

国債利回りの期間構造

——予備的分析——

釜 江 廣 志

§1 はじめに

利子率の期間構造については、従来から多くの議論と計測がなされてきた。期間構造に関する諸仮説のうち、特に近年においては、期待仮説 (expectation hypothesis) が合理的期待仮説と組合わされて、検証の対象とされており、わが国においてもこのような実証的研究はいくつか行なわれている。

本稿では、純粋期待仮説 (pure expectation hypothesis) とリスク・プレミアム (または流動性プレミアム) の存在を考慮に入れる広義の期待仮説とが取り上げられ、第2節で従来のそれらに関する議論の整理がなされる。第3節で、2つの仮説についての外国における計測とその結果が概観され、併せて日本の最近の計測がレビューされる。第4節では、わが国の長期国債の利回りを対象として上記の仮説の直截的なテストが行なわれる。第5節では要約が述べられる。

§2 期間構造に関する諸仮説の定式化

この節では、利子率の期間構造に関する純粋期待仮説の3形態が取り上げられる。また一定の条件下では3形態がコンシステントであることがデュアレションの概念を用いて示される (付論2)。さらにこれらの各形態に対応してプレミアムが定義され、広義の期待仮説が定式化される。

期間構造に関する純粋期待仮説の3形態は次のとおりである¹⁾。(i) 長期利

子率が将来の短期利子率の予想値の平均に等しいとするもの、(ii) フォワード・レートが将来のスポット・レート²⁾の予想値に等しいとするものと、(iii) 長期債の予想される所有期間利回りがスポット・レートに等しいとするものである。長期債として利付債を対象とする場合、式で表すと、各々

$$(1) \quad R_t^{(i)} = \sum_{k=0}^{i-1} W(k) E_t(R_{t+k}^{(1)})$$

$$(2) \quad f_t^{(n,m)} = E_t(R_{t+n}^{(m)}), \quad m > 0, n \geq 0$$

$$(3) \quad E_t(h_t^{(i,j)}) = R_t^{(j)}, \quad i \geq j > 0$$

である。ここに、 $R_t^{(i)}$ は残存 i 期の債券の期 t における最終利回り、 W は

$$(4) \quad W(k) = \frac{g^k(1-g)}{1-g^i} \quad 0 < g < 1,$$

g は割引関数で、割引率を $\bar{R}$ として $g = 1/(1+\bar{R})$ である。 $f_t^{(n,m)}$ は期 t から n 期先の m 期のフォワード・レートの線型近似、 $h_t^{(i,j)}$ は残存 i 期の債券の j 期間の所有期間利回りの線型近似で、各々次のように表される³⁾。

$$(5) \quad f_t^{(n,m)} = \frac{D_{m+n}R_t^{(m+n)} - D_nR_t^{(n)}}{D_{m+n} - D_n}, \quad m > 0, n \geq 0,$$

$$(6) \quad h_t^{(i,j)} = \frac{D_iR_t^{(i)} - (D_i - D_j)R_{t+j}^{(i-j)}}{D_j}, \quad i \geq j > 0.$$

ここに D_i は残存 i 期の債券のデュアレーションで、 $\bar{R}$ を 1 期当りの最終利回りとして g を定義して

$$(7) \quad D_t = \frac{\sum_{k=1}^i kg^k C_t + ig^i}{\sum_{k=1}^i g^k C_t + g^i}$$

と定義される。 C_t は 1 期当りのクーポン・レートであり、額面を 1 とする。なおこの D_t は期数表示である。最終利回りの定義によれば

$$(8) \quad P = \sum_{k=1}^i \frac{C_t}{(1+\bar{R})^k} + \frac{F}{(1+\bar{R})^i}$$

であるから、パー債つまり価格 P が額面 F に等しいなら、

$$(9) \quad P = F = 1.$$

これから

$$1 = \sum_k \frac{C_k}{(1+\bar{R})^k} + \frac{1}{(1+\bar{R})^t}$$

$$= \frac{C_t}{\bar{R}} \left(1 - \frac{1}{(1+\bar{R})^t} \right) + \frac{1}{(1+\bar{R})^t}.$$

従って

$$(10) \quad C_t = \bar{R}$$

である。(9), (10) を用いると, (7) の分母は P つまり 1 に等しく, (7) の分子はこれを E とすると

$$(11) \quad E - gE = 1 - g^t$$

であり, 結局

$$(12) \quad D_t = \frac{1 - g^t}{1 - g}, \quad i \geq 0$$

である。これから

$$(13) \quad D_1 = 1, D_0 = 0, D_{t+1} - D_t = g^t$$

である。

なお長期債として割引債を採る場合, (1) は

$$(14) \quad R_t^{(t)} = \frac{1}{i} \sum_{k=0}^{t-1} E_t(R_{t+k}^{(1)})$$

である。これは, (4) と (12), (13) から一般に

$$(15) \quad W(k) = \frac{g^k(1-g)}{1-g^t} = \frac{D_{k+1} - D_k}{D_t}$$

であり, 割引債の場合付論の式 (A 2) より, $D_t \rightarrow i$ であるから $W(k)$ は $1/i$ に近づくためである。また (2), (3) は式自体には変化がないが, (2), (3) の左辺はそれぞれ (5), (6) ではなく

$$(16) \quad f_t^{(n,m)} = \frac{(m+n)R_t^{(m+n)} - nR_t^{(n)}}{m}$$

$$(17) \quad h_t^{(i,j)} = \frac{iR_t^{(i)} - (i-j)R_{t+j}^{(i-j)}}{j}$$

である。

純粋期待仮説の3形態は必ずしも互いにコンシステントではないが⁴⁾、線型近似を用いて定式化した形態は互いにコンシステントであることが説明できる(付論2参照)。

次に、時間とともに変化するリスク・プレミアム(または流動性プレミアム)の存在を考慮する広義の期待仮説は、純粋期待仮説を拡張したもので、これに対応して以下の3形態がある。即ち、(i) 長期利子率が将来の予想短期利子率の加重平均とプレミアムの合計に等しい⁵⁾

$$(18) \quad R_t^{(i)} = \sum_{k=0}^{i-1} W(k) E_t(R_{t+k}^{(1)}) + \omega_t^{(i)},$$

