バリュー・アット・リスク計測における統計的方法

三 浦 良 造

バーゼル銀行監督委員会は，市場リスク規制の第1次案を1993年4月に発表し，銀行のトレーディング勘定におけるポジションの市場リスクを規制対象とし，これらを委員会が指定する計測方式によって各銀行が必要とする自己資本額を算出するように提案した．さらに第2次案を1995年12月に発表し，そこでは各銀行が独自に作る計測システム（内部モデルと呼んでいる）を代替的手法として容認することにした．

これを受けて各銀行は内部モデルの開発に力を入れることになるが，この様にして作られたリスク（バリュー・アット・リスク，VaR）計測の作業全体を見ると，統計科学（あるいはデータ・サイエンス）を体現しているかのようである．つまり，1960年代の統計的意思決定論が描く，データの発生，データの収集，から始まり，データベース作り，データの分析と統計モデル作り，データ分析結果の意思決定への利用，に至るという姿である．意思決定の部分にはもちろんアートの部分が残るが，モデル作りとデータ分析の部分まではずいぶんサイエンス化されたと言えよう[1]．

計測方法の議論の体系は，バーゼル委員会の当初の議論に現れた粗い計測方法（i. i. d. 正規分布性に基づくもの）が批判を受けて，改訂された経過にも似るので，本稿ではまず粗いが単純な計測方法から説明し，それのもつ問題点を示し，それを克服するために提案されている計測方法を紹介する．バリュー・アット・リスク計測をポートフォリオ価格増分という確率変数の確率分布の1％点の推定あるいは予測であるとみなし（J. P. Morgan（1995）参照），そこで見られるいくつかのアプローチと統計的手法についての分類

も同時に行い，そして著者が行った研究の紹介を加える．最後に計測方法の良さを判断する基準についてのコメントをつけ加える[2)3)]．

1)　ここで社会観察の一つとして見えることは，数理統計的方法が，金融機関の中枢部においては1988年当時は，入門的レベルでしか取り上げられておらず，しかし市中協議を経るに連れ，ごく短い期間に数理統計学の中級から上級レベルの方法に接するようになったことである．米国FRBのグリーンスパンが，まず，1995年11月にストカスティック・ボラティリティーと重い裾がポイントであると発言し，さらに翌年，翌々年と続いて，リスク計測技術の適応が絶えず進歩するものであることに触れた．高度の計測方法を必要とする実務上と規制上の現実のためにこの短い期間に各金融機関は計量的方法と数理モデルに長じた専門家を獲得せざるを得ないことになった．デリバティブの開発において数理科学の専門家が活躍していることは巷で語られるが，VaR計測においても同等の人材が必要であることはあまり語られていない．それは人材の不足も原因であろうが，計測の方法がコンピュータのソフトウエアとして作られてしまうとそのシステムを“買って”来て使えばよいと考えられているからではないだろうか．それで業務が賄える金融機関ならばそれでよいが，先進的に金融商品を開発し，積極的に新商品を取引する金融機関ならば，このような計測システムを自前で開発し適時変更と追加を加えることが出来る技術が必要である．例えば，デリバティブなど金融新商品が開発されてもその価格変動リスクがきちんと管理できるものであることが金融機関にとっても重要であり，そのリスク管理の方法もVaR計測の作業に組み込まれなければならないことから，デリバティブなど金融商品の価格変動とVaR計測モデル・システムの両方に長じていることが先進的金融機関にとって戦略的に重要である．さらに言えば，VaR計測は金融機関の戦略策定のためのツールの一つであるのだが，その認識は一般には普及していないかもしれないとしても，金融機関内部では，それを使いこなす経営陣が現れてきており，そうでなければならない．（参考文献は週間金融財政事情．1996年5月20日号と1996年8月19日号，1997年8月4日号．）

2)　本稿は，1998年7月11日，一橋大学佐野書院にて開催されたジャフィー（日本金融・証券計量・工学学会）夏季大会における著者の特別講演の原稿を下地にして書き加えたものである．

3)　本稿では，信用リスク計測については扱わない．信用リスク計測は，枠組みとしては市場リスク計測の延長上にあるが，しかしそこでは貸付先企業の財務デ

ータに基づく信用レベル分析などの統計的分析が必要であり，本稿には含まれない類の統計的方法も用いられる．財務データの計量的分析は，金融機関側からだけでなく当該事業会社にとっても財務戦略上重要である．現在盛んに研究が進められており，今後は研究も実践も盛んになると考えられる．これは，不確実な現象を扱う統計的方法と，企業会計・財務の理論，そして投資理論が融合した研究分野になると考えられる．

1　計測の対象

保有ポートフォリオ価格の増分の確率分布の1%点を推定（あるいは予測）する．V_tをある日（時点t）のポートフォリオ価格とし，V_{t+1}を翌日の価格とする．時点tにおいて，この時点までの情報（つまり，V_tなど）が与えられたものとして，翌日1日間のポートフォリオ価格の増分$(V_{t+1}-V_t)$が通常の不確実性の下でどのような確率分布に従うかを考え，通常起こり得る範囲で99%の可能性でこの値以上であるという値を求めたい．この値はバリュー・アット・リスク（Value at Risk, VaR）と呼ばれ，増分$(V_{t+1}-V_t)$がこの値以下になる可能性は通常であれば1%の確率しかないので，この値程度の資産価格減少（損失，1%点は通常は負の増分に当たる．）が生じてもカバーできる自己資本金を持っていることがよいとされている．このVaR値を上回る資金を準備しておけば安全ではあるが，それは資金を眠らせて収益を得る投資に回せないことにもなるので，収益率を高めようとする金融機関にとっては，この両者のバランスは経営の姿勢を示す一端になるであろう．パーセンテージとしては1%が普通であるようだが，理論的には0.5%でも2%でもよい．

またVaR値の推定にはコストもかかるので，コストをかけてでも推定精度を上げるか否かは，それによって得られるベニフィットを見て金融機関が決めることの範囲であるが，国際的な取引が多い金融機関に対しては，VaR計測モデルあるいはシステムが満足すべき要件が国際的合意の下で示され，各国の監督官庁が監督することになった．

