二つの代替弾力性定式の数値比較(*)

——三要素・非 CES 関数の場合——

室　田　　武

はじめに

代替の弾力性の概念を数学的に定式化したものとして，いくつかの公式がある．本稿の目的は，それらのうち，アレン＝宇沢による代替の弾力性と森嶋による代替の弾力性の二つをとりあげ，生産諸要素の雇用量の変化に伴って，それらの間にどの程度の差異が生じるかを，数値計算によって示すことにある．

第1節では，生産と分配の理論における代替の弾力性の基礎概念を，ジョーン・ロビンソンの原義に従って説明する．第2節では，いくつかある代替の弾力性の定式化のうち，最も代表的であると思われるアレン＝宇沢型の定式と森嶋型の定式について述べる．第3節では，これら二つの代替弾力性定式の下で，いわゆる CES 生産関数が導出される諸条件について，従来の研究のサーベイを行う．そして，第4節においては，非 CES 関数の下で，アレン＝宇沢型定式と森嶋型定式の間には，無視しえない大きさの差異が生じうることを数値計算によって立証し，アレン＝宇沢型定式の限界を示す．

(*) 本稿で議論する問題への関心は，長年月にわたり久我清教授（大阪大学社会経済研究所）から与えられた．記して感謝する．数値比較のためのコンピュータ計算にあたっては，石川顕子助手（一橋大学経済学部経済統計共同研究室）に全面的にお世話になった．厚くお礼申し上げる．

§1 代替の弾力性の基礎概念

諸産業の生産構造の分析にあたって，経済学においてはその構造を生産関数の形で把握することがしばしばある．その際によく議論される概念の一つに，生産要素間の代替の弾力性 (elasticity of substitution——略称 ES) がある．これは，ある生産要素に対する需要が，複数の要素間の相対価格の変動に対してどう変化するか，といった問題を分析する場合に有効な概念であるために，分配論の分野が議論されたり，あるいは，未知の生産関数の形を，計量経済学的に推定したりする作業においても登場することのある概念である．

学説史の観点から言えば，代替の弾力性という言葉を初めて提起したのは，Joan Robinson [1933] である．そこでは，完全競争の下で「諸要素の割合は，つねに諸要素の物理的な限界生産性がそれらの価格とおなじ比率にあるような割合になる」という前提から出発して，次のような定義がなされている．

(1) 「雇用された諸要素の分量の比率における比例的な変化を，それが依存するところの諸要素の価格の比率における比例的な変化で割ったものを，需要の弾力性ないし供給の弾力性の類推によって，代替の弾力性と呼ぶ」(邦訳版 [1956 ; p. 328] より引用.)

ところで，完全競争を仮定しなければ，諸要素の物理的な限界生産性の比とそれらの相対価格比との一致は必ずしも成立しないから，Robinson は，定義 (1) を不完全競争の場合も含む方向へと一般して，次の定義を提示した．

(2) 「諸要素の分量の比率における比例的な変化を，諸要素の物理的な限界生産性の比率における比例的な変化で割ったものを（代替の弾力性の一層基本的な定義として）採用する」(邦訳版 [1956 ; p. 425] より引用．ただし括弧内の補足は筆者による.)

そこで，一定期間内におけるn種類（nは自然数で，$n \geqq 2$ とする）の生産要素の投入量を $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ とするとき，その期間内に単一の生産物がyだけ生産される産業を考え，その投入・産出条件が，生産関数fによって

$$y = f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) \tag{3}$$

として表現されるものとしよう．そしてこの関数は，各独立変数について二階連続微分可能であると仮定する．要素iの物理的な限界生産性は，$f_i = \partial f / \partial x_i$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$ と定義される．この（3）に関して，定義（2）を数式で表現することにすれば，要素iの要素jに対するES——以下 σ_{ij} と書く——は

$$\sigma_{ij} = -\frac{\partial(\log\ x_j/x_i)}{\partial(\log\ f_j/f_i)}; \quad i, j = 1, 2, \cdots\cdots, n \tag{4}$$

となる．ここで，対数 log の底は何でもよい．

§2　アレン＝宇沢 ES と森嶋 ES

以下の議論の出発点として，先ず生産関数（3）を $n=2$ の場合に限定してみよう．この場合について，（4）式が示す計算を実際に行ってみると，

$$\sigma_{ij} = \frac{f_i f_j (f_i x_i + f_j x_j)}{x_i x_j (-f_j^2 f_{ii} + 2 f_i f_j f_{ij} - f_i^2 f_{jj})} \tag{5}$$

