カテゴリー論と認識の理論
――F・W・ローヴェールの数学思想――

丸山不二夫

はじめに

最初に、標題に掲げた、「カテゴリー論」というのが、哲学の、特に認識論で用いられる「カテゴリー論」とは別物であり、数学の一分科としての「カテゴリー論」[1]をさすということを、あらかじめ断っておかねばならない。

にもかかわらず、この数学理論は、そこでの近年の目覚ましい成果が劇的に示しつつあるように、数学の基礎にたいして、まったく新しい角度から照明を投げかけるばかりではなく、われわれ人間の認識の本性とその能力についても、非常に興味深い多くの洞察を可能にするのである。誤解を恐れずに予言するならば、この新しい数学理論と、そこから派生するであろう諸結果は、前世紀末から、今世紀初頭にかけて、カントール、フレーゲ、ラッセルらが数学においてなした仕事が、今世紀の哲学に与えた影響に比肩しうるか、おそらくはそれを凌ぐ影響を将来の哲学に与えるであろう。

小論は、W・F・ローヴェールを創始者とする、一般にはトポス理論と呼ばれる、数理科学のカテゴリー論的基礎付けを目指す新しい動きと、その認識論的含意に、哲学的な関心を喚起することを目的としている。小論はまた、数学界の巨人にして、ユニークな数理哲学者でありながら、日本の哲学界では、あまり知られることのなかったローヴェールその人の大まかな全体像を与えよう

とする試みの一つである。

(1)　カテゴリー論とは、一九四〇年代の半ばに、マクレーンとアイレンバーグによって創設された、次の様に構成された数学的概念「カテゴリー」を対象とする数学理論である。

今、ある数学的な構造Aが与えられたとしよう。まづ、Aに属する数学的な対象と、それらの間のすべての射の全体を一つの新しい数学的対象と見做すことにしよう。こうして新しく得られた数学的対象を、Aとは独立な、自明ではない共通の類Cに属すると考え、このCをAのカテゴリーとよぶのである。

こうした定義をみるなら、一面では、カテゴリー論は、現代数学の基礎をなす集合と集合間の写像という二つの概念の一般化であることがわかる。他面では、射の結合に注目して考えて見ればわかるように、それは、単位元をもつ半群の概念の抽象化であり、代数系の概念の発展とみることもできる。こうした意味では、カテゴリー論で形式的に記述できるものの多くは、より具体的な、数学的な枠組みを用いて(たとえば、さまざまな代数系、ないしは集合の概念を用いて)具体的に記述可能である。

もちろんそれだけだったら何も新しい理論をつくりあげるまでもない。カテゴリー論にとって本質的なのは次のような概念構成が可能であることである。二つのカテゴリーCとDがあったとしょう。このときCからDへの写像を定義し、それをファンクターとよぶ。さらに、このファンクターの間の射も自然に定義でき、それらは再びカテゴリーをなす様にできる。(これを、ファンクター・カテゴリーとよぶ。)こうして、次々と新しいカテゴリーを構成することができるのである。

こうした構成を抽象的と感じる人も多いにちがいない。事実、ある高名な数学者がカテゴリー論が現れたとき、それを「General abstract nonsence」とよんだという有名な逸話があるくらいである。カテゴリー論は、確かにその抽象性を武器にさまざまな数学理論の間の隠れた関係を明らかにし、数学全体の見通しを良くするうえで大きな役割を果たした。

しかし、こうしたことからカテゴリー論をもっぱら抽象的な数学理論と考えるのは正しくない。次節でみるように、この理論が新たな注目を集めるのは、この理論の上に構成されたある対象、すなわちトポスが、きわめて具体的で豊かな数学的対象として数学的に認知されたからなのである。

一　トポス理論の登場とそれを準備したもの

1　幾何学と論理学との結合

「ローヴェールとティエルニーによるエレメンタリー・トポスの理論の発展は、カテゴリー代数の歴史の中で、その創設以来、もっとも重要な出来事として筆者を驚か

せた。[1]」

トポスの概念は、ヴェイユの予想を解くことを直接の目的として、グロタンディックらが作り上げた、二〇世紀数学の記念碑的著作SGAにその起源をもっている。もともとは幾何学的な概念である。しかし、集合論のカテゴリー論的な記述を進めていたローヴェールは、ティエルニーとともに、グロタンディックのトポスの概念を、カテゴリー論的に初等的な性質によって定義されるあるカテゴリーとして、さらに一般化し[2]、このトポス（エレメンタリー・トポス）が、直観主義的な論理に基づく集合論のモデルを与えることを六〇年代の終わりに発見するのである。

ここに、カテゴリー論を舞台としてトポス理論と称される壮大な理論体系が誕生するのである。代数幾何と、論理学や集合論との、この予想外の結び付きの発見は七〇年代の数学の最も興味深い研究テーマの一つを形成し、多くの数学者がこの流れに加わり、この方法を押し進めた。こうして、代数幾何や論理学ばかりではなく、他のさまざまの数学理論を（たとえば解析学とか、微分幾何とかを）、トポス（より一般的にはあるカテゴリー論的な性質を満たす対象の上で）の上で展開する試みが非常に実り多い成果をもたらすことが、次々と見出されたのである。

