確率の謎

高岡浩一郎

本稿が「確率の本質とはこういうものである」と解説する記事だと予想なさっている方も多いかと思いますが、そうではなく、逆に「確率の意味を完全に見抜いた人は歴史上誰もいない。部分的にしか分かっていない概念である」ということを説明するのが本稿の目的である、と最初にお断りしておきます。大学に入って新しい知の世界に触れようと意欲に燃えている新入生の皆さんにとっては拍子抜けの感もあるかも知れませんが、「よく分からないからつまらない」のではなく「よく分からないながらも、いろいろ考えると楽しい」と思ってもらえればなあと考え、筆をとりました。もし「よく分からないからこそ考えて楽しい」とまで思ってもらえるようになれば、望外の幸いです。

一　はじめに——確率を用いた様々な表現

世の中は不確実性やリスクに満ちていますが、それらについて語る時に確率を用いることが多いのは、皆さんよく御存じでしょう。例えば、我々は日頃次のような表現を何気なく使います。

【1】サイコロを一回投げる時、1の目が出る確率は6分の1である。

【2】天気予報によると、明日の降水確率は40%である。

【3】統計によると、向こう一年間に自動車を運転していて大事故に遭う確率は××%である。

【4】古い文献を調べたところ、あの大木の下に江戸時

代の千両箱が埋められている確率が25%はある。
【5】この会社の株価が一ヶ月後に二百円以上値上がりする確率は、70%以上あると思う。

しかしこの中には、具体的に何を意味するかを真剣に考えるとわけがわからなくなる表現もあります。例えば【1】は一番簡単な表現のように思えますが、正確には何を意味するのでしょうか？「サイコロを何回も投げていれば、1の目が出る頻度が6分の1に近づく」というのが普通に考えつく解釈ですが、それを実際に確認した人は歴史上誰もいません。サイコロを無限回投げることは原理的に不可能ですし、五百回や千回くらい投げる程度では、1の目が出る頻度が6分の1からかなり外れてしまうことも多いのです。千回投げた時に仮に頻度が6分の1に近かったとしても、そのまま投げ続けて一万回目にどうなっているかは、千回目の段階では何とも言えません。また、別の解釈として「サイコロにゆがみがなければ、どの目が出るのも同様に確からしいので6分の1」というのもありますが、「らしい」ということは、これは我々の主観に基づいた解釈なのでしょうか。主観に基づいて出す結論がどの人も同じ「6分の1」になるというのは変ですよね。

また、【4】も考えると難しい。なぜなら、千両箱があるか否かは土の中では既に確定していることで、本人が25%と思うのとは無関係だからです。千両箱が埋まっているか否かがわからないのは、ただ単に我々が土を掘り返して調べていないからです。ですから【4】は主観的な表現のようですが、同じく主観が入っていると思われる【5】ともまた少し異なります。【5】では株価が上がるか否かは現時点では確定していないわけですから。

一方、【3】は経験上かなりはっきりした表現のように思われます。一年間に交通事故で亡くなってしまう人の数が去年と今年でほとんど変化がないことには驚かされるばかりです。前世紀のある偉い学者が「人間は統計を実行する道具に過ぎない」と述べたことがありますが、これが極論としても、【3】のようなケースではある程度真実をついているなあと認めざるをえません（悔しいですが）。こういうケースでは、確率は個人個人の主観とは全く離れたところで決まってくるような気がします。ただし、二十年前の事故数と最近の事故数とではかなり

差があるので、今年のデータを基にはっきりしたことが言えそうなのはせいぜい七、八年先まででしょう。これに対し【1】は千年前でもサイコロの1の目が出る確率は6分の1でしたし、千年後でも一万年後でもやっぱり6分の1でしょうね。

このように、確率の言葉を同じように使った表現でも、客観的な事実を表していそうなケースから、個人の主観を反映しているケース、はたまた、客観的なようだが考え出すとよくわからないケースなど、様々な表現があるわけです。多様すぎて、同じ確率の言葉を用いていることが信じられない程ですね。(なお主観確率は、参考文献〔二〕や〔一〕第6章でも説明されているように、大変重要な概念です。リスクに対する感じ方が人によって異なるからこそ、世の中がうまく動いているとも言えるのです。)

