ある種の格子から定義される頂点作用素代数の最高ウエイトベクトル

山　田　裕　理

1　序

Dong, Mason, Zhu [DMZ], Miyamoto [M1], [M2] の先駆的研究により，頂点作用素代数の共形元の重要性が明らかになってきた．また，最近 Dong, Li, Mason, Norton [DLMN] は，階数 l の A 型ルート格子を $\sqrt{2}$ 倍して得られる格子 L から定義される頂点作用素代数 V_L について，V_L のヴィラソロ元を $l+1$ 個の共形元の和に分解できることを見出した．この結果は，V_L の構造を詳しく研究する手段を与える．実際，Kitazume, Miyamoto および筆者は，これをもとにして $l=2$ の場合に V_L の中に $L\left(\frac{4}{5},0\right)\oplus L\left(\frac{4}{5},3\right)$ の形の部分頂点作用素代数が含まれることを証明した（[KMY]）.

一般に，V_L の共形元の最高ウエイトベクトルを決定することは，V_L の性質を知る上で，大切なことである．本論説では，$l=2$ および 3 の場合に，V_L のウエイト 2 以下の最高ウエイトベクトルが計算できることを示す.

2　格子 L から定義される頂点作用素代数

任意の positive definite even lattice L に対して，頂点作用素代数 V_L が定義される（[FLM]）. 頂点作用素代数の一般論については，このほかに Li [L] も参照されたい．本論説では，特定の格子 L について考えるが，[FLM] にしたがって，一般の L について V_L の定義をまとめておく．後で必要になるのは L が doubly even lattice の場合なので，最初から L は doubly even と仮定しておく．この仮定のもとでは，[FLM, Section 7.1] の

twisted group ring $C\{L\}$ において，cocycle が自明になり，これは通常の group ring $C[L]$ に一致する．このため，符号の扱いが簡単になる．

L を格子，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を L 上の positive definite symmetric bilinear form で，doubly even すなわち任意の L の元 α に対して $\langle\alpha,\alpha\rangle\in 4\boldsymbol{Z}$ が成立するものとする．加法群 L を乗法群とみて，その group ring $C[L]$ を定義する．すなわち，L の各元 α に対して記号 e^{α} を用意し，$e^{\alpha};\alpha\in L$ を基底とする $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間で，積が $e^{\alpha}e^{\beta}=e^{\alpha+\beta}$ で与えられるものが $C[L]$ である．

格子 L の係数を $\boldsymbol{C}$ に拡大したもの $\mathfrak{h}=\boldsymbol{C}\otimes_{\boldsymbol{Z}}L$ を，可換リー代数とみて，そのアフィンリー代数を

$$\tilde{\mathfrak{h}} = \oplus_{n\in\boldsymbol{Z}}(\mathfrak{h}\otimes t^n)\oplus\boldsymbol{C}c\oplus\boldsymbol{C}d$$

とおく．さらにその Heisenberg 部分代数を

$$\hat{\mathfrak{h}}_{\boldsymbol{Z}} = \oplus_{0\neq n\in\boldsymbol{Z}}(\mathfrak{h}\otimes t^n)\oplus\boldsymbol{C}c$$

とおく．この Heisenberg 部分代数は，三角分解 (triangular decomposition)

$$\hat{\mathfrak{h}}_{\boldsymbol{Z}} = \hat{\mathfrak{h}}_{\boldsymbol{Z}}^{-}\oplus\boldsymbol{C}c\oplus\hat{\mathfrak{h}}_{\boldsymbol{Z}}^{+}$$

をもつ．ここで，$\hat{\mathfrak{h}}_{\boldsymbol{Z}}^{-}=\oplus_{n<0}(\mathfrak{h}\otimes t^n)$，$\hat{\mathfrak{h}}_{\boldsymbol{Z}}^{+}=\oplus_{n>0}(\mathfrak{h}\otimes t^n)$ である．

$\boldsymbol{C}$ 自身を，次のように 1 次元の $\boldsymbol{C}c\oplus\hat{\mathfrak{h}}_{\boldsymbol{Z}}^{+}$-加群とみる．すなわち，$\alpha\in L$ と $n>0$ に対し $(\alpha\otimes t^n)\cdot 1=0$，また $c\cdot 1=1$．このように $\boldsymbol{C}$ を $\boldsymbol{C}c\oplus\hat{\mathfrak{h}}_{\boldsymbol{Z}}^{+}$-加群とみて，それの $\hat{\mathfrak{h}}_{\boldsymbol{Z}}$-加群への誘導加群を $M(1)$ とおく．$M(1)$ は，ベクトル空間としては $\hat{\mathfrak{h}}_{\boldsymbol{Z}}^{-}$ 上の対称代数 (symmetric algebra) $S(\hat{\mathfrak{h}}_{\boldsymbol{Z}}^{-})$ と自然に同型になるので，この両者を同一視することにする．$\alpha\otimes t^n$ の $S(\hat{\mathfrak{h}}_{\boldsymbol{Z}}^{-})$ への作用が引き起こす $S(\hat{\mathfrak{h}}_{\boldsymbol{Z}}^{-})$ の自己準同型を $\alpha(n)$ で表すことにすると，これらは