図1は，トピックス（東証株価指数）と円・ドル為替レートそれぞれの日

図 1-1

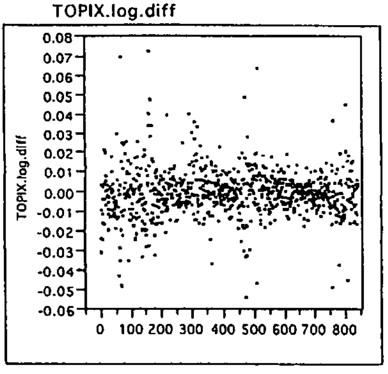
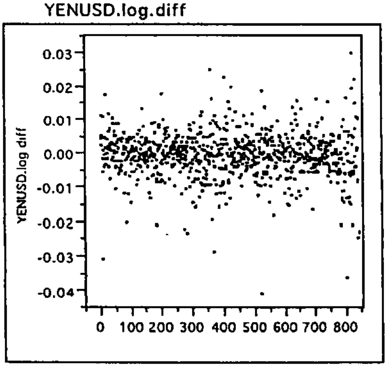


図 1-2



次の対数差を時系列グラフにしたものである．837日分のデータをプロットした．VaR 計測の問題意識は，次のように説明できる．どちらの図でもよいが，ポートフォリオがこの単一資産で構成されているとして，読者がいま837日目に居るとしよう．対数差は近似的に投資収益率でもある．さて翌日にかけての投資収益率はどの程度であると考えるべきか．これを過去のデータを用いて予測あるいは推定しようという訳で，まず図1と図3を見ることになる．

つまり，計測のためには過去のデータを用いる訳であり，そのためには，過去のデータがどのようなランダム・メカニズムの下で生じたかを同定しなければならない．その同定あるいは同定の視点の表現が統計モデルであるが，そこに使われるパラメターや関数などを上の計測対象に関係づけて，VaR 計測とするのである．

ここでいくつかのアプローチ（あるいは統計モデル，ランダム・メカニズムに対する理解の表現）が可能であり，すでにかなり研究されている．数理統計学分野で見られる主流のアプローチのすべてが，ここで扱う VaR 計測の問題に対して試みられようとしているといっても間違いではないだろう．

以下では，それらを分類して，いくつかの新しい試みを紹介し，最後にま

だ十分には詰めて研究されていない点についてコメントを加える．

2　計測の方法

2-1　計測の枠組みと方法

(1)　計測の枠組み

ポートフォリオは多くの資産の和であるから，保有ポートフォリオ価格の増分をポートフォリオに含まれる個別資産（証券）価格の増分の和として表現する．表現の基本はまず投資収益率（変化率）に基づいて等式を作り，その後で t 時点の総額 V_t を掛けることである．$V_{i,t}$ を資産 i の t 時点における価格とすると，ポートフォリオ価格の増分は以下のように表せる．

$$V_t = \sum_{i=1}^{n} V_{i,t}, \qquad V_{t+1} = \sum_{i=1}^{n} V_{i,t+1}$$

$$\begin{aligned} \frac{V_{t+1}}{V_t} - 1 &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(V_{i,t+1} - V_{i,t})}{V_t} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{V_{i,t}}{V_t}\right)\left(\frac{V_{i,t+1} - V_{i,t}}{V_{i,t}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,t} X_{i,t} \end{aligned}$$

$$V_{t+1} - V_t = V_t \sum_{i=1}^{n} a_{i,t} X_{i,t}$$

各資産毎に収益率を計測する場合はこれでよいが，管理の方法として，計測の単位を投資あるいはトレードのポジション毎に計測・管理しようという場合は，$V_{i,t}$ を投資ポジションとみなしてもよい．また計測の方法として，資産価格変動の背後にある要因をもとにして計測しようとする場合は，$V_{i,t}$ をそのような要因として扱ってよい．例えば，債券，スワップ，スワップションなど，金利系の商品は標準的な期間の金利の対数差（変化率）をそのような要因として扱うと金利系商品価格の変化全体をまとめやすくなる．

(2)　計測方法

個別資産価格（あるいはポジション価額，あるいは変動要因値）の増分ま

たは投資収益率の確率分布のパラメターを用いて，それらの関数として，全保有ポートフォリオ価格の増分の確率分布のパラメターを表現できればよいのだが，粗いモデルを設定すればこの表現はきれいに出来るがモデル自体が現実をかなり粗く近似しているので難があるとか，現実をかなりきれいに近似しているモデルではこの表現が難しくなるなど，全体を精密に計測することはなかなか難しく，いずれにしても近似的にこれを達成しようとする．近似の程度，近似の内容がアプローチによって異なる．

このようにして，「推定（あるいは予測）する対象は表現される」が，この対象を推定するために用いる「観測値（達）の確率的挙動と推定対象との関係を表現する」ためにさまざまな統計モデルが提案され，それらの「統計モデルに基づく計測手法」が導かれている．

つぎは，統計モデルと手法についての分類である．

2-2　i. i. d. の下での計測の方法（アプローチ）

(1)　パラメトリック統計モデル・アプローチ（パラメトリック統計学）

各資産の投資収益率が正規分布に従うとすると，ポートフォリオ全体の価格増分も，まずは投資収益率が正規分布に従う．その時その正規分布の分散は以下のように各資産の投資収益率の分散・共分散の一次式として表される．（この分散・共分散行列を使った VaR 計測のアプローチを著者を含めた一部の人たちはマトリクス法と呼んでいる．）

$X_{1,t}, X_{2,t}, \cdots, X_{n,t}$ を各資産の投資収益率として $\left(X_{i,t}=\dfrac{V_{i,t+1}-V_{i,t}}{V_{i,t}}\right)$

$a_{1,t}, a_{2,t}, \cdots, a_{n,t}$ を投資比率 $\left(a_{i,t}=\dfrac{V_{i,t}}{V_t}\right)$ とする．ただし，$\sum_{i=1}^{n} a_i=1$ である．

$$\sigma_p^2 = \mathrm{Variance}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)$$

$$= (a_1 \cdots a_n)\begin{pmatrix} & & \\ & \sigma_{ij} & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$=\sum a_i a_j \sigma_{ij}$$

ただし $\sigma_{ij}=\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ である.

