるような帰属度関数$A: X \to [0, 1]$によって表されると考えることができる．すなわち$A$が$X$の通常の部分集合であるならば，$X$の要素$x$が$A$に属するとき$A(x)=1$であり，$x$が$A$に属さないならば$A(x)=0$である．したがって，ファジィ部分集合はこのような考え方を，帰属度関数が0と1の間のさまざまな値をとりうるように拡張したものである．Xの要素xに対し，$A(x)$の値が1に近いほどxが所与のファジィ集合Aに属する度合は大きく，0に近いほどAに属する度合は小さい．

A, BをXのファジィ部分集合とする．帰属度関数の値の比較に対して，$\wedge = \min$, $\vee = \max$という記号を用いれば，AとBの間の演算は次のように定義

される[3].

(1)　和集合: $A \cup B \Leftrightarrow \forall x \in X$: $(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x)$

(2)　共通集合: $A \cap B \Leftrightarrow \forall x \in X$: $(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x)$

(3)　補集合: $A^C \Leftrightarrow \forall x \in X$: $A^C(x) = 1 - A(x)$

(4)　同等: $A = B \Leftrightarrow \forall x \in X$: $A(x) = B(x)$

(5)　包含関係: $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in X$: $A(x) \leqq B(x)$

次に，集合 $X \times X$ のファジィ部分集合をX上のファジィ関係という．ファジィ関係Rの帰属度関数は R: $X \times X \to [0, 1]$ で与えられ，その値は $R(x, y)$, $\forall x, y \in X$, で表される．以下では，このファジィ関係をファジィ選好関係と解釈する[4]．すなわち，$R(x, y)$ は社会状態xがyより少なくとも同程度に選好される度合を示すと考える．$0 < R(x, y) < 1$ のとき，$R(x, y)$ が1に近いほどxがyより望ましい度合は大きく，0に近いほどその度合は小さくなる．$R(x, y) = 1$ ならば通常の選好の意味でxはyより少なくとも同程度に選好されるのであり，$R(x, y) = 0$ ならばxがyより少なくとも選好されることはないのである．したがって，ファジィ選好関係は通常の選好関係の拡張になっているといえる．

ここでしばしば言及されるファジィ選好関係の性質を一括して挙げておこう．

[定義 1]

(1)　反射性: $\forall x \in X$: $R(x, x) = 1$

(2)　反反射性: $\forall x \in X$: $R(x, x) = 0$

(3)　完備性: $\forall x, y \in X$: $R(y, x) + R(x, y) \geqq 1$

(4)　対称性: $\forall x, y \in X$: $R(x, y) = R(y, x)$

(5)　推移性: $\forall x, y, z \in X$: $R(x, z) \geqq R(x, y) \wedge R(y, z)$

(6)　ファジィ順序: R は反射性，完備性，推移性を満たす．

(7)　ファジィ準順序: R は反射性，推移性を満たす．

(8)　ファジィ同値関係: R は反射性，対称性，推移性を満たす．

ファジィ選好関係Rは通常の選好関係を拡張したものであるが，これのみに基づいて公正原理を定式化することは不可能である．何らかの個人間比較を許

容する枠組みが必要になる．ここでは，通常の選好関係を $X\times N$ 上の選好関係に一般化することによって序数的な個人間比較の可能性を模索したセン[11]にならって，一般化されたファジィ選好関係を構成し，それを議論の出発点にしよう．

$X\times N$ 上の一般化されたファジィ選好関係 $\tilde{R}$ は，帰属度関数 $\tilde{R}$: $(X\times N)\times(X\times N)\to[0,1]$ によって表すことができる．そして，個人 i に対して，$\tilde{R}_i((x,j),(y,k))$ の値は，個人 i の目から見たとき社会状態 x における個人 j の立場が社会状態 y における個人 k の立場よりも少なくとも同程度に望ましいと判断される度合を示す．以下では，すべての個人に対し $\tilde{R}_i$ が次の3つの性質を満たすこと，すなわちファジィ選好順序になっていることを仮定する．