(ii) n 期先の m 期のフォワード・レートが将来の予想スポット・レートとプレミアムの合計に等しい

$$(19) \quad f_t^{(n,m)} = E_t(R_{t+n}^{(m)}) + \phi_t^{(n,m)},$$

(iii) 残存 i 期の長期債の j 期間の予想所有期間利回りがスポット・レートとプレミアムの合計に等しい

$$(20) \quad E_t(h_t^{(i,j)}) = R_t^{(j)} + \phi_t^{(i,j)},$$

である。これらのうち (ii) と (iii) のプレミアムの間には次の関係がある⁶⁾。

$$(21) \quad \phi_t^{(i,j)} = \frac{D_i - D_j}{D_j} \phi_t^{(j,i-j)}.$$

この導出は次のとおりである。(20) に (6) を代入して

$$(22) \quad \phi_t^{(i,j)} = \frac{D_i R_t^{(i)} - (D_i - D_j) E_t(R_{t+j}^{(i-j)})}{D_j} - R_t^{(j)}.$$

(19) に (5) を代入して

$$\phi_t^{(j,i-j)} = \frac{D_i R_t^{(i)} - D_j R_t^{(j)}}{D_i - D_j} - E_t(R_{t+j}^{(i-j)}).$$

これから (21) の右辺は

$$\frac{D_i R_t^{(i)} - D_j R_t^{(j)}}{D_j} - \frac{D_i - D_j}{D_j} E_t(R_{t+j}^{(i-j)})$$

となり、これは (22) から $\phi_t^{(i,j)}$ に等しく、式 (21) が成立する。

§3 従来の実証研究

本節では、期待仮説の統計的テストのうち主要なものが概観される。対象は期待仮説（純粋なそれとプレミアムを含む広義のそれ）の直接的なテストと、利回りのボラティリティの分散についての制約を導出しての、間接的なテストである。

まず、純粋期待仮説の直接的なテストとして、この仮説と合理的期待仮説との結合仮説の下で導出される関係式をテストするものに Shiller, Campbell & Schoenholtz (1983), Jones & Roley (1983) と Mankiw & Miron (1986) がある。第1の論文は割引債と利付債を、それ以外は割引債のみを、分析対象とする。結果は総じて上記の結合仮説を否定しているが、Mankiw & Miron は米国の1890年から1914年までの期間では仮説の説明力が相対的にあったと評価する。

これに対し、Friedman (1979) と Flavin (1984) は期待形成については特別の仮説を用いなくて利子率予想のサーベイ・データを採用して、純粋期待仮説のテストを行なう。前者の結果はこの仮説を否定し、後者の結果の一部は肯定している。

次に、広義の期待仮説のテストの多くは、プレミアム自体を時間とともに変化する値を持つ変数で説明しようとするもので、Friedman (1979), Jones & Roley (1983), Shiller, Campbell & Schoenholtz (1983), Fama (1984), Engle, Lilien & Robins (1987) などがある。これらは時間とともに変化するプレミアムの存在を示している。また Mankiw & Summers (1984) は、広義の期待仮説から導出される関係式の係数とプレミアムの分散の関係を示し、得られた係数の推定値からプレミアムの分散が0でないこと、つまりプレミアムが時間とともに変化することを言う。

第3に、期待仮説の間接的なテストとして、所有期間利回りのボラティリティに関するテストがある。これは期待仮説と合理的期待仮説の下で所有期間利回りの変動の大きさ（即ち、分散または標準偏差）に関する不等式を導出し、

実際のデータから計算されるボラティリティがそれを満足するか否かを調べるものである。Shiller (1979) は純粋期待仮説について、また Amsler (1984) はプレミアムを考慮する広義の期待仮説についてテストを行ない、いずれも仮説を棄却している。

最後に、わが国の最近の実証的研究を2つ取り上げる。まず、鹿野 (1984) は、形態 (i) の純粋期待仮説と合理的期待仮説を前提とし、Mankiw & Summers (1984) と同様の定式化を用いて昭和52年4月から59年6月までの期間をテストして、「純粋期待理論及び一定のリスク・プレミアムを考慮した期待理論が成立し得る」(p. 49) との結論を得た⁷⁾。ところで一定のプレミアムが存在すると言うには、鹿野の式 (20) で α の推定値が有意に0と異なることが必要であるが、その表2はこのことを示していない。他方 β の推定値は理論値 (0.01) と有意に異ならない。従って鹿野の結論は「純粋期待仮説のみが成立する」と改められるべきである。

また白川 (1987) は、形態 (iii) の純粋期待仮説と合理的期待仮説⁸⁾ (白川の p. 103 の最初の式) とを仮定して鹿野と同様の関係式を導出し、昭和56年4月から61年6月までの期間をテストして、時間とともに変化するプレミアムの存在可能性を見出した。次いで、異時点間の資産評価モデルにもとづいてプレミアムの分散の理論値を求めるなどの方法を用いてテストを行ない、プレミアムが時間とともに変化するとの仮説が棄却されないという結論を得た。

§4 わが国の期間構造の計測

この節では、わが国の国債利回りを対象として、純粋期待仮説のテストと、時間とともに変化するプレミアムについてのテストがなされる。用いられる定式化は、割引債に関する Jones & Roley (1983) の定式化を利付債についてのそれに拡張したものである。時間とともに変化する値を持つ説明変数を導入して計測することによって、プレミアムについての直截的なテストが可能になる。