一九七一年に、カナダのハリファックスで行われた「カテゴリー論と代数幾何と直観主義論理との結び付き」と題された国際会議は、トポス理論と称されるこうした新しいカテゴリー論の跳躍台になったように思われる。主催者の一人としてローヴェールは、この会議の「科学的な熱狂[3]」とその意義について次のように述べている。

「以前にはなんの関係も持たなかった現代数学の二つの潮流が、今や、おたがいに相手の開発した諸概念や諸方法を自らの分野に応用を試みている……[4]」「トポスの理論の初等的な諸公理は、もともとグロタンディックやジローやヴェルディエやアキムが洞察した様に、層の理論や代数空間・大域スペクトラム等々に応用可能であるばかりではなく、クリプケ意味論や抽象的な証明論、そして集合論で独立性の諸結果を得るためのコーエン＝スコット＝ソロヴェイの方法にも十分応用可能なのである。[5]」

トポス理論が数学的に何を明らかにし、数学者に如何

なる衝撃を与えたかを詳しく述べることはできないが、われわれにとっても興味深いと思われるこの理論の帰結を二つ挙げてみよう。[6]

第一に、集合論を用いずに数学の基礎付けを行なうことができるということをこの理論は示したのである。――言い換えれば集合論が数学の唯一の基礎を与えるものでないこと、または、おなじことだが、集合論的数学観が唯一の正しい数学観ではないことが示されたのである。集合論的な数学観に代わるカテゴリー論的ないしはトポス論的数学観が如何なるものであるかは、後にふれられるであろう。

第二に、この理論は、数学においてわれわれが通常用いる所の第一階の述語論理(古典論理)が唯一の正しい論理とはいえず、むしろ排中律の成り立たない直観主義論理が、数学においては、より普遍的な性質を備えた論理であることを示したのである。そればかりか、如何なる条件が、あるトポスをしてその論理を古典的ならしめるかという問題にも驚くべき解答を見出したのである。

2 ローヴェールに先行したもの

P・フロイドの次の言葉はカテゴリー論の発展においてローヴェールらの果たした役割を、うまく表現しているように思われる。「彼らの(ローヴェールとティエルニーをさす)業績を過小に評価することは難しいことではない。しかし問題は、彼らがどういうことを証明したかではなく、彼らがあえてそれらを証明可能だと信じた所にあるのである。[7]」

ここでは、先に見たような諸結果が少なくとも方向性としては、ある意味では十分に、準備されていたことを見てみることにしよう。

一九六三年、コーエンは、連続体仮説の成り立たない、いわば非カントール的な集合論が存在し、無矛盾であることを証明し、集合論の(少なくともカントール的な)、数学の基礎としての唯一性に大きな疑いを投げかけた。[8]この連続体仮説の独立性証明の成功についてモストフキーは次の様に語っていた。「この様な諸結果は、公理的な集合論が、絶望的に不完全であることを示している。確かに、誰も、集合論の諸公理が完全だとは期待していなかった。しかし、こんなにも不完全だとは誰も期待していなかったのも事実である。……集合論の不完全性は、算術の不完全性とは別の状況によって引き起こされてい

ると云うことを、このことは示す。それは、むしろ群論、ないしは類似の代数理論に比せられる。これらの理論は、これらが多くの同型ではないモデルを許すように、その公理を定式化したがゆえに不完全である。……おそらく、将来においてわれわれは、空間についてのことなった諸観念をわれわれがもっているのと丁度おなじように、本質的に異なった集合の観念をもつであろう。[9]」

論理学においても、六〇年代には大きな発見が為される。クリプケによる直観主義論理の新しいモデル構成法の発見が、それである。[10]彼と同じ時期に、おなじようなモデルを提出したグジェゴルチックが、そのモデルに従って述べた、古典論理―すなわち通常の第一階の述語論理―は形而上学的存在論の論理であるが直観主義論理は科学的探求の論理であるという指摘は、ローヴェールの登場を予言しているかにも聞こえるほどである。[11]クリプケは、自己のモデル構成法とコーエンの方法について次の様に語っていた。「コーエンの動機はわれわれのとは根本的に異なっている。しかし、彼の概念が、われわれのモデル理論に密接に関連づけられているのは明らかでない。[12]」

ローヴェールはまさにこうした「より深い理由」を探ろうとしていたのである。このことは、われわれが後から付け加えた解釈ではない。何よりも、ローヴェール自身が自己の研究を、次の様に、驚くべき明快さをもって位置付けているのをわれわれは見出すのである。

「一九六三年の前後に……、幾何と論理学の分野で五つの著しい発展が為された。これらの成果の本質的な統一ということこそが、われわれをして新しい集合概念の真剣な考察へと向かわせたと、私は信じている。それらは次の五つである。

『超準解析』(A・ロビンソン)
『集合論における独立性証明』(P・J・コーエン)
『直観主義的述語論理の意味論』(S・クリプケ)
『抽象的集合のカテゴリーの初等的な公理化』(F・W・ローヴェール)
『トポスの一般理論』(J・ジロー)[13]」

しかし、こうした関係の『より深い理由』は、ま

(1) P. Freyd, *Aspects of Topoi*, Bulletin of the Australian Math. Soc., 7. 1972.
(2) 当初エレメンタリー・トポスは次の四つの条件をもた

すカテゴリーEとして定義されていた。
(1) Eは1と pullback をもつ。
(2) Eは0と pushout をもつ。
(3) Eは巾 (exponentiation) をもつ。
(4) Eは subobject classifier をもつ。

(3)「大学当局の行為によって引き起こされた緊張も、会議の科学的な熱狂に水をかけることはできなかった。」会議に際してこの会議を後援していたダルハウジー大学は、ローヴェールの「政治活動」を理由として彼との契約更新を拒否した。会議の参加者は、この措置に抗議したという。

(4) Lawvere〔4〕Preface.（ローヴェールの論文については巻末に一括して掲げたので、以下引用は、そこでの番号によって行う。）

(5) Lawvere〔4〕p.1.