がえられる．ここで，$f_{ij} = \partial f^2 / \partial x_i \partial x_j$; $i, j = 1, 2$ である．次に，行列式Fを

$$F = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$$

と定義し，F_{ij} を，F の f_{ij} 要素についての余因子行列式 (co-factor) であるとする．このとき，（5）式を変形すると

$$\sigma_{ij} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2}{x_i x_j} \ \frac{F_{ij}}{F}; \quad i, j = 1, 2 \tag{6}$$

がえられる．

なお，（5），（6）共に，暗黙のうちに $i \neq j$ を仮定しての計算結果であるが，（5）において $i = j$ とおいてみると，分母が

$$x_i x_j (-f_j^2 f_{ii} + 2 f_i f_j f_{ij} - f^2 f_{jj}) = 0 \quad (i = j)$$

となって，（5）式そのものが定義不能となる．他方，（6）式の分母について

は，x_1, x_2 は一般に正数であり，F も一般にはゼロでないから，(6) によって，二要素の場合の，"ある要素のそれ自身に対する（自己）代替の弾力性" が形式的には定義可能である．(経済学的にはあまり意味のない概念ではあるとしても．)

次にもう一点注目しておきたいのは，二階連続微分可能な関数については，ヤングの定理などにより，$f_{ij}=f_{ji}$ が成立するから，二要素の生産関数については，$\sigma_{12}=\sigma_{21}$ が恒等的に成立するという事実である．この関係を代替の弾力性の対称性と呼ぶことにしよう．

さて，生産要素の種類が 3 以上 ($n \geqq 3$) になるとき，代替の弾力性はどのように定式化されるであろうか．これについて，従来の理論経済学において最も広く採用されている定式化は，R. G. D. Allen [1938; p. 504] が採用し，後にH. Uzawa [1963] も踏襲したもので，本稿ではそれをアレン＝宇沢 ES と呼び，$\sigma_{ij}{}^A$ と表記することにする．これは，二要素の場合の (6) 式を，一般の n 要素の場合に形式的に拡張したもので．

(7) $$\sigma_{ij}{}^A=\frac{\sum_{k=1}^{n} f_k x_k}{x_i x_j}\cdot\frac{F_{ij}}{F};\ i, j=1, 2, \cdots\cdots, n$$

として定義されている．

これに対して，森嶋通夫 [1967] は，(6) の形式的な拡張として (7) を導くのではなしに，(2) の原義に沿った定義式 (4) から出発する場合に，σ_{ij} がどう定式化されるか，という新しい問題提起を行った．生産関数 (3) について，一次同次性を仮定しての森嶋の計算式をここで繰り返すのは避けるが，森嶋の主旨を，一次同次性の仮定なしで定式化したのが，Kuga and Murota [1972] であり，これを森嶋 ES と呼び，$\sigma_{ij}{}^M$ と表記することにしよう．上記論文は，(3) において y を固定し，(4) 式で示される偏微分を計算して，

(8) $$\sigma_{ij}{}^M=\frac{f_j}{x_i}\frac{F_{ij}}{F}-\frac{f_j}{x_j}\frac{F_{jj}}{F};\ i, j=1, 2, \cdots\cdots, n$$

を得た．

定式 (7) と (8) が，数量的に異なる値を与えるであろうことは，次の二

点から容易に想像されるところである．先ず，

$$\sigma_{ij}{}^{A}\equiv\sigma_{ji}{}^{A},\ \sigma_{ij}{}^{M}\neq\sigma_{ji}{}^{M}\ ;\ i\neq j$$

という意味において，アレン=宇沢 ES が常に対称性をもつのに対して，森嶋 ES は一般的には非対称である．次に，先に定義した“ある要素に対するそれ自身の（自己）代替の弾力性”に関して，

$$\sigma_{ii}{}^{A}\neq 0,\ \sigma_{ii}{}^{M}\equiv 0\ ;\ i=1, 2, \cdots\cdots, n$$

となる．

§3　CES 関数の導出

本稿の目的そのものからは少しはずれることになるが，以上でみたアレン=宇沢 ES ないし森嶋 ES にある条件を課すとき，それが生産関数（3）の型を特定化することがあるので，本節ではこの問題についての従来の知見を手短かにサーベイして，次節での分析への準備としよう．