まず、純粋期待仮説と合理的期待仮説の結合仮説下では、次の定式化が可能

である。線型近似された所有期間利回りについての関係

$$(A\ 17) \quad h_t^{(t,1)} = D_t R_t^{(t)} - (D_t - 1) R_{t+1}^{(t-1)}$$

から

$$(23) \quad E_t(h_t^{(t,1)}) = D_t R_t^{(t)} - (D_t - 1) E_t(R_{t+1}^{(t-1)})$$

である。合理的期待仮説⁹⁾

$$(24) \quad R_{t+1}^{(t-1)} = E_t(R_{t+1}^{(t-1)}) + e'_{t+1}$$

を用いると、(23) は

$$(25) \quad \begin{aligned} E_t(h_t^{(t,1)}) &= D_t R_t^{(t)} - (D_t - 1) R_{t+1}^{(t-1)} - e_{t+1} \\ &= h_t^{(t,1)} - e_{t+1} \end{aligned}$$

となる。ここに、式(24)の右辺第1項は期 t において利用可能な情報の下での期待値を表し、第2項は予測の誤差を表す。形態(iii)の純粹期待仮説からの

$$(3) \quad E_t(h_t^{(t,1)}) = R_t^{(1)}$$

を(25)に代入して

$$(26) \quad h_t^{(t,1)} = R_t^{(1)} + e_{t+1}$$

が得られる。この式は計測のために

$$(27) \quad h_t^{(t,1)} = a + b R_t^{(1)} + e_{t+1}$$

と表される。ここで a はプレミアムを表すと解釈できるが、 a は定数であるので時間とともに変化するプレミアムを計測することはできない。そこで、時間とともに変化するいくつかの変数 x_{jt} が導入され、式(27)は

$$(28) \quad h_t^{(t,1)} = a + b R_t^{(1)} + \sum_j c_j x_{jt} + e_{t+1}$$

と変形される。さらに、プレミアム存在の可能性があれば、プレミアム自体を変数 x_{jt} で説明するために式(28)を

$$(29) \quad h_t^{(t,1)} - R_t^{(1)} = a' + \sum_j d_j x_{jt} + e''_{t+1}$$

とする。

わが国の長期国債の利払いは年2回であるから、最終利回りは半年複利で計

算されるのが適切であり、計測の単位期間（つまり所有期間利回りを計算する際の1所有期間）は本稿では6か月とされる。計測の対象期間は昭和52年3月から61年12月までで、四半期データが用いられる¹⁰⁾ので40期のサンプルが採られる。52年以降のデータが用いられるのは、国債流動化開始後の期間が分析対象とされるためである。

計測方法は、条件付き最小二乗法（CLS）が用いられる¹¹⁾。これは、計測の単位期間が6か月でデータが四半期毎に採集される場合、誤差項が1次の移動平均過程に従う¹²⁾ことを考慮する必要があるためである¹³⁾。

長期利子率として、残存7, 7.5, 8, 8.5, 9年の長期国債の最終利回り（複利）が用いられる（データの詳細は付録参照）。短期利子率は3か月物現先レートを用いて推計した6か月物のレートである。

時間とともに変化する値を持つ説明変数として、以下では、長期利子率そのものと、長期利子率の予想変化（predicted change）、つまり1期先の i 期間のフォワード・レートと残存 i 期の長期利子率の差¹⁴⁾、の2種類が用いられる。計測結果を示す表I—1からI—5までにおいて、前者のみが用いられるのが式(B)，後者のみが用いられるのが式(C)，両者が用いられるのが式(D)と表示される。式(A)では両者とも用いられない。

表 I—1 所有期間利回りの計測結果（残存7年）

eq.	dependent variable	constant	$R^{(1)}$	$R^{(14)}$	predicted change	MA1	SSR	SE	R^2	F
A	$h^{(14,1)}$	3.367 (0.65)	1.089 (1.49) ((0.12))			-0.8093 (-8.27)	1415.0	6.183	0.2936	—
B	$h^{(14,1)}$	-16.03 (-1.71)	0.01742 (0.02) ((-1.19))	3.622 (2.41)		-0.8807 (-9.82)	1239.0	5.867	0.3812	5.256*
C	$h^{(14,1)}$	-15.82 (-1.68)	3.617 (2.92) ((2.11))#		35.41 (2.38)	-0.8769 (-9.75)	1241.0	5.872	0.3801	5.188*
D	$h^{(14,1)}$	-16.53 (-1.72)	-20.18 (-0.44) ((-0.46))	23.86 (0.54)	-198.9 (-0.44)	-0.9010 (-9.27)	1233.0	5.936	0.3841	2.657

注) 1 () 内は t 値, (()) 内は係数推定値と1との差の t 値で, # 印は5%で有意に1と異なることを示す。

2 MA1 は1次の移動平均パラメータ。

3 F の * 印は「 $R^{(1)}$ 以外の係数が0」の仮説を5%水準で棄却することを示す。

表 I—2 (残存 7.5 年)

eq.	dependent variable	constant	$R^{(1)}$	$R^{(15)}$	predicted change	$MA1$	SSR	SE	R^2	F
A	$h^{(15,1)}$	5.455 (0.92)	0.7227 (0.86) ((-0.33))			-0.7318 (-6.26)	1670.0	6.718	0.2334	—
B	$h^{(15,1)}$	-14.85 (-1.47)	-0.7752 (-0.84) ((-1.93))#	4.139 (2.50)		-0.8392 (-8.18)	1457.0	6.362	0.3311	5.409*
C	$h^{(15,1)}$	-14.72 (-1.46)	3.343 (2.53) ((1.77))#		43.39 (2.49)	-0.8370 (-8.13)	1458.0	6.363	0.3307	5.380*
D	$h^{(15,1)}$	-14.97 (-1.46)	-6.426 (-0.11) ((-0.13))	9.803 (0.17)	-59.57 (-0.10)	-0.8405 (-7.99)	1457.0	6.451	0.3313	2.631