(1)　反射性：$\forall(x,j)\in X\times N$: $\tilde{R}_i((x,j),(x,j))=1$

(2)　完備性：$\forall(x,j),(y,k)\in X\times N$:

$$\tilde{R}_i((x,j),(y,k))+\tilde{R}_i((x,j),(y,k))\geqq 1$$

(3)　推移性：$\forall(x,j),(y,k),(z,m)\in X\times N$:

$$\tilde{R}_i((x,j),(z,m))\geqq\tilde{R}_i((x,j),(y,k))\wedge\tilde{R}_i((y,k),(z,m))$$

$\tilde{R}_i$ と R_i の関係は，$\tilde{R}_i$ が与えられたときそれから R_i が次のようにして導かれるというものである．すなわち，任意の $x,y\in X$ に対して

$$R_i(x,y)=\tilde{R}_i((x,i),(y,i)).$$

2　スッピス公正原理の性質

まず，ファジィ選好理論に基づいてスッピス公正原理を定式化しよう[5]．Π を N 上の置換全体の集合とし，一般化されたファジィ選好順序のプロフィール $a=(\tilde{R}_1,\tilde{R}_2,,\cdots\cdots,\tilde{R}_i)$ の論理的に可能な全体の集合を $\mathcal{S}$ とする．

[定義 2]　スッピス公正原理とは，人々のもつ選好関係を X 上の二項関係 J_i として表される倫理基準へと集約する次のようなルールである：任意の $a\in\mathcal{S}$ に対して，

$$J_i(x,y)=\bigvee_{\rho\in\Pi}\Big[\bigwedge_{j\in N}\tilde{R}_i((x,j),(y,\rho(j)))\Big].$$

上式は，次のような手順に従って x が y よりも公正と判断される程度を決定

せよと主張している：社会状態 y において個人間のいかなる立場の交換を行なったとしても，その結果よりも x が全員一致で望ましいとされる最低限の程度をもって，x が y より公正と判断される度合とせよ，というのである．もちろん，各個人のもつ一般化されたファジィ選好関係が異なる以上，スッピス的なファジィ公正関係 J_i も個人間で異ならざるをえない．だがそれらは，次の定理に示される性質をもつ．

［定理 1］ ファジィ・スッピス公正関係 J_i は準順序である．

（証明）（i）反射性：任意の $x \in X$ に対して，

$$J_i(x, x) = \bigvee_{\rho \in \Pi}\Big[\bigwedge_{j \in N} \tilde{R}_i((x, j), (x, \rho(j)))\Big]$$
$$\geqq \bigwedge_{j \in N} \tilde{R}_i((x, j), (x, j)) = 1$$
$$0 \leqq J_i(x, x) \leqq 1 \text{ より } J_i(x, x) = 1.$$

(ii) 推移性：任意の $x, y, z \in X$ に対して

$$J_i(x, z) \geqq J_i(x, y) \wedge J_i(y, z)$$

が成り立つことを示せばよい．ある置換 $\rho, \mu \in \Pi$ が存在して，

$$\begin{aligned}
&J_i(x, y) \wedge J_i(y, z)\\
&= \Big[\bigwedge_{j \in N} \tilde{R}_i((x, j), (y, \rho(j)))\Big] \wedge \Big[\bigwedge_{k \in N} \tilde{R}_i((y, k), (z, \mu(k)))\Big]\\
&= \bigwedge_{j \in N} \Big[\tilde{R}_i((x, j), (y, \rho(j))) \wedge \tilde{R}_i((y, \rho(j), (z, \mu(\rho(j))))\Big]\\
&\leqq \bigwedge_{j \in N} \Big[\tilde{R}_i((x, j), (z, \mu(\rho(j))))\Big] \leqq J_i(x, z)
\end{aligned}$$

ここで，$\pi(j) = \mu(\rho(j))$ とおけば，π は1対1対応であるから $\pi \in \Pi$ である．
□

セン［11；Theorem 9*2］によって証明されたように，通常の一般化された選好順序を前提とした場合，スッピス公正原理から導かれる公正関係はパレート原理と矛盾する．次の定理は，ファジィ選好関係の下でも両者が矛盾することを示している．そこでまず，ファジィ選好関係の下でパレート原理を定義する[6]．