二つの生産要素（資本 K，労働 L）をもつ一次同次の生産関数から出発する経済成長モデルの構築と分析にあたって，R. M. Solow [1956] は，既によく知られていた Cobb=Douglas 関数などの他に

$$y=(K^{p}+L^{p})^{\frac{1}{p}} \tag{9}$$

という関数を新たにとりあげた．その後，世界19カ国の諸産業における資本を労働の代替関係を実証的に分析した論文の中で，Arrow, Chenery, Minhas and Solow [1961] は，

$$\sigma_{KL}=\sigma_{LK}=\sigma\ \text{（ある定数）}$$

を仮定すると，その下で生産関数が（9），ないしはその極限ケース（$p\to 0$）としての Cobb=Douglas 型に特定化されることを証明し，そうした関数を constant elasticity of substitution production function（以下，CES 関数と略）と呼んだ．

それにひき続いて H. Uzawa [1962] は，この命題を二要素に限定されない一般的な n 要素の場合へと拡張した定理を証明した．その定理の含意の一部を本稿の表記法で述べるならば，一次同次の生産関数を前提として，代替の弾

力性の定式としては（7）を用いるとき，もし

$$\sigma_{12}{}^{A}=\sigma_{23}{}^{A}=\cdots\cdots=\sigma_{n-1n}{}^{A}=\sigma \text{（ある定数）}$$

を仮定するならば，生産関数（3）は，

$$(10)\quad y=\begin{cases} a_0(a_1x_1x_2{}^{-\delta}+a_2x_2{}^{-\delta}+\cdots\cdots+a_nx_n{}^{-\delta})^{-\frac{1}{\delta}}\,;\ 1/(1+\delta)=\sigma\neq 1 \\ a_0(x_1{}^{\alpha_1}x_2{}^{\alpha_2}\cdots\cdots x_1{}^{\alpha_n})\,;\ \alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_n=\sigma=1 \end{cases}$$

$$a_0, a_1, \cdots\cdots \text{等々は正の定数}$$

と特定化され，またその逆も真であるということになる．(10) は，（9）を n 個の独立変数の場合へと一般化した CES 関数である．

さらに，(8) で示される森嶋 ES の概念を提出した Kuga and Murota [1972] は，

$$\sigma_{ij}{}^{M}=\sigma \text{（ある定数）}\,;\ i, j=1, 2, \cdots\cdots, n$$

を仮定するとき，生産関数（3）がやはり CES 関数 (10) に特定化されるだけでなく．

$$\sigma_{ij}{}^{M}=\sigma_{ij}{}^{A}\,;\ i, j=1, 2, \cdots\cdots, n,\ \ i\neq j$$

が成立し，逆もまた真であることを証明した．

その後 T. Murota [1977] は，$n=3$ の限定の下で，森嶋 ES の対称性，すなわち

$$\sigma_{12}{}^{M}=\sigma_{21}{}^{M}, \sigma_{23}{}^{M}=\sigma_{32}{}^{M}, \sigma_{31}{}^{M}=\sigma_{13}{}^{M}$$

を仮定するなら，(3) が (10) に特定化され，その逆命題を真であることを証明した．この定理の拡張を試た K. Kuga [1979] は，n が 3 以上であっても，一般的にこの命題が成立することを証明した．その後も，ロビンソンや森嶋の代替の弾力性の概念とその性質をめぐって，Blackorby and Russell [1981] や Murota [1980] による探究が引き続いている．

§4 三要素，非 CES の場合の数値分析

以上からわかるように，生産関数（3）が，あらかじめ (10) で示される CES 関数であることがわかっている場合には，ロビンソンの原義（2）に沿う代替の弾力性の定式としては，(7)，(8) いずれを用いてもよい．しかし，

(3) が CES 関数であるかどうか未知である場合には，アレン＝宇沢 ES と森嶋 ES とは，一般的には同義とは言えない.

そして，従来の諸研究で明らかでないのは，非 CES の場合に一般には $\sigma_{ij}^A \neq \sigma_{ij}^M$ であるとしても，両者間の差異は，実際的には無視してよいほど小さいものなのか，それとも無視できない性質のものなのか，という点である.