(6) もちろん、この二つの帰結は、トポスが直観主義的な集合のモデルを与えるという一つの数学的事実の系にほかならない。

(7) Freyd 前掲書 p.2.

(8) こうした幾つかの議論については、拙論「非カントール的集合論の発見と数学思想における実在論――クルト・ゲーデルの死を悼む」参照のこと。

(9) A. Mostowski, *Recent Results in Set Theory*, in Problems in the Philosophy of Mathematics, (ed. Lakatos), North Holland, 1967, p.82—96.

(10) S. Kripke, *Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I*, in Formal Systems and Recursive functions, North Holland. 1965. p.92—130.
所謂クリプケモデルの実在論的解釈については、拙論「論理と非論理のあいだ」――形式的なものの実在的根拠の構造――」(『一橋研究』第七巻・第三号 p.99—113) 参照のこと。

(11) A. Grzegorczyk. *A Philosophically Plausble Formal Interpretation of Intuitionistic Logic.* Indag. Math., 26. 1964, p.569.

(12) Kripke 前掲書 p.120.

(13) Lawvere〔8〕p.102. おなじことが Lawvere〔7〕p.1. にも述べられている。

二　ローヴェールの理論と思想

前節の最後に見た五つの数学的発見の統一という課題は、トポス理論として、約七年後にようやく果たされる[1]ことになる。われわれを二重に驚かすのは、第一に、彼がこうした数学的な探求を実在論的で弁証法的な立場を方法論として自覚的に貫きながらなした様に見えることであり、第二に、こうした探求の中で彼が新たに形成していった、様々な数学的諸概念がきわめて弁証法的であ

るということである。

一言で言えば、彼においては、唯物弁証法的な世界観と数学理論とが見事に統一されていると言えるのである。この節では、こうした認識論的関心から、数学における形式主義、従来の集合と論理の概念に対する彼の批判を中心に、ローヴェールの理論と思想の特徴を見てみることにしよう。

1 理論とモデルとの対立と統一
——形式主義批判——

言うまでもないことだが、ローヴェールは、数学の形式主義的把握に反対する。彼は、多くの数学者が数学の公理化された表現を「奇妙なことに、その理論やその主題となんの関係もない、馬鹿げた機械的なものと感じる」[2]ことがあることを指摘する。しかし、数学者の形式主義の批判はそれだけでは珍しいことではない。彼の数学思想を評価する上で注目に値するのは、彼が、数学における理論とそのモデルという二極構造に対するきわめて実在論的で深い把握を、その探求の出発点からなしているように見えることである。

「われわれが数学と呼ぶところの正確な知識の探求は本質的なしかたで、われわれが、『形式的なもの』と『概念的なもの』と呼ぶところの、二重性を内に含んでいる様に見える。たとえば、われわれは多項式を代数的に取り扱い、それに対応する曲面を幾何学的に視覚化する。……それ自身数学の一部分でありながら基礎論はやはり、形式的＝概念的な二重性をもつのである。……以上で述べた概念的・形式的・基礎論的という概念はこの論文ではなんの数学的な役割を果たさない。……しかし、これらの概念を真剣に考えようとするなら、基礎論を形式化しようとする試みの本質的な特徴は、形式的なものと概念的なものとの間の、上で述べたような『二重性』の記述に他ならない事に気付くであろう。実際、集合論とカテゴリー論の両者が、ある場合には、ある範囲では、こうした記述を与えることに成功したのである。[3]」

彼は、こうして、理論とモデルとの関係を形式的なものと概念的なものの対立として捉える。[4] しかしこれらは切り離しがたく結びついているのである。(なぜなら、形式化された理論Tの意味論は、それ自身、あるほかの形式的理論T′と見做されうるからである。)

こうした彼の視点は、単に彼の実在論的な数学思想を

特徴づけるのみならず、きわめて独創的で有力な数学的方法—ファンクター・セマンチックス—を生み出すのである。

「『理論』(ある意味では、特定の原子式や特定の公理を用いたさまざまな『表現』にかんしては不変であると理解される)とは、実際にある性質PをもつカテゴリーTであり、TのモデルとはT任意の集合に値をもつPを保存するファンクターなのである。……しかし、我々が、しばしば出会うところの『シンタックスが第一』という見方は論駁される。なぜなら、理論の本質的な役割はそのモデルを記述することにあるのであり、おなじことは理論の表現にも適用される。[5]」

私は、かつて、「論理とは何か」という問いにたいしてモデル論的なアプローチが重要であると論じて、次の様に述べた。「ある形式的論理体系にたいして『完全性』の要件を満たす様なモデルの構成法が存在する様に見える、このことは、さまざまなモデルの構成法を貫く、共通の特質の抽出が『論理的なるもの』の特徴づけに重要であることを示唆しているように思われる。」ローヴェールによる、ファンクターとしてのモデルの特徴づけは、見事にこの「共通の特質の抽出」を果たしているのである。[6]