確率を使うといろいろ計算でき、出てきた計算結果もかなり現実と符合していて便利なものですが、確率の「意味」や「解釈」の本当のところは依然としてよく分かっていないのです。確率の言葉を使って述べた事柄とナマの現実とが接するところで、モヤモヤしたわからない部分が出てくるのです。このことについて、以下の第二節から第五節では、いくつかの分野における事情をもう少し詳しく説明したいと思います。

なお私の専攻は何かと申しますと、確率論を数学の立場から研究しています。第五節でも述べますが、数学の確率論研究者は確率の意味や解釈について論じる専門家では必ずしもありません。ですから本稿には間違いが含まれている可能性も(何十%?)ありますが、間違いの責任はもちろん全て私にあります。

二　物理に現れる確率

それではまず物理学について見てみましょう。現在のところ、物理学において確率が現れる場面は大きく二つに分類されます。

a　量子力学を使って、粒子がどこにいるかなどの確率を計算するケース。

b　元々は決定論的な運動方程式(ニュートン方程式等)で記述される系にもかかわらず、なぜか確率が入っ

てくるケース。

bから見ていきましょう。前節の【1】や【2】の表現は物理ではこのカテゴリーに入ります。サイコロを投げ始める瞬間のサイコロの速度と向き（初期状態と言います）を指定すれば、あとはニュートンの運動方程式を解くことによって、サイコロの出る目は原理的には完全に一意に、決定論的に決まります。ある初期状態が1の目を出すならば、その初期状態を何回も続けて再現していけば1の目が出続けることになります。サイコロ投げの精巧な装置を作れば、そうやって1の目を出し続けられそうですよね。確率の入ってくる余地は無さそうに見えます。どこからどうやって確率が現れるのでしょうか。

それは「初期状態のごくわずかな違いが、時間がたつにつれて大きな差を生む」ことと「初期状態の完璧な再現が我々には不可能である」ことの二点から生じます。サイコロ投げのようなケースでは、ある初期状態からは1の目が出ても、その初期状態のどんなに近いところにも、他の目を出す初期状態が存在し得ると考えられています（「考えられている」とは、「ちゃんとは証明されていない」ということ）。こうなると、1の目が出るその初期状態を仮にコンマ20桁まで正確に再現できたとしても、21桁目の誤りが最終的に出る目を変えてしまう可能性があります。50桁でも70桁でも同じこと。どんなに正確な装置を作っても必ず何桁目かで誤りが生じますから、その装置を使ってその初期状態を再現し続けたつもりでも、いろいろな目が出てしまうわけです。

次に、aではどうなっているのでしょうか。不思議なことですが、量子力学で導かれる確率はbで考えたような確率とは根本的に異なっているそうです。bと同じようなものだとすれば「ミクロの現象はわれわれには確率的・偶然的に見えるが、われわれが自然をまだ十分に知らないためにそう見えるのである。自然は究極的には偶然性などなく、きちんと決まっている」という考え方なのですが、ある実験の結果がこの考え方と矛盾してしまうのです。（上のかぎ括弧内の部分は参考文献〔九〕第10章での説明を引用しました）これは『隠れた変数の存在』の否定」または「因果律の否定」などと呼ばれています。

しかし、確率の究極の起因要素がいくつもあるような気はしません。不思議ですよね。

量子力学は電子など粒子の振る舞いを記述する手法としては完全に信頼されていますが、そこに現れる確率の解釈は必ずしも全ての物理学者を納得させるものではなく、また「不確定性が測定操作と密接に関連しているので、どこまでを観測装置とみなし、どこからを観測される力学系と考えるべきか、というような問題」は今でも解けたような解けないような状態になっているそうです（上のかぎ括弧内の部分は文献〔十〕を引用しました）。この問題を観測問題と呼びます。第一節で述べた【4】のような表現とも少し関連があると思います。ある物理の研究者に先日お尋ねしたところ、「量子論の解釈について一番いい考え方は『考えない』ということだ」とおっしゃっていました。ふむむ…