この問題全般への解を示すことは本稿の範囲を超えるので，とりあえずの中間的な検討として，以下では $n=3$ の場合を考えたい. 初めに，三変数 x_1, x_2, x_3 の間に対称性があり，また一次同次であるが，CES ではない関数

$$y=(x_1x_2=x_2x_3+x_3x_1)^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

をとりあげてみる. x_1, x_2, x_3 に様々な数値を与えることにより，各 (x_1, x_2, x_3) に対応して，(7) 式，(8) 式で与えられる σ_{ij}^A と σ_{ij}^M とがどのような値をとるかをコンピュータ計算により求め，アレン＝宇沢 ES と森嶋 ES の間に生じる乖離の大きさ，森嶋 ES の非対称性の程度を観察してみよう. 以下では，

$$\text{AES 行列}=\begin{pmatrix} \sigma_{11}^A & \sigma_{12}^A & \sigma_{13}^A \\ \sigma_{21}^A & \sigma_{22}^A & \sigma_{23}^A \\ \sigma_{31}^A & \sigma_{32}^A & \sigma_{33}^A \end{pmatrix}, \quad \text{MES 行列}=\begin{pmatrix} \sigma_{11}^M & \sigma_{12}^M & \sigma_{13}^M \\ \sigma_{21}^M & \sigma_{22}^M & \sigma_{23}^M \\ \sigma_{31}^M & \sigma_{32}^M & \sigma_{33}^M \end{pmatrix}$$

という表記法を用いる. 詳しい計算結果は付表で示すとして，例えばいくつかの (x_1, x_2, x_3) の組に対して，次のような値が得られる.（小数点 3 位以下すべて切り捨て.）

$$\begin{array}{ccc} (x_1, x_2, x_3) & \text{AES 行列} & \text{MES 行列} \\ (0.5,\ 1.0,\ 1.0) \rightarrow & \begin{pmatrix} -9.00 & 3.00 & 3.00 \\ 3.00 & -3.00 & 1.00 \\ 3.00 & 1.00 & -3.00 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0.00 & 2.25 & 2.25 \\ 3.00 & 0.00 & 1.50 \\ 3.00 & 1.50 & 0.00 \end{pmatrix} \\ (1.0,\ 1.0,\ 1.0) \rightarrow & \begin{pmatrix} -4.00 & 2.00 & 2.00 \\ 2.00 & -4.00 & 2.00 \\ 2.00 & 2.00 & -4.00 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0.00 & 2.00 & 2.00 \\ 2.00 & 0.00 & 2.00 \\ 2.00 & 2.00 & 0.00 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(1.5,\ 1.0,\ 1.0) \to \begin{pmatrix} -2.77 & 1.66 & 1.66 \\ 1.66 & -5.00 & 3.00 \\ 1.66 & 3.00 & -5.00 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0.00 & 2.08 & 2.08 \\ 1.66 & 0.00 & 2.50 \\ 1.66 & 2.50 & 0.00 \end{pmatrix}$$

$$(2.0,\ 1.0,\ 1.0) \to \begin{pmatrix} -2.25 & 1.50 & 1.50 \\ 1.50 & -6.00 & 4.00 \\ 1.50 & 4.00 & -6.00 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0.00 & 2.25 & 2.25 \\ 1.50 & 0.00 & 3.00 \\ 1.50 & 3.00 & 0.00 \end{pmatrix}$$

以上のわずかの数値例からも，アレン＝宇沢 ES と森嶋 ES の間の乖離，森嶋 ES の非対称性は，一般的には無視しえないものであることがわかる．他方，この設例においては，x_1, x_2, x_3 の間に対称性があり，しかも $x_2=x_3$ としているため，そのことを反映して，

$$\sigma_{12}{}^M=\sigma_{13}{}^M,\ \ \sigma_{21}{}^M=\sigma_{31}{}^M;\ \sigma_{23}{}^M=\sigma_{32}{}^M \tag{12}$$

が x_1 の変動にかかわらず成立していること，$x_1=x_2=x_3$ の場合に

$$\sigma_{ij}{}^A=\sigma_{ij}{}^M;\ i, j=1, 2, 3,\ \ i\neq j$$

が成立することなど，興味深い事実がいくつか観察される．

次に $x_2=x_3$ と設定するのをやめると，より詳しい計算結果は付表で示すとして，例えば

$$(0.5\quad 10.0\quad 1.0) \to \mathrm{MES}=\begin{pmatrix} 0.00 & 1.57 & 15.75 \\ 11.55 & 0.00 & 5.77 \\ 16.50 & 0.82 & 0.00 \end{pmatrix}$$