2 不変な集合から変異する集合へ
——集合概念の変容——

従来の集合概念に対する、ローヴェールの批判はそれが固定的で、運動の余地を入れない所に向けられる。今ある集合Aがあったとしよう。AはAに含まれる要素によって完全に決定される。Aはいつまでたってもそのままである。ところで、われわれの認識の具体的な対象でこうした性質を持つものが存在するであろうか? 実際にはこうした対象は存在しない。確かに、数学的集合概念のこうした抽象性・不変性は一面では、その数学的集合概念の演繹的能力を保証するのだが、果たして、逆に数学において変動する数学的対象を、それ自身一つの数学的対象と見ることはできないのであろうか? グロタンディックやジローたちが複素解析や代数幾何や層の理論や群のコホモロジー論において五〇年代から行ってきたことは、まさに、こうした方向への概念の拡大ではなかったろうか?

今、古典的な集合論のカテゴリーをSETであらわす

ことにしよう。ある任意の集合のカテゴリーPをとって SET^P を考える。これは、新たに $P \to SET$ なるファンクターを対象とする新しいカテゴリーをなすが、これが、新しい集合概念のモデルを与えるのである。[7] こうして彼は、あるカテゴリーPにそって変異する「変異 (variable) 集合」という概念に到達するのである。(このときPを「変異領域」と呼ぶ) ここではPによって集合の運動が表現可能となる。ローヴェールは、先に上げたロビンソンやコーエンやクリプケの仕事が、いずれもこうした枠組みで統一的に説明できることを示すのである。

「トポスの（初等的な）理論は、古典的な集合論が不変 (constant) な構造を研究する基礎であるように、連続的に変異する構造を研究する基礎である。[8]」

不変な集合から変異する集合へのこうした移行は、かっての数学における定量 (constant quantity) から変量 (variable quantity) への移行に比されることになる。[9]

ジョンストンはいう。「トポス理論的見解とはいかなるものであろうか？　簡単に言えば、それは、数学がそのなかで発展することができ、また数学はそのなかで発展すべきであるとされる『不変な』集合の固定された世界が存在するという考えを拒否し、抽象的な集合論の誕生以来伝統的となった、変異の領域（すなわち位相空間）と、この領域の点に付随する不変な構造の継起とを別々に切り離して考察する方法に比して、『変異する構造』という概念が、連続的に変異する集合の世界において、遥かにつごうよく取り扱われるということを認めることに存するのである。……トポス理論の心臓部に位置するのは不変な集合から変異する集合へという考えのこうした一般化なのである。[10]」

ローヴェールの批判は、メンバーシップを基礎とする集合概念にも向けられることになる。ＳＥＴにおいては、xのメンバーは、$1 \to x$ なる射で表現されていたのだが[11]（これをxの不変な、ないしは大域的な要素と称するのだが）、より一般に、$p \to x$ なる射をもpの上でのxの要素と見做すことができる。[12] 明らかに、こうして拡大された集合概念のもとでは外延性は保証されない。「約言すれば、トポスの概念は外延性の公理を持たない『高階の論理』のエッセンスを客観的なカテゴリー論的形式にまとめあげたものだということができるかもしれない。このことは、『内的に発展する集合』の考察に向かって

集合論を自然にかつ有用に一般化することを可能にする。[13]」

集合=メンバーシップ概念のカテゴリー論的再把握は、集合論を用いない数学のカテゴリー論的基礎付けが可能であることを示すばかりでは無く、数学的集合概念の拡張の可能性とその方向性とをはっきりと示すこととなったのである。

3 論理の特権的地位に対する挑戦

——「代数幾何=幾何学的論理学」——

前節で見た集合概念の変化は、集合論の内部での変化に止まらず、数学における一階の述語論理の位置に大きな変化を引き起こすことになる。比喩的に語るなら、「変異集合」という集合概念の弁証法的再把握は、とりも直さず、古典的な集合論がよってたつ形而上学的論理構造への批判に道をひらくのである。同時に、われわれが注目せねばならないのは、彼がこうした、いわば、数学における古典的な第一階の述語論理の特権的な地位に対する挑戦と言える試みと並行して、いわゆる直観主義哲学の主観的観念論的な性格に対して、はっきりした批判を行っているということである。

かつて、ローヴェールは、数学の基礎について次の様に語っていた。「ここで『基礎』という言葉は、そこでは普通の数学的な対象が全て定義でき、かつ、その通常の性質が、全て証明できるような単一の第一階の公理系を意味している。[14]」このとき彼は、集合論を用いずに、カテゴリー論のみを用いて数学の基礎付けを与えようとしていたのであるが、[15]ここでも、第一階の述語論理は前提されていたと考えられるのである。ところが、変異集合への集合論の拡大という、先に見た彼の試みは、古典的な第一階の述語論理ではなく、直観主義論理のクリプケ意味論にきわめて自然な解釈を与えることが見出されたのである。[16]

1をただ一点よりなる集合としよう。このとき、先に見たファンクター・カテゴリーの構成法に基づく$SET^1=SET$なる関係が、古典的な集合概念とそれらが基づくところの古典論理とを特徴づけていると考えることができる。すなわち、その世界には発展が無く、全てが固定的な視点から眺められた、別の言葉で言えば「永遠の相のもとで」考察された集合の世界だと言うことである。