$$[\alpha(m),\beta(n)] = \langle\alpha,\beta\rangle m\delta_{m+n,0} \tag{2.1}$$

という交換関係をみたす．c は定義により 1 として $S(\hat{\mathfrak{h}}_{\boldsymbol{Z}}^{-})$ に作用する．$\hat{\mathfrak{h}}_{\boldsymbol{Z}}^{-}$ の元 $\alpha\otimes t^n=\alpha(n)\cdot 1$ を簡単に $\alpha(n)$ とも書くと，L の基底が $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$ なら，$S(\hat{\mathfrak{h}}_{\boldsymbol{Z}}^{-})$ の任意の元は，$\alpha_i(-n)\,;i=1,2,\cdots,l$，$n=1,2,\cdots$ の多項式として一意的に表せる．

ベクトル空間 $S(\hat{\mathfrak{h}}_{\boldsymbol{Z}}^{-})$ と $C[L]$ のテンソル積

$$V_L = S(\hat{\mathfrak{h}}_{\boldsymbol{Z}}^-)\otimes \boldsymbol{C}[L]$$

をフォック空間（Fock space）と呼ぶ．フォック空間の元 $\mathbf{1}=1\otimes 1$ を真空（vacuum）と呼ぶ．フォック空間は，次のように定義されるウエイト wt により，次数つき空間になる．

$$\mathrm{wt}\,\alpha(-n) = n, \qquad \mathrm{wt}\,e^{\alpha} = \langle \alpha, \alpha\rangle/2$$

L は positive definite doubly even と仮定しているから，ウエイトは正または0の整数で，

$$(V_L)_{(n)} = \{v\in V_L \mid \mathrm{wt}\, v = n\}$$

とおくと，

$$V_L = \oplus_{n\in \boldsymbol{Z}_{\geq 0}}(V_L)_{(n)}$$

となる．$(V_L)_{(0)}=\boldsymbol{C}\mathbf{1}$ は1次元部分空間である．

$c, \alpha\otimes t^n, e^{\alpha}, z^{\alpha}$ のフォック空間 V_L への作用を，次のように定義する．

$$\begin{aligned}
c: u\otimes e^{\beta} &\longmapsto u\otimes e^{\beta},\\
\alpha\otimes t^n = \alpha(n): u\otimes e^{\beta} &\longmapsto (\alpha(n)u)\otimes e^{\beta} \quad \text{for} \quad n\neq 0,\\
\alpha\otimes t^0 = \alpha(0): u\otimes e^{\beta} &\longmapsto \langle \alpha,\beta\rangle u\otimes e^{\beta},\\
e^{\alpha}: u\otimes e^{\beta} &\longmapsto u\otimes e^{\alpha+\beta},\\
z^{\alpha}: u\otimes e^{\beta} &\longmapsto z^{\langle\alpha,\beta\rangle} u\otimes e^{\beta}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

ただし，$\alpha,\beta\in L$，$n\in\boldsymbol{Z}$，$u\in S(\hat{\mathfrak{h}}_{\boldsymbol{Z}}^-)$ である．

V_L の各元 v に対し，頂点作用素

$$Y(v,z) = \sum_{n\in\boldsymbol{Z}} v_n z^{-n-1}\in(\mathrm{End}\, V_L)[[z,z^{-1}]]$$

を，次のように定義する．まず，$\alpha\in L$ に対して

$$Y(e^{\alpha},z) = \exp\Big(\sum_{n\in\boldsymbol{Z}_{>0}}\frac{\alpha(-n)}{n}z^n\Big)\exp\Big(\sum_{n\in\boldsymbol{Z}_{>0}}\frac{-\alpha(n)}{n}z^{-n}\Big)e^{\alpha}z^{\alpha} \tag{2.3}$$

として $Y(e^{\alpha},z)\in(\mathrm{End}\, V_L)[[z,z^{-1}]]$ を定義する．

$\alpha\in L$ に対し

$$\alpha(z) = \sum_{n\in\boldsymbol{Z}}\alpha(n)z^{-n-1} = \alpha(z)^- + \alpha(z)^+$$

とおく．ここで

$$\alpha(z)^{-} = \sum_{n<0}\alpha(n)z^{-n-1}, \qquad \alpha(z)^{+} = \sum_{n\geq 0}\alpha(n)z^{-n-1}$$