が得られ，ここではもはや (12) のような性質は消失している．

関数 (11) の場合と対比する意味で，付表においては，一次同次・非 CES で，x_1, x_2, x_3 の間に対称性のない関数

$$y=(x_1x_2+2x_2x_3+3x_3x_1)^{\frac{1}{2}} \tag{13}$$

についても，(x_1, x_2, x_3) の変化に応じての AES, MES の値の変化を表示しておく．

むすび

ロビンソンによる代替の弾力性の定義（2）は，一般的かつ基本的なもので

あるが，計量経済学的な方法によって生産関数の型を推定するといった実際的な問題を考える場合には，代替の弾力性のデータを得ることそのものが困難である．このため，普通は，生産要素市場における完全競争を仮定しても大きな誤りはないと考えられる場合に限り，ロビンソンによるもう一つの定義（1）を念頭において，市場のデータから算出される代替の弾力性の値を知ることにより，生産関数（3）の型を推定する．

この際，生産要素が二種類しかない場合，あるいは三種類以上あっても生産関数（3）が CES 関数（10）の型をしていることを前提としてよい場合については，アレン＝宇沢 ES は有効な概念であるということができる．しかし，一般に非 CES 関数が予想され，しかも要素数が三以上である場合には，本稿で明らかになったように，アレン＝宇沢 ES は，定義（1）ないし（2）に沿う代替の弾力性の概念からかけ離れたものであるから，実証分析においても，それのみに頼って濫用することには十分な注意が必要であろう．

他方，$\sigma_{ij}{}^{M} \neq \sigma_{ji}{}^{M} (i \neq j)$ という意味での非対称性を帯びた森嶋 ES について言えば，代替の弾力性本来の意味をよく表わしてはいるが，たとえその数量的なデータが，市場行動の観察により完全に得られたとしても，そのことが直ちに非 CES 生産関数の特定の型の推定に役立つかどうか，本稿の範囲では依然として不明である．とはいえ，生産要素の種類がそれほど多くなく，例えば本稿で考察したように三つであるというような比較的単純な場合についていえば，あり得そうな非 CES 関数の代表的なものいくつかについて，あらかじめ森嶋 ES の値の変化のパターンを計算で求めておき，その一方で市場から得られる定義（1）の意味での森嶋 ES の値をそれに対比させてみることによって，未知の非 CES 関数の型に一歩一歩近づいていくということは，全く不可能とはいえまい．そうした手法の開発は，今後の研究課題として残されている．

付表 アレン=宇沢 ES と森嶋 ES の数値比較

(a) $y=(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^{\frac{1}{2}}$ の場合

x_1, x_2, x_3	AES 行列			MES 行列		
0.1, 1.0, 1.0	−121.00	11.00	11.00	0.00	6.0.	6.05
	11.00	−2.20	0.20	11.00	0.00	1.10
	11.00	0.20	−2.20	11.00	1.10	0.00
0.2, 1.0, 1.0	−36.00	6.00	6.00	0.00	3.60	3.60
	6.00	−2.40	0.40	6.00	0.00	1.20
	6.00	0.40	−2.40	6.00	1.20	0.00
0.3, 1.0, 1.0	−18.77	4.33	4.33	0.00	2.81	2.81
	4.33	−2.60	0.60	4.33	0.00	1.30
	4.33	0.60	−2.60	4.33	1.30	0.00
0.4, 1.0, 1.0	−12.25	3.50	3.50	0.00	2.45	2.45
	3.50	−2.80	0.80	3.50	0.00	1.40
	3.50	0.80	−2.80	3.50	1.40	0.00
0.5, 1.0, 1.0	−9.00	3.00	3.00	0.00	2.25	2.25
	3.00	−3.00	1.00	3.00	0.00	1.50
	3.00	1.00	−3.00	3.00	1.50	0.00
0.6, 1.0, 1.0	−7.11	2.66	2.66	0.00	2.13	2.13
	2.66	−3.20	1.20	2.66	0.00	1.60
	2.66	1.20	−3.20	2.66	1.60	0.00
0.7, 1.0, 1.0	−5.89	2.42	2.42	0.00	2.06	2.06
	2.42	−3.40	1.40	2.42	0.00	1.70
	2.42	1.40	−3.40	2.42	1.70	0.00
0.8, 1.0, 1.0	−5.06	2.25	2.25	0.00	2.02	2.02
	2.25	−3.60	1.60	2.25	0.00	1.80
	2.25	1.60	−3.60	2.25	1.80	0.00
0.9, 1.0, 1.0	−4.45	2.11	2.11	0.00	2.00	2.00
	2.11	−3.80	1.80	2.11	0.00	1.90
	2.11	1.80	−3.80	2.11	1.90	0.00
1.0, 1.0, 1.0	−4.00	2.00	2.00	0.00	2.00	2.00
	2.00	−4.00	2.00	2.00	0.00	2.00
	2.00	2.00	−4.00	2.00	2.00	0.00