表 I—3 (残存 8 年)

eq.	dependent variable	constant	$R^{(1)}$	$R^{(16)}$	predicted change	$MA1$	SSR	SE	R^2	F
A	$h^{(16,1)}$	5.431 (1.02)	0.8184 (1.12) ((-0.25))			-0.8626 (-10.13)	1538.0	6.447	0.3120	—
B	$h^{(16,1)}$	-14.55 (-1.33)	-0.1191 (-0.14) ((-1.32))	3.579 (2.07)		-0.9307 (-12.07)	1399.0	6.233	0.3744	3.676
C	$h^{(16,1)}$	-14.64 (-1.36)	3.469 (2.45) ((1.74))#		40.05 (2.10)	-0.9311 (-12.10)	1395.0	6.224	0.3762	3.793
D	$h^{(16,1)}$	-11.77 (-1.03)	46.70 (0.82) ((0.81))	-43.65 (-0.76)	521.0 (0.83)	-0.9237 (-11.46)	1371.0	6.258	0.3869	2.193

表 I—4 (残存 8.5 年)

eq.	dependent variable	constant	$R^{(1)}$	$R^{(17)}$	predicted change	$MA1$	SSR	SE	R^2	F
A	$h^{(17,1)}$	4.628 (0.75)	0.8153 (0.93) ((-0.21))			-0.7625 (-6.81)	1833.0	7.039	0.2971	—
B	$h^{(17,1)}$	-15.85 (-1.35)	-0.5533 (-0.56) ((-1.56))	4.039 (2.08)		-0.8398 (-8.35)	1660.0	6.790	0.3637	3.856
C	$h^{(17,1)}$	-16.28 (-1.41)	3.533 (2.34) ((1.67))		49.13 (2.17)	-0.8457 (-8.44)	1649.0	6.769	0.3676	4.129*

注) 式 D は計算が収束しない。

表 I—5 (残存9年)

eq.	dependent variable	constant	$R^{(1)}$	$R^{(18)}$	predicted change	MA1	SSR	SE	R^2	F
A	$h^{(18,1)}$	2.885 (0.43)	1.048 (1.11) ((0.05))			-0.6970 (-5.69)	2119.0	7.568	0.2580	—
B	$h^{(18,1)}$	-28.07 (-2.14)	-0.8495 (-0.91) ((-1.97))#	6.072 (3.08)		-0.9407 (-12.16)	1906.0	7.276	0.3326	4.135*

注) 式 C, D は計算が収束しない。

式 (28) において

$$\begin{cases} b=1 \\ c_j=0 \end{cases} \quad (\text{全ての } j \text{ に対し})$$

であれば結合仮説が成立する。各表の右端の列の F 値は、各々の式の回帰の残差平方和を用いてなされる F テスト¹⁵⁾の値である。これによれば、上記の仮説は、式 (B) については残存 7, 7.5, 9 年において否定され、式 (C) については 7, 7.5, 8.5 年において否定される¹⁶⁾。このようにかなりの場合において結合仮説は否定される。

次に、従来の諸研究¹⁷⁾のように期待形成が合理的であると仮定される場合、プレミアムが存在しかつそれが一定であるかあるいは時間とともに変化するかをテストするために、式 (29) が計測される。結果は表 II—1 から II—5 までである。各表の式 (b), (c), (d) では表 I の式 (B), (C), (D) の各々と同様の説明変数が用いられる。定数項のみが有意でかつ各説明変数の係数が非有意であれば、プレミアムは一定であるが、こうであるのは残存 7 年と 8 年の式

表 II—1 プレミアムの計測結果 (残存7年)

eq.	dependent variable	constant	$R^{(14)}$	predicted change	MA1	SSR	SE	R^2
b	$h^{(14,1)} - R^{(1)}$	-14.86 (-1.59)*	2.587 (2.10)**		-0.8857 (-10.30)	1288.0	5.901	0.3515
c	$h^{(14,1)} - R^{(1)}$	3.281 (1.80)**		9.519 (1.07)	-0.8101 (-8.30)	1373.0	6.091	0.3091
d	$h^{(14,1)} - R^{(1)}$	-16.00 (-1.71)**	2.638 (2.13)**	9.607 (1.18)	-0.8796 (-9.77)	1240.0	5.868	0.3761

注) () 内は t 値で、それにつけた **, *印は各々 5% と 10% 水準で有意であることを示す。

表 II—2 (残存 7.5 年)

eq.	dependent variable	constant	$R^{(15)}$	predicted change	MA1	SSR	SE	R^2
b	$h^{(15,1)} - R^{(1)}$	-10.71 (-1.05)	1.946 (1.44)*		-0.7667 (-6.97)	1591.0	6.557	0.2671
c	$h^{(15,1)} - R^{(1)}$	2.593 (1.35)*		17.22 (1.63)*	-0.7811 (-7.23)	1571.0	6.515	0.2764
d	$h^{(15,1)} - R^{(1)}$	-14.82 (-1.47)*	2.357 (1.78)**	18.70 (1.93)**	-0.8380 (-8.14)	1457.0	6.362	0.3286

表 II—3 (残存 8 年)

eq.	dependent variable	constant	$R^{(16)}$	predicted change	MA1	SSR	SE	R^2
b	$h^{(16,1)} - R^{(1)}$	-11.18 (-1.04)	2.121 (1.50)*		-0.9354 (-13.59)	1470.0	6.304	0.3386
c	$h^{(16,1)} - R^{(1)}$	3.415 (1.76)**		11.25 (1.12)	-0.8689 (-10.44)	1490.0	6.347	0.3296
d	$h^{(16,1)} - R^{(1)}$	-14.51 (-1.33)*	2.452 (1.71)**	12.58 (1.33)*	-0.9300 (-11.99)	1397.0	6.230	0.3715

表 II—4 (残存 8.5 年)

eq.	dependent variable	constant	$R^{(17)}$	predicted change	MA1	SSR	SE	R^2
b	$h^{(17,1)} - R^{(1)}$	-11.10 (-0.96)	1.971 (1.28)		-0.7906 (-7.51)	1762.0	6.902	0.3031
c	$h^{(17,1)} - R^{(1)}$	2.560 (1.25)		16.00 (1.28)	-0.8009 (-7.69)	1764.0	6.905	0.3024
d	$h^{(17,1)} - R^{(1)}$	-15.86 (-1.36)*	2.482 (1.61)*	18.85 (1.60)*	-0.8414 (-8.36)	1656.0	6.782	0.3453