なお、不確実性、リスクやそれらと関係の深い情報という概念は、時間の方向性（非可逆性）とも密接に関係しているはず（参考文献〔一〕の31頁にも関連した記述があります）ですが、この部分は物理としてはまだよくわかっていないというのが現状です。もう少し詳しく述べますと、「エントロピーは増大する」という熱力学の第二法則が上のa、bどちらの枠組みにおいても自然な形では導かれていないのです。a、bとも基本方程式が時間に関して可逆な形をしているからです。興味のある方は参考文献〔七〕などをご覧ください。

三　デリバティブ分析に現れる確率

経済学においても不確実性は重要な研究対象であり、ナイトやケインズをはじめ多くの経済学者の頭を悩ませてきました。その大きなテーマについては最近『経済セミナー』の98年11月号に「経済の不確実性と心理」という特集で専門家の諸先生が論説を書いておられる（参考文献〔二〕）ので、そちらをご覧になるのが一番だと思います。

本節では、不確実性が関係している諸分野の中の一つである金融工学という分野ならびにその周辺、という限られた話題についてではありますが、私が経済分析に現れる確率を勉強していて感じることを僭越ながら少しお話しさせて頂こうと思います。

新入生の皆さんも「デリバティブ」という言葉を一度は耳にしたことがあると思います。日本語では派生証券や派生商品という呼び方をします。先物、オプションやスワップをはじめ様々なものがありますが、共通点は、「派生」という言葉からもわかるように、ある別の商品の価格（例えば株価、国債価格、原油価格、為替レートなど）を基にして価格が決まる商品だということです。いろいろな意味で話題になっていることもあって、興味をお持ちの方も多いのではないでしょうか。「デリバティブに携わっている人の中には物理・工学・数学の出身者もいて、コンピュータや難しい数学理論を駆使して価格付けやリスク管理をしている」という話を聞いてびっくりしたり、また、「ノーベル賞学者のいるヘッジファンドが巨額の損失を抱え、救済された」というニュースを聞いて「やっぱりあやしげな代物だ」と思ったりしたのではないでしょうか。

ビジネスに限らず、人間のあらゆる活動には必ずと言ってよいほどリスクが伴っていますが、それを一箇所で負担せず社会全体にうまく分散させる術を人類は編み出してきました。保険はその代表例ですし、またその他にも、例えば株式会社制度は、企業の倒産リスクを株式という小口に分割し社会全体に広く薄く分散させることによって、それまでになかった規模の企業の登場を可能にしたと言えます。多種多様な活動がますます盛んになっている今日において、リスク分散とそのためのリスク評価（具体的には価格付け）とが以前にも増して重要になってきています（この点に関しては文献〔三〕を参考にさせて頂きました）。デリバティブ取引の隆盛は、この大きな流れと深く結びついています。なぜなら、デリバティブを売買することによって実際にはリスクを取引していると言えるからです。「リスク」そのものズバリに値段をつけて取引しているわけです。

オプションなど多くのデリバティブの価格付けやリスク管理においては、まず原証券（例えば、株式オプションであれば元の株式を原証券と言う）の今後の価格変動を確率を使ってモデル化し、その上でデリバティブの分析をすることが一般的です（入門書〔五〕などをご覧下さい）。オプション価格に関する有名なブラック・ショールズの公式をはじめ、こういう話において数学理論は

確かに重要ですが、それは「原証券の価格変動モデルがこれこれ」と仮定した後の計算の段階で使うことが多いのです。モデル化の段階で現実と合致しないモデルをたててしまうと、その後いくら難しい式を駆使して出した計算結果も当然現実と合致しなくなります。真の意味で難しいのは、数学理論やコンピュータを用いて価格等を計算する段階ではなく、むしろ一番最初に原証券価格をモデル化する段階なのではないでしょうか。