かつて、私は、クリプケ=グジェゴルチックの直観主

義論理のモデルにある認識論的解釈を与えたが、論理に対するローヴェールの解釈はそれとほぼ等しいものであるということができる。[17] そこでも述べた様に、クリプケ＝グジェゴルチックの仕事が認識論的な興味を引くのは、それらが、古典的な第一階の述語論理を、事物は永遠不変のままに止まり、認識も、神の知のごとく最初からすべてが与えられている世界における、まさにそうした意味で「普遍的に妥当する[18]」論理として見事に特徴づけるからである。

明らかにわれわれの住む世界も、またわれわれの認識もこうした性格をもってはいない。ローヴェールは、数学においては、直観主義論理がより普遍的な性格をもつことを示すのである。「変異を永遠の普遍性のもとでモデルしようとする、古い理論的な計画に対するわれわれの反対は直観主義者のそれと、どこか共通のものがある。もっともわれわれは、数学的知識における変異ばかりでは無く、変異を一般的なものとして把らえようとしているのだが。[19]」しかし、このことは、最初に触れたように、彼が直観主義者の認識論的主張を受け入れるということを少しも意味しはしないことに注意しなければならない。「数学にとってのハイチング述語算（すなわち直観主義論理の）の中心的な重要性を認めるということが、決して構成主義のような主観的観念論哲学を受け入れることに依存するわけではないことを述べておきたい。客観的には、変異集合は幾何学や力学では（少なくともインプリシットには）、毎日の様に出現しているのであり、こうした変異がわれわれの精神に反映されるという事実は、それらがわれわれの精神によって『自由に創造された』と言うことを少しも意味しはしない。[20]」

さらに驚くべきことは、古典論理であれ直観主義論理であれ、なんらかの単一な論理構造がすべての数学理論の根底に、共通の基盤として存在するというこれまでの図式を彼は、覆したのである。「代数幾何＝幾何学的論理学」という彼の有名なスローガンが物語る様に、ある数学的主張が、ある数学理論の内的な論理構造に影響を与え、また逆に、ある論理的主張がある数学理論の代数的構造を規定するという関係が見出されたのである。

（1） 確かに、形式的学たる数学の、その最も基礎的な部分でさえ、弁証法的な解釈が可能であり、また、多くの数学者の業績の「隠された秘密」が弁証法的なアプローチとし

て解釈できるのも確かなことである。しかし、ローヴェールのように数学に目的意識的に弁証法を適用しようとするのは希有なことといって良かろう。

(2) Lawvere〔6〕p.3—4. ここでは直接には変異の表現が今迄の数学的方法では決定的に不十分であることが論じられている。これに関連して Fourman は、次の様に述べる。「ローヴェールが観察した様に、こうした制限は変異(変数 variable)についての伝統的な解釈の不十分さによって引き越こされたものである。しかし、このことのために、『変異を扱う伝統的な論理的方法は打ち捨てられねばならない』(ローヴェールの言葉——筆者註——)とする考えにはまったく同意しがたい。」彼は、存在述語Eを導入することによって自然な形式化が可能であり、何もドラスチックな対策を大袈裟に考える必要はないとする。(M. P. Fourman, *The Logic of Topoi*, in Handbook of Mathematical Logic, edited by J. Barwise, North Holland, 1977. p.1054. しかし、ローヴェールは、何か、形式化が不可能であることを主張しているのではない。彼はまさに形式化を通じてその形式の背後にある概念を明確にしようとしているのである。彼の立場をある種の神秘主義と受け止める見方があるのかも知れない。それ自身としては良くまとまっているトポス理論の入門書である。R. Goldblatt, *Topoi: The Categorical Analysis of Logic*, North Holland 1979, p. 332. には神秘主義の哲学者 Fritjof Capra の *Tao of Physics*, Fontana, 1976. が肯定的に引用されているのは、その逆の現れかも知れない。ローヴェールの数学的業績は不幸なことに彼のこうした思想的・方法論的立場と切り離されて評価されている様に見える。

(3) Lawvere〔2〕p.281.

(4) 彼は、この二極が adjoint な関係によって結び付けられているというのである。これに限らず彼は多くの重要な数学的概念が adjointness で定義できることを示す。(Lawvere〔2〕) 明らかに、彼は、弁証法論理における「対立物の統一」なる概念の形式的表現として adjointness を考えており、彼の数学思想の最も重要な一面をなすのであるが、小論では割愛する。これについては Lawvere〔3〕を参照のこと。

(このトポス理論にとって歴史的な論文の筆頭に彼は如何なる引用文献を掲げたであろうか。)

(5) Lawvere〔6〕p.2—3.