［定義 3］（パレート原理）

パレート関係を P で表すとすれば，任意の一般化されたファジィ選好プロフィール $a = (\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \cdots\cdots, \tilde{R}_n) \in \mathcal{S}$，任意の $x, y \in X$ に対して，

$$P(x,y)=\bigwedge_{i\in N}\tilde{R}_i((x,i),(y,i))=\bigwedge_{i\in N}R_i(x,y).$$

ここでの定義に従うと，全員が一致して x が y よりも少なくとも同じくらいには望ましいと考える程度は，各個人がもっているその度合の下限によって与えられることになる．

[定理 2]　任意のプロフィール $a\in\mathcal{S}$ の下で，スッピス公正関係 J_i とパレート関係 P とは矛盾する．

(証明)　次のような反例を考える．

$\tilde{R}_1$	(x,1)	(x,2)	(y,1)	(y,2)
(x,1)	1	1/6	1/3	2/3
(x,2)	5/6	1	2/3	1
(y,1)	2/3	1/3	1	5/6
(y,2)	1/3	0	5/6	1

$\tilde{R}_2$	(x,1)	(x,2)	(y,1)	(y,2)
(x,1)	1	5/6	0	2/3
(x,2)	1/6	1	2/3	1/3
(y,1)	0	1/3	1	1/6
(y,2)	1/3	2/3	5/6	1

$$P(x,y)=R_1(x,y)\wedge R_2(x,y)=1/3\wedge 1/3=1/3$$

$$P(y,x)=R_1(y,x)\wedge R_2(y,x)=2/3\wedge 2/3=2/3$$

$$\begin{aligned}J_1(x,y)&=[\tilde{R}_1((x,1),(y,2))\wedge\tilde{R}_1((x,2),(y,1))]\\&\quad\vee[\tilde{R}_1((x,1),(y,1))\wedge\tilde{R}_1((x,2),(y,2))]\\&=[2/3\wedge 2/3]\vee[1/3\wedge 1]=2/3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_1(y,x)&=[\tilde{R}_1((y,1),(x,2))\wedge\tilde{R}_1((y,2),(x,1))]\\&\quad\vee[\tilde{R}_1((y,1),(x,1))\wedge\tilde{R}_1((y,2),(x,2))]\\&=[1/3\wedge 1/3]\vee[2/3\wedge 0]=1/3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_2(x,y)&=[\tilde{R}_2((x,1),(y,2))\wedge\tilde{R}_2((x,2),(y,1))]\\&\quad\vee[\tilde{R}_2((x,1)(y,1))\wedge\tilde{R}_2((x,2),(y,2))]\\&=[2/3\wedge 2/3]\vee[0\wedge 1/3]=2/3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_2(y,x)&=[\tilde{R}_2((y,1),(x,2))\wedge\tilde{R}_2((y,2),(x,1))]\\&\quad\vee[\tilde{R}_2((y,1),(x,1)\wedge\tilde{R}_2((y,2),(x,2))]\\&=[1/3\wedge 1/3]\wedge[0\vee 2/3]=1/3\end{aligned}$$

したがって，一般に両者の間に包含関係は存在しない．□

ファジィ・スッピス公正関係とファジィ・パレート関係とは矛盾しうることが明らかになったが，両者はいかなる条件の下で両立するであろうか．セン[11；Theorem 9*3] によって証明されたように，通常の一般化された選好順序の下ではそれが「容認公理」を満たす限り，パレート原理はスッピス公正原理に内包される．ファジィ選好関係の下でも同様の主張が成立するかを考えてみよう．まず「容認公理」を定式化する．

[定義 4] (容認公理)