分散・共分散を各時点 t で不確実に変化すると想定するか，各時点で共通つまり定数であると想定するかは，過去のデータが発生したランダムメカニズムをどう見るかの視点によって異なり，それに応じて分散・共分散の推定方法（算出手順）も異なる.

(i)　i. i. d. 正規分布性の下での計測

各資産の投資収益率が，各時点で独立で同一の正規分布に従うと仮定すると，通常の標本分散・標本共分散を用いて推定すればよい．そして上の式を使って，ポートフォリオ全体の投資収益率の分散を推定すればよい．このとき1% VaR 値は，分散の平方根である標準偏差を用いて

「平均」－2.33×「標準偏差」

と表される．このアプローチは単純であり，分かりやすいが，問題がありそれはあとで述べる．しかし，VaR 計測の大まかな考え方を概念的に知ろうとするときにはこのような簡単な紹介の仕方が使われ，後で述べるような計測の問題については技術的なものとしてみなす人もあるだろう[4)].

ここで，独立同一分布性（i. i. d. と略す）を検定するための BDS 統計量を経時的に計算したグラフを図2として示しておく．縦軸の値がゼロから＋－1.645 以上離れていると独立同一分布性の仮説は棄却される．しかし，BDS 統計量の検出力については対立仮説を明確にしない限り，まだよく分かっていないので参考としてみていただきたい．ここでは各国株価指数3つと為替レート2つについて示すが，あとで金利について示す.

(ii)　i. i. d. で正規分布より重い裾を持つ分布の下での計測

各時点 t での各資産の投資収益率が独立で同一分布に従うが，しかし確率分布は正規分布ではなく，正規分布よりも重い裾を持つ分布であると仮定するアプローチである．この様に想定する理由は，図3に見られる相対頻度分布のファット・テイル現象にある．図3では図1と同じ株価指数と円・ドル為替レートの変化率データを用いてヒストグラム（棒グラフ）と正規確率プ

ロットを描いた．正規分布よりは重い裾を持つことが見て取れる．

このアプローチによると投資収益率に対してティー分布，ロジスティック分布，安定分布などの確率分布を想定する．問題は正規分布によるアプローチのように各資産の投資収益率の分布のパラメターを使ってポートフォリオ全体の収益率分布のパラメターを表現することが数理的に困難である所にある．しかし，このアプローチの下でよい近似を作る研究も行われている．また，このように数理的にパラメター値を総合する（著者は「和の問題」と呼んでいる．）ことは難しくてもデータの上で各資産価格の和を作ってしまって，ポートフォリオ全体の価格の変動をデータにより再表現して，その上で，この太い裾を持つ分布に依るアプローチを適用してもよい．著者は，この場合，ロジスティック分布がよいのではないかと考えている．

これと比較すると，正規分布を想定する場合は上の式（マトリクス法）のように簡単な一次式で表されるが，これは正規分布の大特典とも言える．

ここで示した2つのアプローチは，パラメトリック・アプローチだけに当然ながら，いずれも最大尤度の原理に基づいてパラメター推定を行うことが出来る．

(2) ヒストリカル・データに基づくシミュレーション・アプローチ（ノンパラメトリック統計学）

経験分布に基づいて，1% 点を推定する．つまり，i. i. d. は仮定するが，確率分布がどういう関数形で表されるかは特に指定しないで，分布関数 $G(\cdot)$ が単に連続関数であるとだけ仮定する．i. i. d. の仮定のもとでは経験分布関数 $G_n(\cdot)$ が真の分布関数 $G(\cdot)$ の推定となっている．これに基づいて，経験分布の逆関数をもちいて，$G_n^{-1}(0.01)$ により 1% 点を推定する．

このアプローチも上に述べた太い裾を持つ分布を想定する場合と同様に「和の問題」に直面する．全保有ポートフォリオ価格の増分の確率分布を経験分布により推定するためには，上と同様に，全保有ポートフォリオ価格の