例えば、オプションの価格付けには、原証券価格の今後の変動率（ボラティリティとも言います）が重要な要素になることが知られています。この変動率のモデル化を誤ると、それを使って算出した値を「オプション価格」と呼んでも現実との整合性がなくなってしまいます。しかし今後の変動率を今モデル化する際に、今までの変動率のデータ（最も手掛かりになりそうですよね）をどんなに注意深く調べて計量化しても問題が完全には解決してくれません。何かのきっかけで投資家の心理的な変化が起こり、将来の変動率が過去の変動率パターンと大きく異なってしまう可能性があるからです。

デリバティブ絡みの巨額損失は大抵は初歩的な理解不足やミスに原因があることが多いそうですが、先程も少し述べたようにデリバティブのプロでさえ破綻することがあるのは、モデル化のこのような難しさと無縁ではないと思います。

この問題を突き詰めようとすると、第一節でも述べた「確率の言葉を使って述べた事柄とナマの現実とが接するところのモヤモヤ」にまたもやぶつかってしまいます。株価等の分析の際に現れる確率の起因要素としては、

- 市場参加者が多数いるので、協同現象として、物理における統計力学（前節ではbに分類される）のような感じで確率が生じるのか？
- 市場にいつどういう情報が入ってくるか分からないので、その不確実性を表すものとして確率が生じるのか？
- 市場参加者が互いの戦略や意図を読み切れないので、その不確実性を表すものとして確率が生じるのか？　例えて言うならばゲーム理論における混合戦略のような感じで。

という三つの要素（これ以外にも要素があるかも知れま

せん）がどれも絡んでいそうですが、それぞれがどのくらい強い要因になっているか判然とせず、要素間の相互関係もあるでしょうから、考え出すと本当に難しい。もちろん、「難しい」と言っているだけでは何も生まれてきませんし、デリバティブに関するこれまでの理論発展はすごいと思いますが、実際のデリバティブ取引において特にリスクを人から引き受ける場合には、根底に未解決のモヤモヤが残っていることを忘れてしまうと、いくら数学理論で武装していても痛い目にあってしまうかも知れませんね。

なお、株価変動の分析に確率モデルを用いること自体に対して疑問を投げかける人もいます。株価がどう決まるかという問題は今なおよく分かっていないのです。興味のある方は参考文献〔四〕や〔一〕もご覧になると面白いのではないでしょうか。株価変動の分析には、確率モデルの手法以外にも時系列解析やファンダメンタル分析など様々な手法があります。株式相場という対象が先にあって、それをどういう視点で調べていくかという問題なので、無反省に混用しない限りは、いろいろな立場や切り口があること自体はいいことだ思います。

四　工学に現れる確率

デリバティブに工学部出身者も興味を持っていることは前節で述べましたが、本節では少し別の話題に触れたいと思います。

工学では、デリバティブ関連に限らず様々な自然現象や社会現象をモデル化してその制御を考えることが多いのですが、モデル化の際に現実とモデルとのずれ（モデル化誤差）がどうしても避けられないという明確な認識の上に立って、モデル化誤差があっても良好な制御性能が保たれるような理論体系を探ろうという動きが出てきたそうです。H∞制御理論と呼ばれるものです。原稿が縦書きのためうまく記せませんが、本当はHの右下に小さく∞と書きます。数学でも確率制御の専門家は大変興味を持っており、阪大の長井英生氏（参考文献〔八〕参照）が「H∞制御の考え方は工学を越えて、確率を扱う他の分野にも浸透していくのではないか」とおっしゃっているのを聞いて、私も感銘を受けました。今後勉強していきたいと考えています。