表 II—5 (残存 9 年)

eq.	dependent variable	constant	$R^{(18)}$	predicted change	MA1	SSR	SE	R^2
b	$h^{(18,1)} - R^{(1)}$	-13.59 (-1.06)	2.299 (1.34)*		-0.7499 (-6.67)	2029.0	7.405	0.2650
c	$h^{(18,1)} - R^{(1)}$	2.576 (1.18)		15.24 (1.09)	-0.7700 (-6.97)	2070.0	7.480	0.2500
d	$h^{(18,1)} - R^{(1)}$	-28.70 (-2.20)**	4.314 (2.51)**	23.30 (2.01)**	-0.9476 (-12.38)	1897.0	7.259	0.3126

(c) のみであり、一定のプレミアムが存在するとは言えない。プレミアムが時間とともに変化しているかどうかは、各説明変数の係数の t 値により判定でき、5% 水準で有意であるのは、残存 8.5 年を除く各残存年の式 (d) と 7 年の式 (b) の長期利子率と、残存 7.5 年と 9 年の式 (d) の長期利子率の予想変化であり、残存 8.5 年においても式 (d) では両説明変数が 10% 水準で有意である。これらのことから、合理的期待が仮定されれば時間とともに変化するプレミアムが存在すると見なしてよいであろう。

§5 おわりに

本稿では、利子率の期間構造に関する 2 仮説についての議論と実証分析が整理され、後半ではわが国の国債利回りを対象としてこれらの仮説のテストが行われた。得られた暫定的な結果によれば、多くのケースにおいて、純粋期待と合理的期待の結合仮説は否定される。また合理的期待仮説が仮定されれば時間とともに変化するプレミアムの存在が検出される。本稿の分析は予備的なものであり、本稿で採用されていない定式化を検討すること、合理的期待仮説それ自体をテストすること、政策的含意を導出することなど今後なすべきことは多い。

付論 1 フォワード・レートと所有期間利回りの導出

以下では、式 (16) と (6) の導出が簡単な場合について説明される。まず割引債のフォワード・レート (16) の導出は次のとおりである。一般的にフォワード・レートはスポット・レートを用いて定義されるが、割引債についてはスポット・レートが最終利回りに等しいので、定義から

$$1 + F_t^{(n,m)} = \sqrt[m]{\frac{(1 + R_t^{(m+n)})^{m+n}}{(1 + R_t^{(n)})^n}}.$$

これを $R_t^{(m+n)} = R_t^{(n)} = \bar{R}$ としてテーラー展開によって近似すると

$$\begin{aligned} 1 + f_t^{(n,m)} &= \left(\frac{(1 + \bar{R})^{m+n}}{(1 + \bar{R})^n} \right)^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m} \left(\frac{(1 + \bar{R})^{m+n}}{(1 + \bar{R})^n} \right)^{\frac{1}{m}-1} (m-n) \\ &\quad \times \frac{(1 + \bar{R})^{m+n-1}}{(1 + \bar{R})^n} (R_t^{(m+n)} - \bar{R}) + \frac{(-n)}{m} \left(\frac{(1 + \bar{R})^{m+n}}{(1 + \bar{R})^n} \right)^{\frac{1}{m}-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{(1+\bar{R})^{m+n}}{(1+\bar{R})^{n+1}} (R_t^{(m)} - \bar{R}) \\ & = 1 + \frac{m+n}{m} R_t^{(m+n)} - \frac{n}{m} R_t^{(n)} \end{aligned}$$

となり、(16) が導かれる。

なお、残存 i 期の利付債のクーポン・レートを C_i とすると、割引債は $C_i = 0$, $\bar{R} \rightarrow 0$ であるから $g \rightarrow 1$ であり、定義から

$$(A1) \quad D_i = \frac{gC_i + 2g^2C_i + \cdots + ig^iC_i + ig^i}{gC_i + g^2C_i + \cdots + g^iC_i + g^i}$$

であるから、

$$(A2) \quad D_i \rightarrow i$$

である。これを考慮すると利付債について一般に式 (5) の成立が予想される。

利付債のフォワード・レート (5) は、 n と m がともに 1 の場合、次のように導出できる。 ${}_tR_n$ を期 t における n 期のスポット・レートとする。フォワード・レートは

$$(A3) \quad F_t^{(n,m)} = \sqrt[n]{\frac{(1+{}_tR_{n+m})^{n+m}}{(1+{}_tR_n)^n}} - 1.$$

n と m が 1 であれば

$$(A4) \quad F_t^{(1,1)} = \frac{(1+{}_tR_2)^2}{1+{}_tR_1} - 1.$$

ところで利付債の残存 t 期のクーポンを C_t 、額面を 1 とすると、最終利回り
とスポット・レートの間には

$$(A5) \quad \frac{C_1+1}{1+R_t^{(1)}} = \frac{C_1+1}{1+{}_tR_1}$$

$$(A6) \quad \frac{C_1}{1+R_t^{(2)}} + \frac{C_2+1}{(1+R_t^{(2)})^2} = \frac{C_1}{1+{}_tR_1} + \frac{C_2+1}{(1+{}_tR_2)^2}$$

なる関係がある。(A5) から

$$(A7) \quad {}_tR_1 = R_t^{(1)}.$$

また (A6) から

$$(A\ 8) \quad \frac{1}{(1+R_2)^2} = \frac{C_1}{C_2+1} \left(\frac{1}{1+R_t^{(2)}} - \frac{1}{1+R_t^{(1)}} \right) + \frac{1}{(1+R_t^{(2)})^2}.$$