図2－1

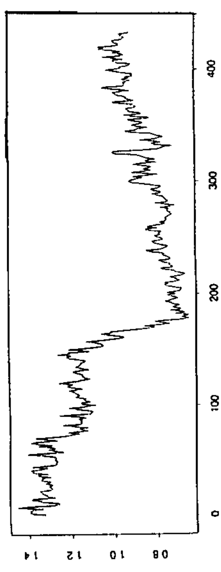


図2－2

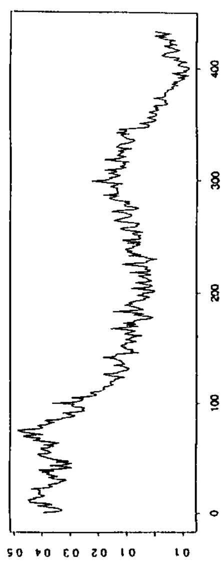


図2－3

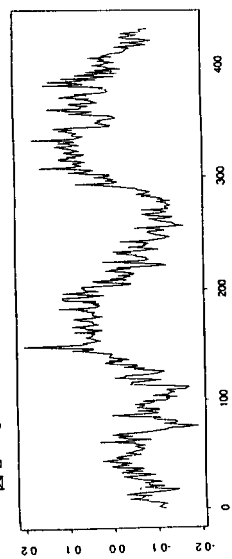


図2－4

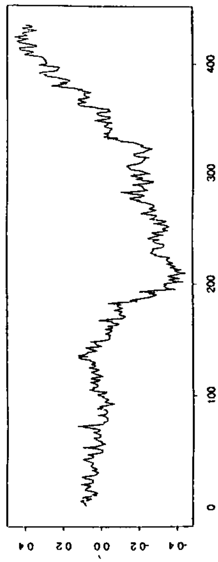


図2－5

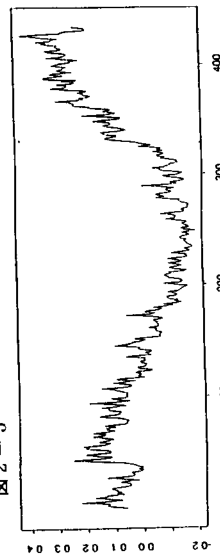


図3－1

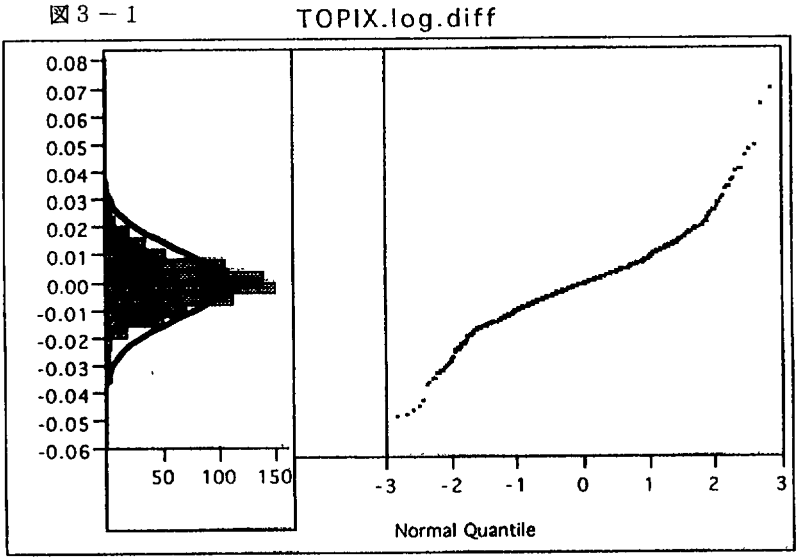
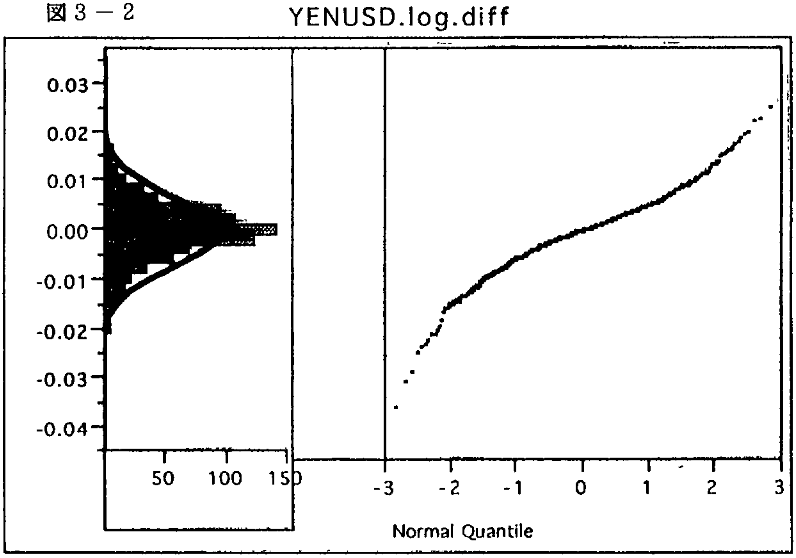

TOPIX.log.diff
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
-0.01
-0.02
-0.03
-0.04
-0.05
-0.06
50
100
150
-3
-2
-1
0
1
2
3
Normal Quantile

図3－2


YENUSD.log.diff
0.03
0.02
0.01
0.00
-0.01
-0.02
-0.03
-0.04
50
100
150
-3
-2
-1
0
1
2
3
Normal Quantile

増分の過去データを各時点で再構成しなければならない．

(3)　確率モデル・モンテカルロ・シミュレーションアプローチ

全資産・証券価格の変動を相互の関係も含めて，すべて確率モデルできちんと表現して，全保有ポートフォリオ価格の増分の（確率分布と）1%点を，モンテカルロ・シミュレーションにより求めるアプローチである．モデルが正しければ力強いが，網羅的でしかも正確なモデルを作ることがまず出来ていないのではないだろうか．

しかし，デリバティブの価格増分評価には使われてしかるべきだろう．線形デリバティブについては線形モデルで扱えるが，非線形デリバティブについては，コール・オプションのような単純なものについてはデルタ法のような線形近似も行われるが，複雑なものについては確率モデルに基づくモンテカルロ・シミュレーションにより価格増分の確率分布を求める方が正確である．これを部品として，上で扱ったアプローチに組み入れる混成アプローチが現実的ではないかと思われる．しかし，これもコストとベニフィットのバランスの上で選択されるだろう．

4)　金融機関の中で，経営陣は一般に概念的な見方を持つ程度でよいかもしれない．中間管理職はもう少し詳しく知るとして，現場のエンジニアは計測の論理と手順まで，計測の細かいところまで知る，と云う役割分担が行われるだろう．ここで重要なことは，互いのコミュニケーションの言語・用語，を正確にして共有することであろう．

3「i. i. d. 正規性」の崩れと計測方法の対応

3-1　独立同一正規分布性の崩れ（Stochastic Volatility と Fat-Tail）

対数価格差の頻度分布（図3）を見ると，裾が正規分布より重いあるいは太いこと（これをファット・テイルと呼ぶ），つまり，独立同一分布性を仮定すると相対頻度分布が密度関数の推定だから正規分布を仮定することは出来ないこと，そして図1のプロットの上下のばらつき（ボラティリティ，あ

るいは標準偏差）が時期によりかなり変化する（不確実に変化する，これをストカスティック・ボラティリティと呼ぶ）こと，つまり，太い裾を持つ確率分布を想定するよりもその尺度母数が時期に応じて不確実に変化すると考える方がよいのではないかと思わせることが分かる．

このような頻度分布が現れる背景（ランダム・メカニズム）を確率分布論的に説明するモデルがいくつか提案され，それらが市場リスク計測の手法を改善させている．計測手法の改善について次節で述べる前に，金利の対数レート差の時系列データに対して，BDS統計値を日々計算して出来るプロットを図4として示し，独立同一分布性が金利の種別，時期，通貨（国）によってはかなり崩れていることを示す．図2と比べても金利の場合は，i. i. d. の仮定はかなり崩れている．日本の金利についてBDS値が高いことが大変興味深い[5]．

5) 金利の変化率については単純な自己回帰性が見られるので，その構造を取り除いたうえで，残差についてi. i. d. 性を調べることも一案であるが，時間的制約のため今回はそこまで詰めなかった．

3-2 Stochastic Volatility と Fat-Tail への対処

独立同一分布性がかなり崩れていると想定したうえで，現実的なデータ発生メカニズムを表す統計モデルと，モデルに現れるパラメターの推定方式を添えて提案することが，問題対処あるいは解決の条件である．対処のために，大まかに言って以下の3つのアプローチが行われていると思われる．