任意の $x, y \in X$，任意の $i, j \in N$ に対して

$$\tilde{R}_i((x, i), (y, i)) = \tilde{R}_j(x, i), (y, i))$$

が成り立つとき，一般化されたファジィ・プロフィール $a=(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \cdots\cdots, \tilde{R}_n)$ は容認公理を満たすという．

[定理 3] 容認公理を満たす任意の一般化されたファジィ・プロフィール $a \in \mathcal{S}$ に対して

$$P \subset J_i \ (i=1, 2, \cdots\cdots, n).$$

(証明) 任意の $y, y \in X$ に対して

$$P(x, y) \leqq \bigwedge_{i \in N} J_i(x, y)$$

が成り立つことを示せばよい．

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \bigwedge_{i \in N} R_i(x, y) \\ &= \bigwedge_{i \in N} \tilde{R}_i((x, i), (y, i)) \\ &= \bigwedge_{i \in N} \tilde{R}_j((x, i), (y, i)) \quad (\text{容認公理より}) \\ &\leqq \bigvee_{\rho \in \Pi} [\bigwedge_{i \in N} [\tilde{R}_j((x, i), (y, \rho(i)))] \\ &= J_j(x, y) \end{aligned}$$

これがすべての $j \in N$ について成り立つ．□

さて，各個人がそれぞれに異なるファジィ・スッピス公正関係をもつとしたとき，適切な条件を満たす社会的公正関係をどのように構成すればよいであろうか．容易に理解されるように，この種の集計問題にはアロー流の不可能性定理が待ち受けているのだが[7]，ここではその問題に立ち入ることなく，スッピス公正原理に基づくファジィ社会的公正関係 J を単純に次のように定義する：

任意の $x, y \in X$ に対して

$$J(x, y)=\bigwedge_{i \in N} J_i(x, y).$$

このときJは次の性質をもつ.

［定理 4］ ファジィ・スッピス社会的公正関係 J は準順序である.

(証明) (i) 反射性: 任意の $x \in X$ に対して

$$\begin{aligned} J(x, x) &= \bigwedge_{i \in N} J_i(x, x) \\ &= \bigwedge_{i \in N}\{\bigvee_{\rho \in \Pi}[\bigwedge_{j \in N} \tilde{R}_i((x, j), (x, \rho(j)))]\} \\ &\doteq \bigwedge_{i \in N}[\bigvee_{\rho \in \Pi} \tilde{R}_i((x, j_0), (x, \rho(j_0)))] \quad (\exists j_0 \in N) \\ &\geqq \bigwedge_{i \in N} \tilde{R}_i((x, j_0), (x, j_0)) \\ &\geqq \tilde{R}_{j_0}((x, j_0), (x, j_0))=1 \end{aligned}$$

$0 \leqq J(x, x) \leqq 1$ より $J(x, x)=1$.

(ii) 推移性: 任意の $x, y, z \in X$ に対して

$$\begin{aligned} & J(x, y) \wedge J(y, z)=[\bigwedge_{i \in N} J_i(x, y)] \wedge [\bigwedge_{i \in N} J_i(y, z)] \\ & =[\bigwedge_{i \in N}\{\bigvee_{\rho \in \Pi}[\bigwedge_{j \in N} \tilde{R}_i((x, j), (y, \rho(j)))]\}] \\ & \quad \wedge[\bigwedge_{i \in N}\{\bigvee_{\mu \in \Pi}[\bigwedge_{k \in N} \tilde{R}_i((y, k), (z, \mu(k)))]\}] \\ & \leqq \bigwedge_{i \in N}[\{\bigvee_{\rho \in \Pi}[\bigwedge_{j \in N} \tilde{R}_i((x(j), (y, \rho(j)))]\} \\ & \quad \wedge\{\bigvee_{\mu \in \Pi}[\bigwedge_{k \in N} \tilde{R}_i((y, k), (z, \mu(k)))]\}] \\ & \leqq \bigwedge_{i \in N}\{[\bigwedge_{j \in N} \tilde{R}_i((x, j), (y, \rho(j)))] \wedge [\bigwedge_{j \in N} \tilde{R}_i((y, \rho(j)), (z, \mu(\rho(j))))]\} \end{aligned}$$