これを (A 4) へ代入し $R_t^{(1)} = R_t^{(2)} = \bar{R} = C_1 = C_2$ としてテーラー展開すると

$$(A\ 9) \quad \begin{aligned} f_t^{(1,1)} &= (\bar{R}+2)R_t^{(2)} - (\bar{R}+1)R_t^{(1)} \\ &= \frac{\frac{1}{1+\bar{R}}+1}{\frac{1}{1+\bar{R}}} R_t^{(2)} - \frac{1}{\frac{1}{1+\bar{R}}} R_t^{(1)} \\ &= \frac{D_2}{D_2-D_1} R_t^{(2)} - \frac{D_1}{D_2-D_1} R_t^{(1)} \end{aligned}$$

となり (5) が得られる。

次に $j=1$ の時の所有期間利回り $h_t^{(1)}$ の導出は次のとおりである¹⁸⁾。利付債のクーポンを C と書くと、残存 i 期の債券の最終利回りは、クーポンと額面の現在価値

$$(A\ 10) \quad V_t^{(i)} = \sum_{k=1}^i \frac{C}{(1+R_t^{(i)})^k} + \frac{1}{(1+R_t^{(i)})^i}$$

をその価格 $P_t^{(i)}$ に等しくするものとして得られる。従って変形して

$$(A\ 11) \quad P_t^{(i)} = V_t^{(i)} = \frac{C}{R_t^{(i)}} + \frac{R_t^{(i)} - C}{R_t^{(i)} [1+R_t^{(i)}]^i}.$$

所有期間 1 単位を、クーポン支払いが 1 回行なわれる期間と等しいと仮定すると、1 期の所有期間利回り $H_t^{(1)}$ は

$$(A\ 12) \quad H_t^{(1)} = \frac{P_{t+1}^{(t-1)} + C - P_t^{(t)}}{P_t^{(t)}}.$$

これに (A 11) を代入して

$$(A\ 13) \quad H_t^{(1)} = \frac{C + \frac{C}{R_{t+1}^{(t-1)}} + \frac{R_{t+1}^{(t-1)} - C}{R_{t+1}^{(t-1)} [1+R_{t+1}^{(t-1)}]^{t-1}}}{\frac{C}{R_t^{(t)}} + \frac{R_t^{(t)} - C}{R_t^{(t)} [1+R_t^{(t)}]^i}} - 1.$$

これを $R_t^{(t)} = R_{t+1}^{(t-1)} = C = \bar{R}$ の近くでテーラー展開して線型近似すると

$$(A\ 14) \quad h_t^{(1)} = \left[\frac{1+\bar{R}}{\bar{R}} - \frac{1}{\bar{R}(1+\bar{R})^{t-1}} \right] R_t^{(t)} - \left[\frac{1}{\bar{R}} - \frac{1}{\bar{R}(1+\bar{R})^{t-1}} \right] R_{t+1}^{(t-1)}$$

$$= \frac{R_t^{(t)} - g_t R_{t+1}^{(t-1)}}{1 - g_t},$$

ここに

$$(A 15) \quad g_t = \frac{1}{1 + \frac{\bar{R}}{1 - \frac{1}{(1 + \bar{R})^{t-1}}}} = \frac{g(1 - g^{t-1})}{1 - g^t}.$$

g_t の定義と (12) から

$$(A 16) \quad g_t = \frac{g D_{t-1}}{D_t}.$$

これを (A 14) に代入すると

$$(A 17) \quad h_t^{(t,1)} = \frac{R_t^{(t)} - g D_{t-1} R_{t+1}^{(t-1)} / D_t}{1 - g D_{t-1} / D_t} \\ = \frac{D_t R_t^{(t)} - (D_t - D_1) R_{t+1}^{(t-1)}}{D_1} = D_t R_t^{(t)} - (D_t - 1) R_{t+1}^{(t-1)}$$

となり, これは $j=1$ の時の (6) に他ならない.

なお割引債の場合, (A 2) を用いると

$$(A 18) \quad h_t^{(t,1)} = i R_t^{(t)} - (i-1) R_{t+1}^{(t-1)}.$$

これは j が 1 の時の (17) である.

付論 2 純粋期待仮説の 3 形態について

以下では, 形態 (i) $\Rightarrow$ (ii), (i) $\Rightarrow$ (iii), (iii) $\Rightarrow$ (i), (ii) $\Rightarrow$ (i) が示されるが, これらから (ii) $\Rightarrow$ (iii), (iii) $\Rightarrow$ (ii) も導出でき, 3 形態の線型近似は互いにコンシステントである.

(a) (i) $\Rightarrow$ (ii)

式 (1) を用いて (2) の成立することが示される. (2) の左辺は (1), (4), (5) から

$$(A 19) \quad f_t^{(n,m)} = \frac{D_{m+n}}{D_{m+n} - D_n} \left(\sum_{k=0}^{m+n-1} \frac{g^k (1-g)}{1 - g^{m+n}} E_t(R_{t+k}^{(1)}) \right) \\ - \frac{D_n}{D_{m+n} - D_n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^k (1-g)}{1 - g^n} E_t(R_{t+k}^{(1)}) \right).$$

ここで

$$(A 20) \quad \frac{D_{m+n}(1-g)}{1-g^{m+n}} = \frac{(1-g^{m+n})/(1-g) \times (1-g)}{1-g^{m+n}} = 1.$$

同様に $D_n(1-g)/(1-g^n) = 1$ であるから

$$\begin{aligned} f_t^{(n,m)} &= \frac{1}{D_{m+n} - D_n} \left(\sum_{k=0}^{m+n-1} g^k E_t(R_{t+k}^{(1)}) - \sum_{k=0}^{n-1} g^k E_t(R_{t+k}^{(1)}) \right) \\ &= \frac{1}{D_{m+n} - D_n} \sum_{k=n}^{m+n-1} g^k E_t(R_{t+k}^{(1)}). \end{aligned}$$

ところで

$$(A 21) \quad \frac{g^n}{D_{m+n} - D_n} = \frac{g^n}{g^n(1-g^m)} = \frac{1-g}{1-g^m}$$