(1) iid-Fat-Tail と確率変数の和の分布

ティー分布，安定分布などの，正規分布より裾が重い確率分布を想定し，観測の独立同一分布性を仮定する．しかし，独立同一分布性が崩れている場合は，このアプローチはこのままでは使えず，条件付きに形に置き換える等の工夫が必要である．この方向での研究が最近行われているように聞く．主

に応用確率過程論の専門家が行っていると思われる．あとで述べる重み付けも一つの対処方法である．

もう一つの例は，混合正規分布の利用である．この分布は，平均と分散（両方あるいは片方だけ）が異なる複数の正規確率変数の混合として観測値を表現するときのものであり，正規分布よりも重い裾を持つことが知られている．（竹内啓氏の本を参照）．観測をi. i. d. とする場合は混合比率パラメターおよび平均・分散のパラメターの推定方法もよく研究されている．（モデルと参考文献については，例えば三浦（1991）を参照せよ．）．混合比率に時系列的依存関係を組み込むことにより，独立同一分布性（i. i. d.）の崩れに原理的には対処できる．しかし，データの当てはまりがどの程度よいかが問題である．これについての研究は最近少し見られるようになったと聞いているが，著者はまだ確認していない．

（2）　条件付き分散・共分散（non-iid. GARCHモデル）

証券価格増分が，各時点で条件付きで多変量正規分布に従う，と仮定するアプローチである．これはGARCHモデルと呼ばれる．最大尤度の原理を用いてパラメター推定を行うが，このモデルは，計量経済学の世界で，ここ10年間ほど大流行している．

独立同一分布性が崩れているが，分散が過去のエプシロンの2乗とか過去の分散値に依存して決まると想定する．これによって頻度分布のファット・テイル，そしてストカスティック・ボラティリティの説明はつく．

GARCHの良さを知るためにGARCH（1，1）モデルのエプシロン（残差）のプロットを図5に示す．つまり，推定された条件付き分散（標準偏差）を使って指数あるいはレートの対数差を基準化したものを正規確率プロットに描いたものである．分布の裾が少し重いがかなり正規性を持っている．BDS値については日本の短期金利以外は，わりとゼロに近い数値を得た．従ってこのモデルは問題によく対処しているモデルであると考えられるが，しかし，日ごとに分散値（あるいは標準偏差値）が大きく異なるのは実務の

図4－2

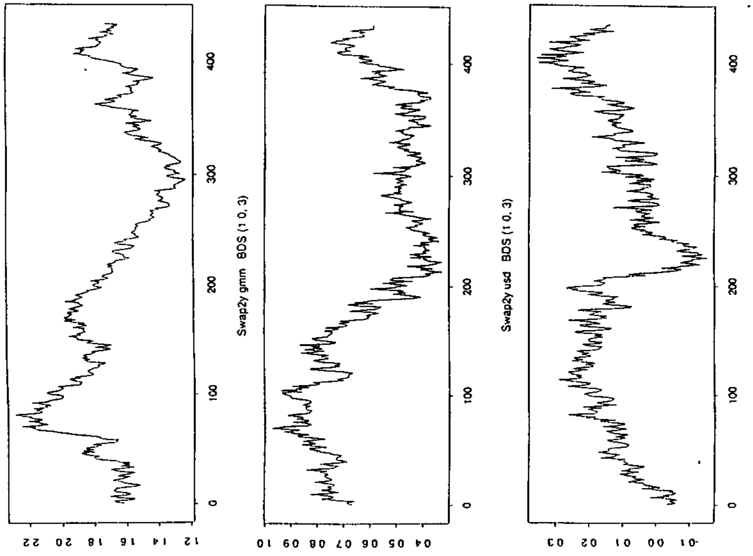

Swap2y yen BDS (10, 3)
Swap2y gmm BDS (10, 3)
Swap2y usd BDS (10, 3)

図4－1

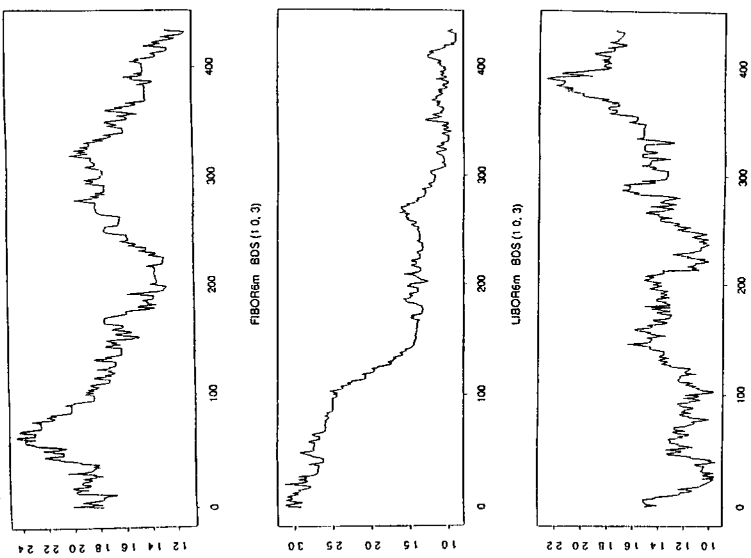

TIBOR6m BDS (10, 3)
FIBOR6m BDS (10, 3)
LIBOR6m BDS (10, 3)

図 5-1

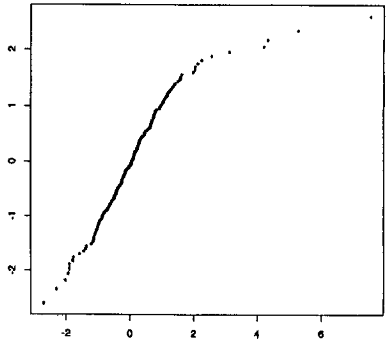


Figure 1. Normal probability plot of TOPIX standardized by GARCH(1,1) estimates

図 5-2

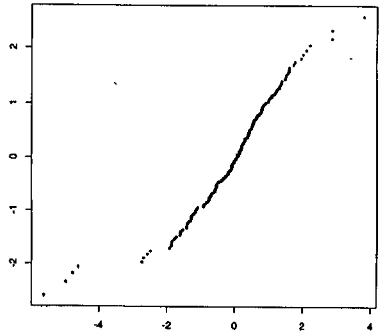


Figure 2 Normal probability plot of YEN USD standardized by GARCH(1,1) estimates

実感としては違和感があるのではないか？　これはVaR値の日々の大きな変化そのものである．

（3）　重み付き標本分散・共分散（重み付き最大尤度推定）とスムージング

指数重みなどの重みをつけることにより，遠い過去の影響を小さくし直近のデータを重視するという考え方のアプローチである．i. i. d. を想定する測定手法一般に，この重み付けという工夫を載せ得ることを三浦・大上（1998）では紹介している．