1.1, 1.0, 1.0	−3.64	1.90	1.90		0.00	2.00	2.00
	1.90	−4.20	2.20		1.90	0.00	2.10
	1.90	2.20	−4.20		1.90	2.10	0.00
1.2, 1.0, 1.0	−3.36	1.83	1.83		0.00	2.01	2.01
	1.83	−4.40	2.40		1.83	0.00	2.20
	1.83	2.40	−4.40		1.83	2.20	0.00
1.3, 1.0, 1.0	−3.13	1.76	1.76		0.00	2.03	2.03
	1.76	−4.60	2.60		1.76	0.00	2.30
	1.76	2.60	−4.60		1.76	2.30	0.00
1.4, 1.0, 1.0	−2.93	1.71	1.71		0.00	2.05	2.05
	1.71	−4.80	2.80		1.71	0.00	2.40
	1.71	2.80	−4.80		1.71	2.40	0.00
1.5, 1.0, 1.0	−2.77	1.66	1.66		0.00	2.08	2.08
	1.66	−5.00	3.00		1.66	0.00	2.50
	1.66	3.00	−5.00		1.66	2.50	0.00

0.6, 10.0, 1.0	−47.11	1.76	26.66		0.00	1.41	14.13
	1.76	−1.16	0.66		9.71	0.00	5.83
	26.66	0.66	−17.60		14.66	0.88	0.00
0.7, 10.0, 1.0	−37.12	1.52	24.28		0.00	1.29	12.99
	1.52	−1.17	0.77		8.40	0.00	5.88
	24.28	0.77	−18.70		13.35	0.93	0.00
0.8, 10.0, 1.0	−30.37	1.35	22.50		0.00	1.15	11.50
	1.35	−1.18	0.88		6.66	0.00	5.99
	22.50	0.88	−19.80		11.61	1.04	0.00
0.9, 10.0, 1.0	−22.00	1.10	20.00		0.00	1.10	11.00
	1.10	−1.21	1.10		6.05	0.00	6.05
	20.00	1.10	−22.00		11.00	1.10	0.00
1.0, 10.0, 1.0	−19.26	1.00	19.09		0.00	1.05	10.59
	1.00	−1.22	1.21		5.55	0.00	6.10
	19.09	1.21	−23.10		10.50	1.15	0.00
1.1, 10.0, 1.0	−19.26	1.00	19.09		0.00	1.05	10.59
	1.00	−1.22	1.21		5.55	0.00	6.10
	19.09	1.21	−23.10		10.50	1.15	0.00

	−17.11	0.93	18.33	0.00	1.02	10.26
1.2, 10.0, 1.0	0.93	−1.23	1.32	5.13	0.00	6.16
	18.33	1.32	−24.20	10.08	1.21	0.00
	−15.37	0.86	17.69	0.00	0.99	9.99
1.3, 10.0, 1.0	0.86	−1.24	1.43	4.78	0.00	6.21
	17.69	1.43	−25.30	9.73	1.26	0.00
	−13.95	0.81	17.14	0.00	0.97	9.77
1.4, 10.0, 1.0	0.81	−1.25	1.54	4.47	0.00	6.27
	17.14	1.54	−26.40	9.42	1.32	0.00
	−12.77	0.76	16.66	0.00	0.95	9.58
1.5, 10.0, 1.0	0.76	−1.26	1.65	4.21	0.00	6.32
	16.66	1.65	−27.50	9.16	1.37	0.00