ここで $\pi(j)=\mu(\rho(j))$ とおくと, $\pi \in \Pi$ であるから

$$\begin{aligned} \text{与式} &\leqq \bigwedge_{i \in N}[\bigwedge_{j \in N} \tilde{R}_i((x, j), (z, \pi(j)))] \\ &\leqq \bigwedge_{i \in N}\{\bigvee_{\sigma \in \Pi}[\bigwedge_{j \in N} \tilde{R}_i((x, j), (z, \sigma(j)))]=J(x, z) \qquad \square \end{aligned}$$

これで J が反射性と推移性を満たすことは明らかになったが, 容易に例証されるように完備性は満たさない[8].

3 ファジィ・スッピス公正関係に基づく選択関数の性質

個人的公正関係 J_i, 社会的公正関係 J の構成の仕方から明らかなように, $J_i(x, y)=J_i(y, x)$, $J(x, y)=J(y, x)$, すなわち社会状態 x, y が同じくらい公正と見なしうるケースは排除されていない. まず, そのようないわば無差別の度合

を差し引くことによって，厳密に公正と見なしうる程度を定めることにしよう．

任意の $x, y \in X$ に対して

$$J^*(x, y)=[J(x, y)-J(y, x)]\vee 0$$

によってファジィ関係 J^* を構成する．$J^*(x, y)$ は y が x よりもスッピスの意味で厳密に公正でないと判断される程度を示している．J^* について次の定理が成立する．

[定理 5]　J^* は推移性を満たす．

(証明) 浅居＝Negoita 編 [1] pp. 193—94 を見よ．　□

$S\subset X$ を通常のファジィでない集合とする．任意の $x\in X$ に対して

$$\begin{aligned} C(S)(x) &= \bigwedge_{y\in S}[1-J^*(y, x)] \\ &= 1-\bigvee_{y\in S} J^*(y, x) \end{aligned}$$

と定義すれば，$C(S)(x)$ は x が S のいかなる要素 y よりも厳密に不公正とは見なされない程度を示すと考えることができる．K を X の通常の非空部分集合の族，$K=2^X-\{\phi\}$ とすれば

$$C: K\to K,\quad \forall S\in K: C(S)\subset S$$

となるので，$C(\cdot)$ は選択関数と考えることができる[9]．以下ではこのようにして構成された選択関数 $C(\cdot)$ の性質を検討する[10]．

[定理 6]　$\bigvee_{x\in S} C(S)(x)=1.$

(証明)　$\bigvee_{x\in S} C(S)(x)<1$ と仮定する．このとき任意の $x\in S$ に対して

$$\exists y\in S: (y, x)>0$$

となる．S は有限であるから，列 $\{x_0, x_1, \cdots\cdots, x_n=x_0\}$ が存在して

$$J^*(x_{i+1}, x_i)>0,\quad i=1, 2, \cdots\cdots, n-1$$

ところで J^* は推移性を満たすから

$$J^*(x_2, x_0)\geqq J^*(x_2, x_1)\wedge J^*(x_1, x_0)>0$$

$$J^*(x_3, x_0)\geqq J^*(x_3, x_2)\wedge J^*(x_2, x_0)>0$$

$$\cdots\cdots$$

$$J^*(x_0, x_0)=J^*(x_n, x_0)\geqq J^*(x_n, x_{n-1})\wedge J^*(x_{n-1}, x_0)>0$$

一方，$J^*(x_0, x_0)=[J(x_0, x_0)-J(x_0, x_0)]\vee 0=0$ であるから矛盾．　□

[定理 7]　任意の $S, T \in K$ に対して

$$S \subset T \rightarrow C(S) \supset C(T) \cap S.$$

(証明) 任意の $x \in S$ に対して

$$C(S)(x) = \bigwedge_{y \in S} [1 - J^*(y, x)]$$
$$\geqq \bigwedge_{y \in T} [1 - J^*(y, x)] = C(T)(x) \quad \square$$