五　数学の確率論

　それでは、数学では確率の意味や解釈をどう考えるのでしょうか。実は、数学の確率論では確率の意味や解釈を考えません。平面上の「点」を定義する時に、点とは大きさのない物、では大きさって…と意味を考え出すときりがないため現代数学ではそういう定義方法を採用しないのとちょうど同じ事情で、確率も「数学的にこれこれの性質を満たすものを確率と呼ぶ」と定義し（つまり意味ではなく性質を使って定義し）、その上で研究するのです。第一節で挙げた表現【1】のサイコロ投げに関しては、「1の目が出る確率とは何を意味するのか」という問題には正面切っては触れないまま、サイコロ投げに相当すると思われる数学的対象を考察するのです。その際、元のサイコロ投げはイメージとしては常に頭の中にあるのですが、あくまでもイメージの域にとどめておくのです。ですから、「ゆがみのないサイコロを投げて1の目が出る確率」（に相当するゼロ以上1以下の実数）は初めから6分の1に決めてしまいます。「6分の1という数字を『ゆがみのないサイコロを投げて1の目が出る確率』と名付ける」という言い方のほうがむしろ実態をよく表しているかも知れません。それを使って何か計算した結果の量は、イメージ的にはサイコロ投げに関するある事柄を表しており、実際には単なるイメージ以上のものなのでしょうが、「1の目が出る確率とは何を意味するのか」という根本の問いに対しては本当のところは何も答えていないのです。

　そう言うと「そんな無節操な」という声が聞こえてきそうですね。実は私もそう思うことが時々あります。でも、確率の解釈を考えるという哲学的な部分を棚上げしナマの現実と接するところのモヤモヤをとりあえずは振り払うことによって、確率を支配する法則に関する研究が大きく進んできたとも言えるのです。コルモゴロフという人によって確率論が数学の一分野として定式化されたのは今世紀前半のことで、数学としては若い分野と言えます。高校で学ぶ確率では考える場合の数が有限であるため、場合の数をいかに間違えずに効率よく数え上げるかが主な関心事だったと思いますが、大学では考える場合の数が無限個あって更にその確率的状況が時間とともに連続的に変化していくような対象も考察します。そ

ういう対象をもきっちり考えることができるというのが、まあ数学のパワーということになるんだと思います。伊藤清氏をはじめ日本人の貢献も大きく、確率的状況が時間とともに変化する対象（確率過程といいます）に関する「伊藤の公式」はこの分野の最重要公式の一つです。

先程「数学の確率論では確率の意味や解釈を考えない」と述べましたが、意味を考えるのが重要でないと申し上げているわけではありません。コルモゴロフによる定式化が捉えきれていないもの、またその定式化が捨ててしまったもの等に関しては、文献〔七〕が参考になろうかと思います。数学の確率論が確率の意味を考えることを放棄したのとは対照的に、統計学はそういう問題に正面からぶつかっていくため、モヤモヤがあるものの本当に学問的に真剣なのは統計学のほうかも知れないなあ、と思うことはよくあります。もしご興味があれば、確率・統計の批判的入門書〔六〕もご覧になると面白いのではないかと思います。

六　おわりに――新入生の皆さんへ

前節までで見てきたように、確率に関しては根本的な問題が根本的すぎるが故にどこから手をつければよいのか分からない状態になっていながらも、いろいろな人々がそれぞれの切り口でこの概念を捉えようと努力しています。私は他分野のことはよく知らないのですが、根本的問題が同様にモヤモヤした状態になっている分野は案外多いのではないでしょうか。

研究最前線についての一般向け解説書や雑誌を見ると「これが解明された」とか「あれもこれも明らかになった」という感じの記述が多く、「自分がこれから勉強しようとする分野はわかっていることだらけなんだな」と思って逆に落胆してしまう学生さんも多いかも知れません（学生時代の私はそうでした）が、それは早とちりです。研究の世界では、ある狭い箇所については研究者がワーっと集中して研究が爆発的に進みいろいろなことが解明されているにもかかわらず、そのすぐ脇の箇所は全然手付かずどころかその存在さえも気付かれていないというケースが結構多いのです。しかも、その手付かずの箇所を掘りおこしてみると面白い内容が豊富に含まれている可能性も大きく、その分野の根本的問題の（部分的であっても）解明へ至る鍵や、他の分野との思わぬつな