(*b*) $y=(x_1x_2+2x_2x_3+3x_3x_1)^{\frac{1}{2}}$ の場合

	−9.14	6.33	1.44	0.00	4.11	1.37
0.6, 1.0, 1.0	6.33	−7.60	1.20	4.22	0.00	1.26
	1.44	−7.60	1.20	2.88	2.60	0.00
	−7.53	5.85	1.28	0.00	3.95	1.31
0.7, 1.0, 1.0	5.85	−8.20	1.40	3.90	0.00	1.36
	1.28	1.40	−1.80	2.57	2.70	0.00
	−6.41	5.50	1.16	0.00	3.85	1.28
0.8, 1.0, 1.0	5.50	−8.80	1.60	3.66	0.00	1.46
	1.16	1.60	−1.86	2.33	2.80	0.00
	−5.60	5.22	1.07	0.00	3.78	1.26
0.9, 1.0, 1.0	5.22	−9.40	1.80	3.48	0.00	1.56
	1.07	1.80	−1.93	2.14	2.90	0.00
	−5.00	5.00	1.00	0.00	3.75	1.25
1.0, 1.0, 1.0	5.00	−10.00	2.00	3.33	0.00	1.66
	1.00	2.00	−2.00	2.00	3.00	0.00
	−4.52	4.81	0.93	0.00	3.73	1.24
1.1, 1.0, 1.0	4.81	−10.60	2.20	3.21	0.00	1.76
	0.93	2.20	−2.06	1.87	3.10	0.00

			−4.14	4.66	0.88	0.00	3.73	1.24
1.2,	1.0,	1.0	4.66	−11.20	2.40	3.11	0.00	1.86
			0.88	2.40	−2.13	1.77	3.20	0.00
			−3.84	4.53	0.84	0.00	3.74	1.24
1.3,	1.0,	1.0	4.53	−11.80	2.60	3.02	0.00	1.96
			0.84	2.60	−2.20	1.69	3.30	0.00
			−3.58	4.42	0.80	0.00	3.76	1.25
1.4,	1.0,	1.0	4.42	−12.40	2.80	2.95	0.00	2.06
			0.80	2.80	−2.26	1.61	3.40	0.00
			−3.37	4.33	0.77	0.00	3.79	1.26
1.5,	1.0,	1.0	4.33	−13.00	3.00	2.88	0.00	2.16
			0.77	3.00	−2.33	1.55	3.50	0.00

参考文献

Allen, R. G. D. (1938), *Mathematical Analysis for Economists*, London : Macmillan.

Arrow, K. J., H. B. Chenery, B. S. Minhas, and R. M. Solow (1961), "Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency," *The Review of Economics and Statistics*, Vol. XLIII, No. 3, pp. 225—250.

Blackorby, C., and R. R. Russell (1981), "The Morishima Elasticity of Substitution : Symmetry, Constancy, Separability, and its Relationship to the Hicks and Allen Elasticities," *Review of Economic Studies*, Vol. XLIII, No. 1, pp. 147—158.

Kuga, K. (1979), "On the Symmetry of Robinson Elasticities of Substitution : The General Case," *Review of Economic Studies*, Vol. 46, pp. 527—531.

Kuga, K., and T. Murota (1972), "A Note on Definitions of Elasticity of Substitution in Many Input Case," *Metroeconomica*, Vol. XXIV, Fasc. III, pp. 285—290.

森嶋通夫 (1967),「弾力性理論に関する二，三の提案」,『経済評論』, Vol. 16, pp. 144—150.

Murota, T. (1977), "On the Symmetry of Robinson Elasticities of Substitution : A Three-Factor Case," *Review of Economic Studies*, Vol. XLIV, No. 1, pp. 173—176.

Murota, T. (1980), "A Memorandum on the Factor Flexibility and Elasticity of Substitution," *The Economic Studies Quarterly*, Vol. XXXI, No, 2, pp. 150—155.

Robinson, J. (1933), *The Economics of Imperfect Competition*. London : Macmillan. 邦訳：ジョーン・ロビンソン (1956),『不完全競争の経済学』, 加藤泰男訳, 東京：文雅堂書店.

Solow, R. M. (1956), "A Contribution to the Theory of Economic Growth," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 70, pp. 65—94.

Uzawa, H. (1962), "Production Functions with Constant Elasticities of Substitution," *Review of Economic Studies*, Vol. 29, pp. 291—299.

(一橋大学教授)