であるから

$$\begin{aligned} f_t^{(n,m)} &= \sum_{k=n}^{m+n-1} \frac{1-g}{1-g^m} g^{k-n} E_t(R_{t+k}^{(1)}) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{g^k(1-g)}{1-g^m} E_t(R_{t+n+k}^{(1)}) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} W(k) E_t(R_{t+n+k}^{(1)}) = E_t(R_{t+n}^{(m)}). \end{aligned}$$

これは (2) の右辺に他ならない。

(b) (i) $\Rightarrow$ (iii)

(1) を用いて (3) の成立が示される。(1), (6) から

$$\begin{aligned} (A 22) \quad E_t(h_t^{(i,j)}) &= \frac{D_i}{D_j} R_t^{(i)} - \frac{D_i - D_j}{D_j} E_t(R_{t+j}^{(i-j)}) \\ &= \frac{D_i}{D_j} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{g^k(1-g)}{1-g^j} E_t(R_{t+k}^{(1)}) \\ &\quad - \frac{D_i - D_j}{D_j} \sum_{k=0}^{i-j-1} \frac{g^{j+k}(1-g)}{1-g^{j-j}} E_t(R_{t+j+k}^{(1)}) \end{aligned}$$

である¹⁹⁾。(A 20) を用いて

$$\begin{aligned} E_t(h_t^{(i,j)}) &= \frac{1}{D_j} \sum_{k=0}^{i-1} g^k E_t(R_{t+k}^{(1)}) - \frac{1}{D_j} \sum_{k=0}^{i-j-1} g^{j+k} E_t(R_{t+j+k}^{(1)}) \\ &= \frac{1}{D_j} \sum_{k=0}^{j-1} g^k E_t(R_{t+k}^{(1)}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{j-1} W(k) E_t(R_{t+k}^{(1)}) = R_t^{(j)}.$$

これは (3) の右辺である.

(c) (iii) $\Rightarrow$ (i)

$j=1$ の場合の (3) を用いて (1) の成立が示される²⁰⁾. (A 14) を (3) に代入して整理すると

$$(A\ 23) \quad R_t^{(1)} = g_t E_t[R_{t+1}^{(1-1)}] + (1-g_t) R_t^{(1)}.$$

これを逐次的に解く. つまり, (A 23) の t を $t+1$, i を $i-1$ として得られる関係

$$R_{t+1}^{(1-1)} = g_{t-1} E_{t+1}[R_{t+2}^{(1-2)}] + (1-g_{t-1}) R_{t+1}^{(1)}$$

を (A 23) の右辺第 1 項に代入すると

$$\begin{aligned} (A\ 24) \quad R_t^{(1)} &= \frac{g(1-g^{t-1})}{1-g^t} E_t \left[\frac{g(1-g^{t-2})}{1-g^{t-1}} E_{t+1}[R_{t+2}^{(1-2)}] + \frac{1-g}{1-g^{t-1}} R_{t+1}^{(1)} \right] \\ &\quad + \frac{1-g}{1-g^t} R_t^{(1)} \\ &= \frac{g^2(1-g^{t-2})}{1-g^t} E_t[R_{t+2}^{(1-2)}] + \frac{g(1-g)}{1-g^t} E_t[R_{t+1}^{(1)}] + \frac{1-g}{1-g^t} R_t^{(1)} \\ &= \dots \\ &= \sum_{k=0}^{t-1} \frac{g^k(1-g)}{1-g^t} E_t(R_{t+k}^{(1)}) \end{aligned}$$

で, これは (1) の右辺に他ならない.

(d) (ii) $\Rightarrow$ (i)

$n=1$ の場合の (2) を用いて (1) の成立が示される. (5), (13) から

$$f_t^{(1,m)} = \frac{D_{m+1} R_t^{(m+1)} - D_1 R_t^{(1)}}{D_{m+1} - D_1}.$$

定義から

$$f_t^{(1,m)} = \frac{\frac{1-g^{m+1}}{1-g} R_t^{(m+1)} - R_t^{(1)}}{\frac{g-g^{m+1}}{1-g}} = \frac{1-g^{m+1}}{g-g^{m+1}} R_t^{(m+1)} - \frac{1-g}{g-g^{m+1}} R_t^{(1)}$$

$$= \frac{1}{g_{m+1}} R_t^{(m+1)} - \frac{1-g_{m+1}}{g_{m+1}} R_t^{(1)}.$$

これが $E_t(R_{t+1}^{(m)})$ に等しいから変形して

$$(A\ 25) \quad R_t^{(m+1)} = g_{m+1} E_t(R_{t+1}^{(m)}) + (1-g_{m+1}) R_t^{(1)}.$$

これは (A 23) で $i=m+1$ としたものである。従って (A 24) つまり (1) が得られる。

付録 データについて

長期利子率は残存 7, 7.5, 8, 8.5, 9 年の長期国債の半年複利の最終利回り (年%) で、価格は上場債の小口売買取引の終値 (『公社債月報』に掲載) が用いられる。上記の残存年にちょうど等しい残存年の銘柄が存在しない場合には、最も近い残存年の銘柄が採用される。短期利子率は 3 か月物現先ルート (期末、平均、年%, 『証券業報』掲載, $R^{(0.5)}$ と表示) を用いて

$$1 + \frac{R^{(1)}}{200} = \left(1 + \frac{R^{(0.5)}}{400} \right)^2$$

により推計される 6 か月物レート (年%, $R^{(1)}$ と表示) である。各銘柄のデュアラレーションは Chua (1985) の定式化に従って、所有期間利回りは式 (A 17) を用いて、それぞれ計算される。