(6) 前掲拙論「論理と非論理のあいだ」p.111 おなじところで私は次の様に述べていた。「ところで、こうした、すべてのモデルにおいて一様に妥当するといった、いわば仮想的な性格が、論理的なものとして(すなわち、形式的で抽象的な普遍妥当性を持つものとして)現象するのであって、その逆ではなかったとするなら、あるモデルにおいて妥当することが分かっているだけの命題は、論理と非論理の間で、如何なる位置を占めるのであろうか?」(拙論

p.112)。

　こうした問題意識に対するローヴェルの解答も特筆に値するように思われる。「もちろん、任意の与えられたPにとって普通の意味での『完全性』の保証はどこにも無い。すなわち任意のP―カテゴリーTはもとの集合のカテゴリーSにおいては十分なモデルをもつことに失敗するかもしれない。このことは、ある場合には、矛盾的に見えるが、抽象的な集合があまりに『不変』であるという事実にもとずいている。」Lawvere〔4〕p.4. こうした真理概念の局所化とも言うべきものが認識論にどういう展望を開くかということは、きわめて興味深い研究課題である。

(7) さらに彼は、こうした構成が、さらに一般的な次の様な構成法の特殊な一例であることを示した。今Eをトポスとしよう、この時任意の集合から成るカテゴリーPに対してファンクター・カテゴリーE^Pは再びトポスとなるのである。

(8) Lawvere〔5〕p.135.

(9) 「エンゲルスが、集合論や解析学の算術化が数学的思考において未だ優勢では無かった時代に述べたように、定量から変量への前進がもたらしたものは形而上学から弁証法への前進の数学的表現にほかならないのだが、多くの数学者は弁証法的に得られた諸方法を用いて形而上学的なしかたで仕事を続けたのである。(反デューリング論の「量と質」の節を参照されたし)……」Lawvere〔5〕p.155.

(10) P. J. Johnstone, *Topos Theory*, Academic Press, 1977, p.xvii.

(11) 1というのは、カテゴリー論ではターミナル・オブジェクトとよばれ(1に対する射 $m : x \to 1$ がただ一つしか存在しないことからそう呼ばれる。)、SETで考えるなら、ただ一点よりなる集合と考えることができる。

(12) 今、1を、ただ一つの元から成る集合としよう。このとき任意の集合Xにたいして射 $x : 1 \to X$ を考えて見よう。明らかにxはXの元に1対1で対応する。こうして射xを、それに対応するXの元と同一視するならわれわれはメンバーシップの概念を用いないである集合の元を定義したことになるのである。

(13) Lawvere〔4〕p.3.

(14) Lawvere〔1〕p.1.

(15) 彼は、「数学的な諸対象の固有の諸性質は、そうした諸対象がそれから成ると考えられる所の諸要素という観点からではなく、むしろ、それらの抽象的な構造という観点から述べることのできる」という確信を表明しつつ、「数学が何を対象とするかについて、特に集合や、集合におけるメンバーシップの概念が、そこでは如何なる役割をも果たさないようなものについて、この確信を全面的に表現する基礎を、数学に与え」ようとしていた。Lawvere〔1〕p.1.

(16) このことに照応する様に、彼は「数学の基礎」について、後には次の様に述べる。「(表題の)『基礎』という言葉は、ここでは数学において普遍的であるものを意味している。こうして、この意味では、基礎論とは数学にとっての如何なる『出発点』とも『正当化』とも同一視できない」Lawvere〔2〕。

(17) 前掲拙論「論理と非論理のあいだ」参照。

(18) いやこの世界では時間が止まっているのだから、最初も最後もないというべきである。こう書くと、あたかも、それは知の高い立場を占めるかのように考えられるかもしれないが、それは認識の深化のない、固定的な、それゆえ貧しい認識に止まるほかないのである。

(19) Lawvere〔5〕p.136.

(20) Lawvere〔8〕p.106.

三　カテゴリー論のパースペクティブ

ローヴェールの理論と思想について、われわれは、ごく基本的なものの考察をしたばかりなのだが、以下では、われわれが弁証法的と特徴づけたこの理論が、如何なるパースペクティブを持ち、如何なる方向に発展しようとしているかを、見てみることにしよう。

1　運動の絶対性とその相対的不変性の表現

R・ディアコネスクは、選択公理（Axiom of Choice ACと略される。）が成り立つトポスの論理は直観主義論理ではなく古典論理であることを見出した。[1] 別の言い方をすれば「選択公理は排中律を導く」のである！　この奇妙な結果は、前節の最後で触れた、数学的な理論とその論理構造とが相互作用を行うというトポス論的主張の驚くべき実例の一つだが、ここでは、この結果に対するローヴェールの認識論的解釈を見てみることにしよう。

任意の無限の集合族にたいして、それに属するそれぞれの集合から、一挙にその一つの元を選びだす選択関数は、如何なる時に存在しうるであろうか？　もし集合の要素が変転極まりないものであれば、こうした関数の存在は困難となろう。不十分ではあったが、初めてACの独立性証明をなしたフレンケルやモストフスキーのモデル――群が作用して要素がクルクル変わる――を想起されたい。古典的な集合論Sでは、しかし、こうしたことは起こりえない。そして、このことが先に挙げたモデルの不十分さの最大のものと考えられたのである。逆に言えば、ACは、ある意味で古典的集合論の相対的な不変性を表現する公理として解釈されうるのである。[2] ACば

かりではない。ローヴェールは、古典的な集合論における幾つかの命題——構成可能性の公理や連続体仮説などの命題を、まさに古典的集合論の不変性をさらに強めようとして構成されたものであると主張するのである。(3)

こうした彼の把握を支えているのは次の様な認識論的な立場である。「不変性の概念はすべて相対的なもので、それは、感覚的ないしは概念的に変動の極限的な場合として導かれたものであり、かつまた、こうした概念の、変動を解明するに際しての議論の余地の無いその価値は、そうした起源によってつねに制約されているのである。(4)」