このアプローチに依ると，日々変化する分散値が得られる．しかも変化が滑らかである．このため，VaR値の日々の変化が滑らかである．しかし，重み付き経験分布によるVaR値はこの限りではない．

このアプローチでは時系列的依存関係を想定するが，モデルは立てずに重み付けにより依存関係を取り扱ったことにするのである．これは，重み付き尤度を基礎にするので，いわば，パラメトリック統計学のアプローチに，データ解析学派的アプローチを載せたようなものである．これに対してデータ解析においてデータの分解に用いるスムージングは，重み付けを高度化し，

しかし尤度を設定しないノンパラメトリックな方法と言えよう．このアプローチによる一例をあとで述べる．

3-3　資産の種類の多さと膨大なパラメター個数の問題

パラメターを含むモデルでは，膨大な個数のパラメターを推定するが，個々の推定値の推定誤差の把握，全体としての推定誤差の把握など，については明確に見えているのだろうか？　膨大な個数の資産の和の価格変動と個々の資産の価格の変動との関係についてのデータに基づく感覚，実際に日々扱うときの感覚が，数理に依る理解と共に重要ではないだろうか？　実務で扱うような大型ポートフォリオについては，著者自身はモデルと現実との対比を行い得ないので，この様に問いかけるだけにしておく．

4　いくつかの工夫

著者に依るいくつかの工夫をここで紹介しておく．

4-1　変換モデルによる分布形表現の工夫（パラメトリック統計学風）

確率分布を同定するとき，一つの特定分布形，（ここでは正規分布形とする），を中心とする確率分布族を定義し，この分布族の中でデータが示す分布を捕らえようとする方法が三浦・大上（1998）の変換モデルと重み付き変換モデルである（三浦・塚原（1995）も参照のこと）．そこでは，パラメター推定（尤度に基づく推定）に基づき，パラメトリックに仮定されている確率分布の分布形を用いて1% 点を推定する．変換モデルは，この場合は，確率分布の分布形を（対称な形から）非対称な形に変換するので，これにより非対称への崩れを吸収できるモデルである．重みをつけることで時系列的依存関係に対処するが，変換モデルにより正規分布形からの崩れ（まだ残っているとして，対称性からの崩れ）に対処している．

図6は，この計測法に依るVaR値を日々計算したプロットを示し，他の

図　6-1

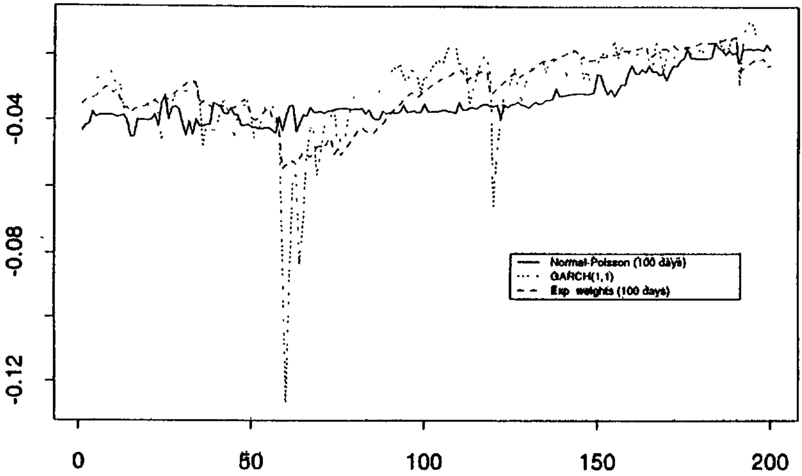


Figure 8: The 1st percentiles for TOPIX data

図　6-2

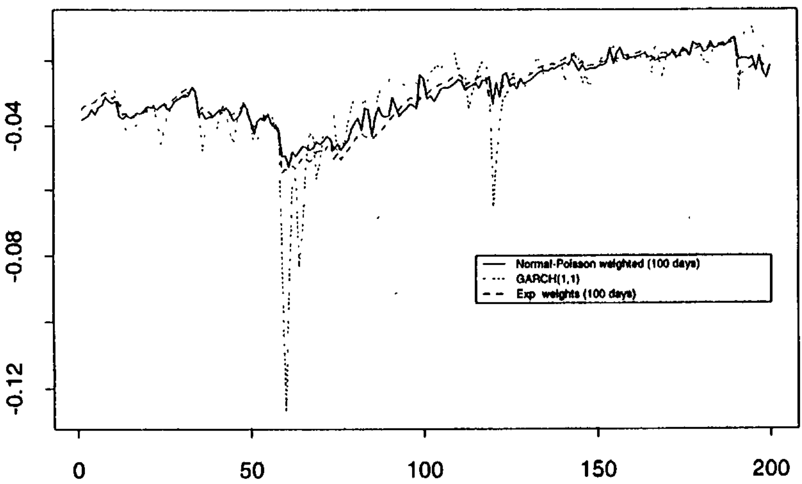


Figure 9: The 1st percentiles for TOPIX data

計測手法によるVaRプロットと比較している．変化率が上方へ跳ね上がった後，このモデルではその影響を分布の上方への広がりとして受け入れるが，下方への分布の広がりとしては，もたらさない．GARCH（1，1）にはこの下方への影響が出る．しかし，GARCHもそのモデル族内でこのような点の改良を行うかもしれないが著者はまだ確認していない．