- 1) Shiller, Campbell & Schoenholtz (1983) p. 176 以下参照。
- 2) 短期債として、本節では特記しない限り、割引債を対象とする。割引債はその最終利回りとスポット・レートが等しい。なおお利付債も残存 1 期の場合、最終利回りとスポット・レートが等しい (付論の式 (A 7) 参照)。
- 3) Shiller 他 (1983) p. 179 以下参照。なお導出については後掲の付論 1 に説明がある。
- 4) 例えば, Cox, Ingersoll & Ross (1981) p. 795 以下参照。
- 5) 長期債として割引債を用いると (18) 式は修正され

$$W(k) = 1/i$$

となる。

- 6) Campbell & Shiller (1984) の式 (7)。
- 7) なお、56 年 10 月から 59 年 6 月までの期間については両仮説が棄却され、「時の

経過と共に変化するリスク・プレミアムの存在を示唆している」(p. 54) との結論が述べられているが、その存在はテストされていない。

- 8) なお白川(1987)は、合理的期待仮説を純粋期待仮説とは独立に検証する、と主張する(p.101)が、前者の検証式(白川の(11))の基礎となる白川の(A-4)式の導出には形態(ii)の純粋期待仮説(白川の(A-1)式)が用いられており、この主張は妥当ではない。
- 9) Abel & Mishkin (1983) p. 5 参照。
- 10) 単位期間を6か月以外に設定することと月次データを用いることは残された課題である。
- 11) Judge 他(1985)第5章参照。なお、得られる係数推定値の標準誤差と t 値は近似値である。
- 12) Jones & Roley (1983) p. 460 参照。
- 13) なお、計測の単位期間である6か月毎にデータが採集される場合、誤差項には系列相関がない(Hansen & Hodrick (1980) p. 832 参照)。このようなデータを用いる計測も行なわれたが、全体に決定係数が低く、係数の有意性も低かったので本稿には記載されない。
- 14) Shiller 他(1983)による。なおこれは近似的に

$$\frac{R_t^{(t)} - R_t^{(1)}}{D_t - 1}$$

に等しい(Shiller 他(1983)の p. 195 参照)。

- 15) 式(B), (C), (D)の各々の回帰の残差平方和と式(A)のそれとの差と, (B), (C), (D)の各々のそれとの比率を, 分子と分母の各々の自由度の比率で割った値(F 値)が F 分布の5%水準の値よりも大きければ, 全ての e_j が0に等しいとの仮説は棄却される。
- 16) なお式(D)については, 7, 7.5, 8年で否定されない(他の残存年では計算が収束しない)。説明変数の間の相関は高くなく, 多重共線性の可能性はない。この結果を説明することは残された課題である。
- 17) 例えば, Shiller 他(1983), Fama (1984), Mankiw & Miron (1986) など。
- 18) Shiller (1979) 参照。
- 19) D_t は式(7)から g の関数であり, 従って最終利回り $\bar{R}$ (正確には $\bar{R}_t$)の関数である。つまり t に依存するが, $E_t(D_t) = D_t$ である。
- 20) Shiller (1979) p. 195 以下参照。

参考文献

- Abel, A. B. and F. S. Mishkin, "An Integrated View of Tests of Rationality, Market Efficiency and the Short-Run Neutrality of Monetary Policy," *Journal of Monetary Economics*, 11, 1983, 3—24.
- Amsler, C., "Term Structure Variance Bounds and Time Varying Liquidity Premia," *Economic Letters*, 16, 1984, 137—144.
- Campbell, J. Y. and R. J. Shiller, "A Simple Account of the Behavior of Long-Term Interest Rates," *American Economic Review*, 74, 1984, 44—48.
- Chua, J. H., "Calculating Bond Duration: Further Simplification," *Financial Analyst Journal*, Nov.-Dec., 1984, 76.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll, Jr., and S. A. Ross, "A Re-examination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, 36, 1981, 769—799.
- Engle, R. F., D. M. Lilien, and R. P. Robins, "Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model," *Econometrica*, 55, 1987, 391—407.
- Fama, E. F., "The Information in the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, 13, 1984, 509—538.
- Flavin, M., "Time Series Evidence on the Expectations Hypothesis of the Term Structure," *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 20, 1984, 211—238.
- Friedman, B. M., "Interest Rate Expectations Versus Forward Rates: Evidence from an Expectations Survey," *Journal of Finance*, 34, 1979, 965—973.
- Hansen, L. P. and R. J. Hodrick, "Forward Exchange Rates as Optimal Predictors of Future Spot Rates: An Econometric Study," *Journal of Political Economy*, 88, 1980, 829—853.
- Jones, D. S. and V. V. Roley, "Rational Expectations and the Expectations Model of the Term Structure," *Journal of Monetary Economics*, 12, 1983, 453—465.
- Judge, G. G., W. E. Griffiths, R. C. Hill, H. Lütkepohl and T. Lee, *The Theory and Practice of Econometrics*, 2nd ed., 1985.
- Mankiw, N. G. and J. A. Miron, "The Changing Behavior of the Term Structure of Interest Rates," *Quarterly Journal of Economics*, 101, 1986, 211—228.
- Mankiw, N. G. and L. H. Summers, "Do Long-Term Interest Rates Overreact to

Short-Term Interest Rates?" *Brooking Papers on Economic Activity*, 1984, 223—242.

Shiller, R. J., "The Volatility of Long-Term Interest Rates and Expectations Models of the Term Structure," *Journal of Political Economy*, 87, 1979, 1190—1219.

Shiller, R. J., J. Y. Campbell and K. L. Schoenholtz, "Forward Rates and Future Policy: Interpreting the Term Structure of Interest Rates," *Brookings Papers on Economic Activity*, 1983, 173—217.

鹿野嘉明「期待理論と『金利の期間構造』」『金融研究』第3巻第4号, 1984年12月。
白川浩道「債券利回りの変動要因について——日米比較の実証分析に基づく期待理論の再検討」『金融研究』第6巻第2号, 1987年7月。

* 本稿は文部省科学研究費の助成に基づく研究の一部である。計算は一橋大学情報処理センターを利用して行なった。データの加工等に際し商学研究室スタッフの助力を得た。記して感謝申し上げる。

(一橋大学助教授)