がりを持ちあわせている可能性すらあります。しかし、そういう箇所は既に出版されている本や研究論文には書いてありません。存在すら気付かれていないわけですから。あなたが見つけるのです。

まあ、そういう手付かずのオイシイ箇所は見つけようと思ってもなかなか見つけられるものではありませんし、根本的問題というのは話が大きすぎて研究論文のネタになりにくいという業界事情もあります。既に分かっている事柄の上にコツコツ新しい成果を積み重ねていくというのも学問的にとても大切なことですし、そのコツコツが時として思わぬ高みにまで達することもありますので、日頃はそういう話題で業績を積み重ねることが（現実的だという観点からも）意味のある研究戦略です。しかし、真に重要な躍進はいつも意外な視点からの意外な発見によってもたらされてきたんだ、ということを意識しておくことは大切だと思います。

これは研究に限らず人間活動の様々な分野について言えることと思いますが、重要なのは自分向きの面白い問題がどこに埋まっているかを嗅ぎ分ける嗅覚ではないでしょうか。面白い問題を見つけた時にそのチャンスをものにできるだけの基礎力が必要なのは言うまでもありませんから、今までに解明されてきた事柄や手法の学習は大事ですが、その際も圧倒的な知識量の中に埋没せず、本当に大事なのは自分の嗅覚・感性であることを忘れずに。また、「既に分かっていること」ではなく「まだ分からないこと」から独創的な成果が生まれていくわけですから、分からないこととうまくつきあう訓練も大切だなあと考えています。

でも、一番大切なのはその分野が好きだという気持ち、その分野に対する熱意ですよね。

若い皆さんの御活躍を祈ります。

参考文献

◇不確実性やリスクに興味のある方は、

〔一〕『リスク』ピーター・バーンスタイン著、青山護訳。日本経済新聞社、98年。

を是非一度お読みになってはいかがでしょうか。「リスクという概念の理解とコントロール」という視点から人類の歴史を捉えた素晴らしい本だと思います。

◇第三節では次の文献に少し触れました。

〔二〕『経済セミナー』98年11月号の特集「経済の不確実性と心理」。著者は松島斉、山岸俊男、酒井泰弘、西條辰義の諸氏。日本評論社。

〔三〕「社会全体でリスクを分散」伊藤元重著。日本経済新聞99年1月11日「経済教室」。

〔四〕『ウォール街のランダム・ウォーク』バートン・マルキール著、井手正介訳。日本経済新聞社、93年。

また、デリバティブについて何か読んでみたいという方には、入門書として

〔五〕『デリバティブ入門』ジョン・ハル著、三菱銀行商品開発部訳。金融財政事情研究会、94年。

などがオススメです。

◇第五節で説明した確率論や統計学の入門書としては

〔六〕『確率・統計』楠岡成雄著。森北出版（新数学入門シリーズ7）、95年。

が独特な本で、面白い。ただこれは批判的入門書なので、他の入門書と併読しないと人によっては不信感に凝り固まってしまうかも知れません。また、現代確率論の諸問題についての

〔七〕『確率論をめぐって』高橋陽一郎＋志賀浩二著。日本評論社（対話・20世紀数学の飛翔3）、92年。

は内容は高度ですが、対談形式なので数式が無く、読みやすいと思います。

◇その他、本文中で引用もしくは言及した文献は次のとおりです。〔九〕は数式を使っておらず、専門家でない人のために書かれた本です。〔十〕は物理の学生向けテキスト。

〔八〕「確率論と制御問題」長井英生著。数学セミナー別冊『数学の楽しみ8』の特集「確率論の広がり」における論説。日本評論社、98年。

〔九〕『量子力学の反乱』町田茂著。学習研究社（最新科学論選書4）、94年。

〔十〕『量子力学I』小出昭一郎著。裳華房、93年改訂版。

（一橋大学専任講師）