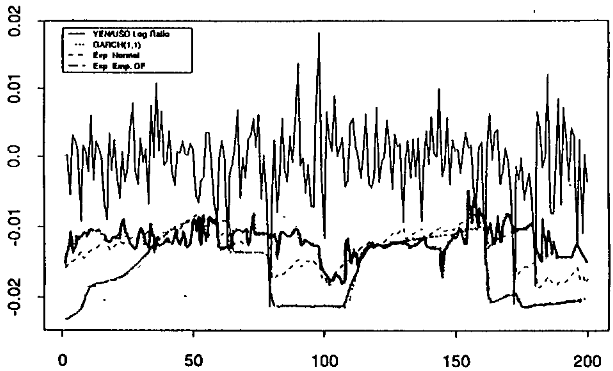
図6-1（重み均等）と図6-2（重み付き）を比べると，重みをつけたおかげで，つけないときよりも1%点の推定の時間的推移の様子が時刻に依存した状況の変化に沿っている．これが重み付きがもたらす一般的特徴であり，改良である．

4-2　スムージングによる変動分解の工夫（データ解析統計学風）

柴田・三浦（1997）がスワップレートのデータ分析において提案した分解は，金融の時系列データを，仮称であるが，マクロ・レベル（あるいは長期トレンド），ミクロ・レベル（あるいは短期トレンド），日次レベル（あるいは残差，イレギュラー）と呼ぶ，3つあるいは2つの時系列に分解する．SPLUSに入っているLOWESSを使ってスムージングを行うが，これを2回使うところが柴田氏の発案である．1回目の広いスパンによるスムージングで採り損ねたサイクルのような（サイクルでなくてもよいのだが）トレンドを2回目の狭いスパンによるスムージングで拾い上げるという考え方である．不確実変動を3つのレベルに分けて，リスク計測に役立てようという発想である（三浦・岸野（1995））．これを統計学的にGARCHモデルと比較すると，GARCHでは，価格レベル・データを変換したものである収益率の非定常な動きを正規分布の分散の中に押し込めてしまうのに対し，このアプローチでは価格あるいはレートの生のレベルの非定常部分をまずスムージングに依り取り除き，残り部分に定常性を持たせる（ようにスムージングを行う）のである．

ドクサム・三浦・山内（1998）は，この2段階スムージングに依る分解をさらに予測に利用できるように工夫し，為替レートに適用した．いくつかの

図　7



成果はあるが，しかし，VaR算出に関しては，雛形が出来た段階である．考え方としては，長期トレンドがある程度分かっているときには，それを（よい精度で）予測し不確実変動からはずす，と云うものである．

4-3　重み付き経験分布（ノンパラメトリック統計学風）

経験分布に基づく計測法をi. i. d.の崩れに対処させるため，三浦・大上（1998）は，重み付き尤度に続いて，重み付き経験分布という概念に至った．重みはデータにつけるように見えるが，実はデータが発生した時点につけている．この考えを経験分布に載せたのである[6)]．

図7では重み付き経験分布による1%点推定値の時系列グラフを示した．重みをつけたおかげで，つけないときよりも1%点の推定の時間的推移の様子が時刻に依存した状況の変化に沿っている．しかし，変化が大雑把な感じがする．これは，負の方向への大きな値による影響が強く残っているためである．重みパラメター値を小さくするとか，データ個数をここで用いた100程度より多くするとかの工夫により，もっと改良出来ると考えている．

6）この考え方（時刻にウエイトをつける）は，順位統計量などのノンパラメトリックな統計量にも適用できる．つまり，パラメトリック統計学の基本である尤

度についても，ノンパラメトリックな統計量にも適用できる，統計的手法全般に適用できることが見えた．この様な時刻に重みをつけるという考え方は，まだ漠然としたところがあって，数理統計学の世界では，研究途上ではないかと考える．

5 VaR 使用上の留意点

5-1 バックテスティングのロジックに関する注意

各時点 t での VaR（これを X_t と書こう）はその時点までのデータの関数である．翌日にかけてのポートフォリオ価格の増分という確率変数（これを Y_t と書こう）との同時分布を考え VaR を与えたときの増分の条件付き分布がどのようなものであるかを考えることがまず重要であろう．（予測理論については竹内啓氏の本を参照．）

バックテスティングのロジックは，事象 $\{Y_t < X_t\}$ がどの程度の頻度で生じるかをカウントして VaR 計測システムの良否を判定しようとしている．U_t をこの事象 $\{Y_t < X_t\}$ の定義関数とすると，$U_t, t=1, 2, \cdots, n$ が独立なベルヌーイ試行であるとして判定条件（つまり，発生確率が 0.01 であるという仮説の検定）を提案している．独立性について吟味も正確に行われないといけないし，またよい計測システムを作っても U_t, の期待値が 0.01 であることはなかなか困難ではないだろうか．

ここでは，U_t, の期待値について単純例で考えてみよう．VaR と増分の両者が独立であるとしても，さらにこの対，あるいは U_t の列が独立であるとしても，VaR が増分の 1% 点を推定していると考えるとき，推定誤差を考慮に入れなければならない．翌日に発生するポートフォリオ価格の増分の実現値が当日の VaR 値を超えるか否か，を見てカウントする方法と 2 項分布による通常の説明，つまりバックテスティングのロジックは，VaR 値が推定誤差なく 1% 点を推定しているかのごとく扱っている．推定誤差を考慮に入れるとこの事象の発生確率は 1% ではなく変わり得る．推定誤差の方向によって 1% よりも小さくなることも大きくなることもある．これを表す計算例を以下に示しておく．

実現増分がVaR値を下回る確率について.