この定理により，ファジィ選択関数 $C(\cdot)$ はセン [12] の Property α をファジィ選好理論に拡張した性質をもつことがわかった．それに対して次の定理は，同じくセン [12] の Property γ を拡張した性質が満たされることを示している．

[定理 8]　任意の $S, T \in K$ に対して

$$C(S \cup \dot{T}) \supset C(S) \cap C(T).$$

(証明) 任意の $x \in S \cap T$ に対して

$$[C(S) \cap C(T)](x) = C(S)(x) \wedge C(T)(x)$$
$$= \{\bigwedge_{y \in S} [1 - J^*(y, x)]\} \wedge \{\bigwedge_{y \in T} [1 - J^*(y, x])\}$$
$$= \bigwedge_{y \in S \cup T} [1 - J^*(y, x)] = C(S \cup T)(x)$$

一方，任意の $x \in (S \cup T)/(S \cap T)$ に対して

$$C(S)(x) \wedge C(T)(x) = 0. \quad \square$$

[定理 9]　$S \subset T$ が任意の $x \in S$，任意の $y \in T/S$ に対して，$C(T)(y) < C(T)(x)$ を満たすとする．そのとき，

$$C(S) \doteqdot C(T) \cap S.$$

(証明) 定理7より $C(S) \supset C(T) \cap S$.

逆の包含関係をいうために

$$C(S)(x) > C(T)(x)$$

となる $x \in S$ が存在すると仮定する．すなわち

$$\bigwedge_{t \in S} [1 - J^*(t, x)] > \bigwedge_{t \in T} [1 - J^*(t, x)]$$

が成り立つ．したがって，任意の $t \in S$ に対して

$$1 - J^*(t, x) > 1 - J^*(y, x) \qquad (*)$$

となる $y \in T/S$ が存在しなければならない．仮定より

$$\exists y_1 \in T:\ 1-J^*(y_1, y)<C(T)(x).$$

もし $y_1 \in S$ ならば，任意の $t \in T$ に対して

$$1-J^*(y_1, y)<C(T)(x) \leqq 1-J^*(t, x)$$

が成り立つので，特に $t=y_1$ とおくと

$$1-J^*(y_1, y)<1-J^*(y_1, x).$$

また，$1-J^*(y, x)<1-J^*(y_1, x)$ であるから

$$[1-J^*(y_1, y)] \vee [1-J^*(y, x)]<1-J^*(y_1, x).$$

$$\therefore J^*(y_1, y) \wedge J^*(y, x)>J^*(y_1, x)$$

となるが，これは J^* が推移性を満たすことに矛盾する．したがって $y_1 \in T/S$ となるが，このとき

$$\exists y_2 \in T:\ 1-J^*(y_2, y_1)<C(T)(x).$$

もし $y_2 \in S$ ならば上と同様に矛盾が示せる．よって $y_2 \in T/S$ となるが，このとき

$$\exists y_3 \in T:\ 1-J^*(y_3, y_2)<C(T)(x).$$

以下，同様に繰り返していく，T は有限集合であり，$J^*(y_{i+1}, y_i)>0$ は循環を含まないので[11]，次のような列 $\{y_0=y, y_1, \cdots\cdots, y_n\}$ を作ることができる：

$$y_i \in T/S(i=0, 1, \cdots\cdots, n-1),\quad y_n \in S,$$
$$1-J^*(y_{i+1}, y_i)<C(T)(x).$$

J^* が推移性を満たすことから，

$$\begin{aligned}
1-J^*(y_n, y) &\leqq 1-[\bigwedge_i J^*(y_{i+1}, y_i)] \\
&=\bigvee_i [1-J^*(y_{i+1}, y_i)] \\
&<C(T)(x) \\
&=\bigwedge_{t \in T}[1-J^*(t, x)] \\
&\leqq 1-J^*(y_n, x)
\end{aligned}$$