彼が、こうした、いわば運動の絶対性とも呼ぶべきものの根拠を、実在的な、運動する物質の世界そのものに求めていることは言うまでもない。彼は、マルクスの「経済学批判」の、方法についての有名な言葉を引きながら次の様に語る。「E・カルタンの様な、彼らの（グロタンディックらのフランスの幾何学者をさす—筆者註—）先生によって発展させられた幾何学の第一義的な源は、結局の所、こうした連続的な物体や連続的な場の物理だったのである。……こうした源を認めることが、われわれが完全にしようと努める内的な公理と丁度おなじように

この主題（カテゴリー論）にとっての『規定的な抽象的・一般的関係』をなすのである。(5)」そして、こうした認識こそ、すぐ後で見る様に、彼と彼の率いる集団が、現時点で進みつつある道を導いている様に思われる。

2　実在的な運動の数学的記述を目指して
——滑らかさとランダムさ——

彼の最も根本的な問題意識は、これまでの数学的方法では、物質の運動の正しい記述が困難であるという自覚である様に思われる。一九六七年に行われたという講義で、すでに彼は、次の様なプログラムを提出していたという。第一に、連続的な力学の基礎を公理化すること。第二に、その土台として、代数幾何におけるフランス学派の諸成果と諸方法を用いて微分トポロジーのエッセンスを直接に公理化すること。第三に、グロタンディックのトポスに似た滑らかな集合のカテゴリーを公理的に研究すること。(6)

ここでも彼の弁証法的な思想が強力に働いていることを見ることができる。「同一の物体が同じ時刻に二つの場所に存在するという運動の特徴づけは、……正確に時空の連続性を表現しているのであり、物体はある時には

ある場所にあり、その後には別の場所にあるといった運動の概念は、単に運動の結果を記述したものであり、運動そのものの説明は何も含んでいないのである。[7]」

点から点への移行として運動を捉えるとき、われわれは現実の運動のもつ滑らかさを捨象し、その代わりにランダムなものとして運動を抽象しているのである。また、こうした反省は「あれか？ さもなくば、これか？」という区別が現実には無条件で可能とは限らない事にわれわれの目を向ける。(排中律とは、ある意味で、この区別の原理に他ならない)「シェルピンスキー＝バナッハ＝タルスキーのパラドックスがこの世界においては成り立たないのは疑いもなく、物体は非ランダム的に運動しているという事実と結び付いている。[8]」また、現実の運動が連続的であるなら連続という数学的概念は、彼にとっては、ある意味では直接的な与件であり、また展開の果てに学がそれへと還帰する学の始元でもあるのである。「連続体はNとΩ（それぞれ、繰り返しと真理値との主観的な理想化である。）からの知的な構成物にすぎないと主張した銀行家クロネッカーとその追随者たちはなんと誤っていたことであろうか！ 連続体は、まづ何よりも、運動する事物の世界との歴史的かつ科学的なわれわれの経験から直接に導かれた概念なのである。」

彼の批判は、広がりの無い点の集まりとして空間を、時間の無い瞬間の集まりとして時間を、総じて離散的なものの継起として連続を定義しようとすることに向けられている。それゆえ、彼は、空間を点ではなくむしろ部分（近傍）の集まりとしてとらえようとするのである。[9]小論では彼がこうした問題意識をいかにして数学的に表現したかについては展開することはできない。[10] しかし、こうした方向に沿った研究はSDG（Synthetic Differential Geometory）――総合的微分幾何――とよばれ活発な探求が続けられ、ローヴェール自身が語る様に「以前には誰も夢にも思わなかった（ニュートンとオイラーを別にして？）[11]」地平を切り開くことに成功し、「普通の微分形式の計算の劇的な単純化が起こりつつあることを[12]」われわれに示したのである。

（1） R. Diaconescu, *Axiom of choice and complementation*. Proc. A. M. S., 51, 1975 p. 176—178.

（2） 「Sのオブジェクトの中では発展が続くことが無いので選択関数の存在を邪魔するものは存在しない。ところで、

実際に選択公理は、ある意味ではトポスの中で集合論のモデルを特徴づけるのである。」Lawvere〔4〕p.3—4.

(3)「(Sから)新しい集合のシステムS'を得たとしよう。このシステムは(選択公理や二値性と言った)不変な集合から変異集合を区別する、最も基本的な諸性質に関する限りは、不変に見えるのだが、……、構成可能性の公理や、……連続体仮説の様な、集合の不変性をさらに強める為に提案されたより深い諸性質の幾つかは、たとえそれが技術的な意味では『基本的』なものであっても、コーエンが示した様に、SからS'への移行によって破壊されるのである。」Lawvere〔8〕p.104.

(4) Lawvere〔5〕p.136.

(5) Lawvere〔10〕p.377. 逆に「物理学の『規定的な抽象的・一般的関係』を数学的に扱うためには、数学的な世界像が、滑らかな空間の間の滑らかな射のカルテシアン・クローズドなカテゴリーEを含むことが必要である。」Lawvere〔10〕p.2.