Y：資産価格増分．$Y \sim G(\cdot)$ とする．

X：予測（VaR）．$X \sim F(\cdot)$．$E[X]=G^{-1}(0.01)$ と仮定する．（不偏性）

このように設定しておくと，Y が X を下回る確率は

$$P\{Y<X\} = \int P\{Y<x|X=x\}f(x)\,dx$$

$$= \int\left\{\int_{-\infty}^{x} g(y|x)\,dy\right\}f(x)\,dx$$

と書ける．

ここで仮に，X と Y が独立であるとしよう．

さらに，$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ と仮定しよう．

このとき，$E[X] = G^{-1}(0.01) = \mu_Y - 2.33\sigma_Y$ と書ける．

さらに $P\{Y<X\} = P\left\{\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y} < \frac{X-\mu_Y}{\sigma_Y}\right\}$，　$\mu_X = \mu_Y - 2.33\sigma_Y$ を使って

$$= P\left\{\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y} < \frac{X-\mu_X-2.33\sigma_Y}{\sigma_Y}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y} < \frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\cdot\frac{\sigma_X}{\sigma_Y} - 2.33\right\}$$

と表わされる．

$\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\cdot\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$ がゼロに近ければ $P\{Y<X\}$ は0.01（1%）に近い．そうでないときには，バックテスティングのロジックの基礎があやしくなる．つまり，

㊟ X の精度が良くない（σ_Y に比べて σ_X が非常に小さい，とは言えない）ならば，$P\{Y<X\}$ は，0.01から遠い．

㊟ $X=x$ が与えられたとき，$x-\mu_X$ の大きさに依り，$P\{Y<X|X=x\}$ は，0.01より大きくなる．

推定誤差を考慮に入れるとバックテスティングの2項分布を用いたロジックが成り立ちにくいという事情は，上の正規分布を想定する計測方法だけでなく，経験分布によるアプローチについても同様である．G（真の分布関数）と Gn（分布関数の推定）との間に推定誤差があることを踏まえれば事

情はまったく同じである.

Y_t と X_t が独立でなくても, t 時点の情報を与えた上での条件付き独立であっても事情は似ている. X_t を構成するためのデータすべての同時確率を考えて, その上での期待値が 0.01 である, つまり, $E_X[P\{Y<X\}]=0.01$ という風な考えで提案されているのだろうか. 通常の議論の中では, ロジックの基礎が示されていないことが気にかかる.

5-2 VaR が想定する暗黙の前提と経営・運用戦略

VaR は, 現在のポートフォリオをそのまま 1 日間持っているとする場合の 1 日後の価格増分の確率分布の 1% 点を計測する. これは言い換えると, 例えばストップ・ロスのような, 途中でトレードを止めて損失をある値以下にはしない, と云うような戦略を取る場合 (この場合には前もってポートフォリオ価格の増分の下限が決まる) は想定していない. VaR を使って投資・トレーディング戦略の参考にするときには, この点に注意しないといけない.

5-3 VaR とポートフォリオ・リスクの方向性.

各金融機関が VaR の数値をしっかり見てリスクを管理しているとしよう. しかし, それは個別金融機関レベルの話である. もし他の金融機関と相関が高いポートフォリオを持っているとすると, 風向きが悪いときには, これらの金融機関は同じ方向へ悪い方向へ動く. もし従来のように日本の金融機関が横並び風の意思決定に依るよく似た変動構造のポートフォリオをもつとすれば, 風向きが悪いときには, すべて同時に悪い方向へ動く. もし目いっぱいのリスクをすべての金融機関が採っていたとすれば, すべて同時に VaR 値にまで行ってしまう. これは大変だが, どのくらいの可能性で起きるのだろうか?

VaR 計測システムを通してポートフォリオ・リスクの方向性を見ることは出来る. ポートフォリオ価格の増分をリスク・ファクターの一次式として

表すときの係数ベクトルを見ればよい．長さはポートフォリオの規模の大きさを表すが，それは別としてベクトルの方向がそこで見える．2つ以上のの金融機関について，このベクトルの方向が同じであれば，リスク・ファクターの動きに同じ方向に反応する．この係数ベクトルは金融機関のポートフォリオ内容を正確に示すので，外部から知ることは出来ないだろう．したがって，外部から金融機関全体のリスクの方向性を見ることは難しい．出来ることは，自然な金融・投資・トレーディング活動が，この係数ベクトルの全体をどのように構成するのか，それはどのような線型空間なのか，について，想像をたくましくして，例えばシナリオなどに基づいて，確認することだろう．

謝辞：平成7年度と8年度の2年間にわたり，財団法人国際金融情報センター（JCIF）における「金融派生商品取引等のリスク管理手法に関する研究会」に参加し，報告した事柄が本稿に含まれている．ここには名前を挙げないが，研究会の多くの出席者からのコメント，および出席者の一人である武蔵大学経済学部安達智彦助教授との意見交換が，本稿作成の上で参考になった．この方々および，このような機会を与えていただいた国際金融情報センターにここに記して感謝します．

引用文献

（1）　三浦良造（1991）"株価指数データと混合正規モデル"一橋論叢第105巻第5号，31-56ページ．

（2）　三浦・岸野（1995）"Pricing of Bonds and their Derivatives with Multi-Factor Stochastic Interest Rates: A Note" in Nonlinear and Convex Analysis in Economic Theory. Edited by T. Maruyama and W. Takahashi. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. 419. pp. 215-229. Springer.

（3）　柴田・三浦（1997）"Decomposition of Japanese Yen Interest Rate Data Through Local Regression." Financial Engineering and the Japanese Markets. Vol. 4. No. 2. pp. 125-146. 1997.

（4）　三浦・大上（1998）"A Measurement of Heaviness of Tails for the Distribution of Log-Ratio of Financial Variables I.: Transformation Models and

Exponentially Weighted Likelihood." Working Paper Series. No. 28. (revised) Faculty of Commerce. Hototsubashi University.

(5) ドクサム・三浦・山内 (1998). "On Financial Time Series Decompositions with Applications to Volatility." Discussion Paper Series, No. 98-E-6 Institute for Monetary and Economic Studies (IMES), Bank of Japan.

参考文献

竹内啓　著「数理統計学の方法的基礎」東洋経済新報社. 1973 年.

竹内啓　著「統計的予測論」培風館. 1975 年.

吉村幸雄 "推理統計モデルは邦銀のリスク管理にどれだけ役立つか." 週間金融財政事情. 1996 年 5 月 20 日号.

アラン・グリースのシカゴ連邦準備銀行主催のコンファランスにおける講演録. "銀行監督当局は何をなすべきか", "複雑・厳格なルール, 規制システムから市場インセンティブの重視へ". 週間金融財政事情. 1996 年 8 月 19 日号, 1997 年 8 月 4 日号.

J. P. Morgan (1995). Technical Document. 3rd. edition.

Miura, R and Tsukahara, H. (1995). "One Sample Estimation for Generalized Lehmann's Alternative Models." Statistica Sinica. Vol. 3. No. 1. pp. 83-101.

(一橋大学教授)