また（$*$）式より，$1-J^*(y_n, x)>1-J^*(y, x)$ であるから

$$1-J^*(y_n, x)>[1-J^*(y_n, y)] \vee [1-J^*(y, x)].$$

$$\therefore J^*(y_n, x)<J^*(y_n, y) \wedge J^*(y, x).$$

これは J^* が推移性を満たすことに矛盾する．　□

4　選択関数による順序づけの例

社会状態の集合が与えられたとき，ここで構成された選択関数 $C(\cdot)$ を使えばその集合の要素がどのように順序づけられるかを，例を用いて考えてみよう．選択可能な社会状態の集合を S とすれば，［定理 6］より S の中には $C(S)(x)=1$ となる x が存在する．この x は $C(S)(y)\neq 1$ となる y と比較して不公正と見なされる度合が小さいので，この x が最優先されることになる．もちろん，一般には $C(S)(x)=1$ となる x は唯一ではない．

［例 1］ $S=\{x, y, z\}, N=\{1, 2\}$ とし，S 上の選好 $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2$ が次のようなものであるとする．

$\tilde{R}_1$	(x,1)	(x,2)	(y,1)	(y,2)	(z,1)	(z,2)
(x,1)	1	1/6	1/6	2/3	1/8	5/6
(x,2)	5/6	1	5/6	5/6	1/8	5/6
(y,1)	5/6	1/6	1	5/6	1/8	5/6
(y,2)	1/3	1/6	1/6	1	1/8	5/6
(z,1)	7/8	7/8	7/8	7/8	1	7/8
(z,2)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/8	1

$\tilde{R}_2$	(x,1)	(x,2)	(y,1)	(y,2)	(z,1)	(z,2)
(x,1)	1	1/6	1/6	3/4	1/8	5/6
(x,2)	5/6	1	5/6	5/6	1/8	5/6
(y,1)	5/6	1/6	1	5/6	1/8	5/6
(y,2)	1/4	1/6	1/6	1	1/8	5/6
(z,1)	7/8	7/8	7/8	7/8	1	7/8
(z,2)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/8	1

定義に従って J_1, J_2 を計算すると，次の表を得る。

J_1	x	y	z
x	1	2/3	1/8
y	1/6	1	1/8
z	1/6	1/6	1

J_2	x	y	z
x	1	3/4	1/8
y	1/6	1	1/8
z	1/6	1/6	1

$J(x, y) = J_1(x, y) \wedge J_2(x, y)$, 並びに $J^*(x, y) = [J(x, y) - J(y, x)] \vee 0$ を用いて計算すると，次の表を得る。

J	x	y	z
x	0	2/3	1/8
y	1/6	0	1/8
z	1/6	1/6	0

J^*	x	y	z
x	0	1/2	0
y	0	0	0
z	1/24	1/24	0

定義に従って $C(S)$ を計算すると，

$$C(S)(x) = 23/24,\ C(S)(y) = 1/2,\ C(S)(z) = 1$$

よって，不公正でない方から順に並べると，z, x, y となる．

5　結論的覚書

以上本稿では，ファジィ選好関係を出発点としてスッピス公正原理を再構成し，それに基づく選択関数の性質を考察した．人々のもつ選好があいまいであることを許容する枠組みの下では，スッピス公正関係に基づいて与えられた社会状態の集合に含まれる各要素を順序づけることが可能となる．これまでの完備順序か半順序，前順序かという議論のもつ欠陥から抜けでる 1 つの方法がファジィ選好関係に出発点を求めることによって提示されうるのであり，それが示唆できたとすれば本稿の目的は達成されたことになる．ザデー [16] に始まるファジィ集合論の歴史はまだ浅く，ファジィ選好理論も未だ十分な関心を集めているとはいえない．ここで取り上げた類の問題も，理論の発展段階においては検討の価値があろう．

本稿の延長上にある課題を指摘して終わりとしたい．まず，同様の考察を他

の公正原理に適用してそこから得られる選択関数の特性を調べ，スッピス公正原理との比較を行うことが挙げられる．さらに，いくつかの公正原理を同時に満足する選択関数の構築可能性が問われなければならない．われわれの公正判断がしばしばあいまいにならざるをえないのは，素材となる選好関係があいまいだということの他に，公正判断がいくつかの公正原理を背景にもちつつなされるためでもある．これらの問題に対する接近には，ここで用いた枠組みが役立つであろう．