(6) Lawvere〔9〕p.1 による。明らかに、ここでは第三の課題は第二の、第二の課題は第一の課題の基礎を提供する。また、彼の所謂トポス理論は、この計画の第三の部分を具体化したものであることが分かる。すなわち、彼にとってはトポス理論は「連続的な力学の基礎を公理化」する上での最も基礎的な理論という位置付けを与えられていたのである。

(7) Lawvere〔5〕p.136. かれは、ここでレーニンの哲学ノートに全面的に依拠している。運動の正しい特徴づけが、解決困難な矛盾に陥るように考えるのは、彼によれば、「われわれが、点と近傍との間の(プラトン流の点の神格化によって持ち込まれ、集合論によって再生された)形而上学的な対立は、実践においては、たとえ数学においてさえ、維持できないということを無視」するからなのである。Lawvere〔5〕p.136.

(8) すぐあとに彼はこう続ける。「また同じ理由で、もちろん永遠不変な思考の世界ではその権利は守らねばならないにしても、理論が無矛盾だからといって、現実の世界に何者かが存在することを要求するのは観念論なのである。」Lawvere〔5〕p.137.

(9) こうした方向を、実は、グロタンディック・トポロジーが進めていたといえるのだが、ローヴェールはシュワルツのディストリビューションや佐藤の超関数のような現代数学において開発された有用な概念が、やはりこうした方向を向いていることを指摘する。Lawuere〔5〕p.136.

(10) A・コックはローヴェールらの発想が決して新しいものではなく弁証法の歴史とともに古いことを示す、次の様なエピソードを紹介している。今、(0,1)を中心とする半径1の単位円とX—軸の交わりをDとしよう。「古いギリシャの哲学者プロタゴラスは、次の様な議論でユークリッドを論駁しようとした。すなわち、先の図での交わりが一

つ以上の点を含んでいることは明らかであると。」A. Kock, *Synthetic Differential Geometry*, Cambridge University Press, 1981, p.7.

このエピソードは、興味深くはあるが、時期的には無理がある。あるいは、コックが「ユークリッド」としているのは、プロタゴラスと同時代の幾何学者のことかも知れない。

(11) Lawvere〔10〕p.388.

(12) Lawvere〔10〕p.390.

結びにかえて

もはや紙幅が尽きた。今世紀の始めから、急速な専門化・細分化の道を辿った数学は、いま、あたかも内的な紐帯によって引き付けられるかのように、小さくはない求心力が働きはじめているように見える。

ローヴェールの試みとその成功は、現代の科学においても世界観的な方法論が大きな力を持ちうることを示すばかりではなく、そうした方法論自身が科学的にさらに根拠づけられるべきことを示しているように思われる。

対象的な自然認識に関するかぎり、宇宙から素粒子の世界に至るまでの物質の運動法則の統一的な記述、複雑な生命現象の分子レヴェルでの解析等々、われわれの時代が大きな成果を治めつつあることは疑いえない。こうした認識の広がりは、自然の中での人間のさらに豊かでふかい自己認識へと発展する可能性をはらんでいる。しかし、こうした自己認識の発展は、われわれ自身による、われわれ自身の認識のメカニズムとその法則性の把握という課題をその不可欠のモメントとしているのである。

トポスの最も簡単で自然なモデルをなすファイバー・バンドル上の接続の理論が物理学的な注目を浴びているのを見れば、物質―いわば、最も客観的なものについての理論が、認識―いわば、最も主観的なものについての理論と同じ形式を取ることがありうるという奇妙な予想を行うことさえできる。そして、優れて哲学的である数学者ローヴェールが前者の理論において為しつつあることは、不十分ながら科学の成果に学ぼうとするわれわれが、後者の理論において果たさねばならない課題に関して貴重な示唆を与えるのである。

小論で用いた F. W. Lawuere の論文一覧

(1) *The Category of Categories as a Foundtion for Mathematics*, Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, (La Jolla 1965), Lecture Notes in Mathematics, Springer—Verlag, 1966, 1—20.

(2)) *Adjointness in foundation*, Dialectica, 23, 1969, 281—296.

(3) *Quantifiers and Sheaves*, Actes des Congres International des Mathematiques, 1970, tome 1, 329—334.

(4) *Introduction and ed. for Toposes. Algebraic Geometry and Logic*. Lecture Notes in Mathematics, vol 274. Springer-Verlag, 1972, 1—12.

(5) *Cotinuously variable sets: Algebraic Geometry=Geometric Logic*, in Logic Colloquium '73, ed. by H. E. Rose and J. C. Shepherdson. North-Holland, 1975, 135—156.

(6) *Introduction and ed. (with C. Maurer and G. C. Wraith) for Model theory and Topoi*, Lecture Notes in Mathematics, vol 445,
Springer-Verlag, 1975, 1—14.

(7) *Variable sets etendu and variable structure in topoi*, Notes by Steven Landsburg of Lectures and conversation, Department of Mathematics, University of Chicago, 1975, i+47 pp.

(8) *Variable Quantities and Variable Structure in Topoi, in Algebra*. Topology and Catagory Theory. A Collection of papers in Honor of Samuel Eilenberg. Academic Press, 1976. 101—131.

(9) *Categorical Dynamics*. in Topos theoretic methods in geometry. Various Publ, Ser., 30, Mat. Inst., Aarhus University, 1972, 1—28.

(10) *Toward the description in a smooth topos of the dynamically possible motions and deformation of continuous body*, Third Colloquium on Categories (Amien 1980).
Cahier Topologie Geom. Differentielle. 21, 1980, 377—392.

(一橋大学大学院博士課程)