1) Sen [13] を参照せよ．

2) Sen [12], Suzumura [15] を参照せよ．

3) ファジィ集合論の基礎については，Zadeh [16], Kaufmann [7], Dubois and Prade [4], 浅居＝Negoita 編 [1] 等を参照せよ．

4) ファジィ選好関係については Barrett, Pattanaik and Salles [2], Basu [3], Dutta [5], Dutta, Panda and Pattanaik [6] 等参照せよ．

5) Suppes [14], Sen [11], Suzumura [15] を参照せよ．ここでの定義は通常のものとは異なり，厳密な公正関係と無差別なものとを区別していない．

6) ここで定義されたパレート原理は通常のものより相当に強い．ファジィ選好理論における通常のパーレト原理については Barret, Pattanaik and Salles [2], Dutta [5], Dutta, Panda and Pattanaik [6], Leclerc [8] 等を参照せよ．

7) ファジィ選好関係を前提とする場合，通常の不可能性定理よりもある意味で弱い不可能性定理が成立する．Barrett, Pattanaik and Salles [2], Dutta [5], Dutta, Panda and Pattanaik [6], Leclerc [8] 等を参照せよ．

8) 第4節の例を見よ．そこでは反射性，完備性，推移性を満たす $\tilde{R}_i$ から完備性を満たされない J_i, J が導かれている．

9) 選択関数については Basu [3] を参照せよ．

10) この節で以下に述べられる定理，およびその証明の技法については Ovchinnikov and Ozernoy [10] を参考にした．

11) 定理6の証明を見よ．

【参考文献】

[1] 浅居喜代治，C. V. Negoita 編『ファジィシステム理論入門』オーム社，1978年

[2] Barrett, C. R., P. K. Pattanaik and M. Salles, "On the Structure of Fuzzy Social Welfare Functions," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 19 (1986), 1—10.

[3] Basu, K., "Fuzzy Revealed Preference Theory," *Journal of Economic Theory*, vol. 32 (1984), 212—227.

[4] Dubois, D. and H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems*, Academic Press (1980).

[5] Dutta, B., "Fuzzy Preferences and Social Choice," *Mathematical Social Sciences*, vol. 13 (1987), 215—229.

[6] Dutta, B., S. C. Panda and P. K. Pattanaik," Exact Choice and Fuzzy Preferences," *Mathematical Social Sciences*, vol. 11 (1986), 53—68.

[7] Kaufmann, A., *Introduction to the Theory of Fuzy Subsets*, Academic Press (1975).

[8] Leclerc, B., "Efficient and Binary Consensus Functions on Transitively Valued Relations," *Mathematical Social Sciences*, vol. 8 (1984), 45—61.

[9] Ovchinnikov, S. V.;, "Struture of Fuzzy Binary Relations," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 6 (1981), 169—195.

[10] Ovchinnikov, S. V. and V. M. Ozernoy," Using Fuzzy Binary Relations for Identifying Noninferior Decision Alternatives," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 25 (1988), 21—32.

[11] Sen, A. K., *Collective Choice and Social Welfare*, Holden-Day (1970).

[12] Sen, A. K., "Choice Functions and Revealed Preference," *Review of Economic Studies*, vol. 38 (1971), 307—317.

[13] Sen, A. K., *Commodities and Capabilities*, North-Holland (1985). (邦訳『福祉の経済学——財と潜在能力——』鈴村興太郎訳，岩波書店，1988年)

[14] Suppes, P., "Some Formal Models of Grading Principles," *Synthese*, vol. 6 (1966), 284—306.

[15] Suzumura, K., *Rational Choice, Collective Decisions, and Social Welfare*, Cambridge University Press (1983).

[16] Zadeh, L. A., "Fuzzy Sets," *Information and Control*, vol. 8 (1965), 338—353.

(福岡大学助教授)