である．: : で正規積を表す．すなわち，任意の $X(z)\in(\mathrm{End}\ V_L)\{z\}$ について

$$:\alpha(z)X(z): = \alpha(z)^{-}X(z) + X(z)\alpha(z)^{+}$$

以上の準備のもとに，V_L の任意の元

$$v = \alpha^1(-n_1)\cdots\alpha^k(-n_k)\otimes e^{\alpha}$$

に対し

$$Y(v,z) = :\left(\frac{1}{(n_1-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n_1-1}\alpha^1(z)\right)\cdots \tag{2.4}$$

$$\cdots\left(\frac{1}{(n_k-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n_k-1}\alpha^k(z)\right)Y(e^{\alpha},z):.$$

として，頂点作用素 $Y(v,z)$ が定義される．

$Y(v,z)\in(\mathrm{End}\ V_L)[[z,z^{-1}]]$ を $Y(v,z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}v_n z^{-n-1}$ と展開したときの z^{-n-1} の係数 $v_n\in\mathrm{End}\ V_L$ を，成分作用素（component operator）と呼ぶ．$v\in(V_L)_{(m)}$ なら，

$$v_n(V_L)_{(k)} \subset (V_L)_{(k+m-n-1)}$$

となることに注意する．

L の任意の元を -1 倍する L から L 自身への写像

$$\theta: L \longrightarrow L; \qquad \alpha \longmapsto -\alpha$$

は，格子 L の位数 2 の自己同型であるが，これは自然に頂点作用素代数 V_L の位数 2 の自己同型を引き起こす．この V_L の自己同型を，同じ記号 θ で表すことにする．θ は各 $(V_L)_{(n)}$ を不変にする．この部分空間における θ の固有値 1 および -1 に属する固有空間を，それぞれ $(V_L)^{+}_{(n)}$ および $(V_L)^{-}_{(n)}$ で表す．また，V_L における θ の固有値 1 および -1 に属する固有空間を，それぞれ $(V_L)^{+}$ および $(V_L)^{-}$ とおくと，V_L はこれら 2 つの固有空間の直和である．

3　共形元

この節では，格子 L として A 型ルート格子を $\sqrt{2}$ 倍したものを考える．階数 l の A 型ルート系，すなわち A_l 型ルート系を Φ_l，そのうち正のルート全体を Φ_l^+，また，基本ルート全体を Π_l で表すと，$\Phi_l=\{\pm\alpha\,|\,\alpha\in\Phi_l^+\}$ で

$$\Pi_l=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\},$$

$$\Phi_l^+=\{\alpha_1,\alpha_{1,2},\cdots,\alpha_{1,2,\cdots,l},\alpha_2,\alpha_{2,3},\cdots,\alpha_{2,3,\cdots,l},\cdots,\alpha_{l-1},\alpha_{l-1,l},\alpha_l\}$$

である．ただし，ここでは簡単のため，$\alpha_{1,2}=\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_{1,2,3}=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ などの表し方をしている．A_l 型ルート系の Coxeter 数は $l+1$ で，正のルートは全部で $l(l+1)/2$ 個ある．また，内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は

$$\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=\begin{cases}2\,;i=j\text{ のとき}\\-1\,;|i-j|=1\text{ のとき}\\0\,;|i-j|\geq 2\text{ のとき}\end{cases}\tag{3.1}$$

で与えられる．

頂点作用素代数を定義するための格子 L としては，通常の A_l 型ルート格子ではなく，それを $\sqrt{2}$ 倍したものをとる．したがって

$$L=\boldsymbol{Z}\sqrt{2}\alpha_1+\boldsymbol{Z}\sqrt{2}\alpha_2+\cdots+\boldsymbol{Z}\sqrt{2}\alpha_l$$

である．この L の任意の元 α に対し，上の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ について $\langle\alpha,\alpha\rangle\in 4\boldsymbol{Z}$ が成立し，L は doubly even である．

後で使うために，$\alpha\in\Phi_l^+$ に対し

$$v_\alpha=\alpha(-1)^2,\ x_\alpha=e^{\sqrt{2}\alpha}+e^{-\sqrt{2}\alpha},\ y_\alpha=e^{\sqrt{2}\alpha}-e^{-\sqrt{2}\alpha}\tag{3.2}$$

という V_L のウエイト2の元を表す記号を用意しておく．ただし，ここでは $S(\hat{\mathfrak{h}}_{\boldsymbol{Z}}^-)$ の元 $\alpha(-1)^2$ を V_L の元 $\alpha(-1)^2\otimes 1$ と同一視して，正確には $\alpha(-1)^2\otimes 1$ と書くべきところを簡単に $\alpha(-1)^2$ と書いている．$e^{\pm\sqrt{2}\alpha}$ についても同様に，正確には $1\otimes e^{\pm\sqrt{2}\alpha}$ と書くべきところを，両者を同一視して，$e^{\pm\sqrt{2}\alpha}$ を V_L の元としてもみている．記述を簡単にするため，このような同一視は今後も使う．

頂点作用素代数 V_L のウエイト2の元 v について，その成分作用素 v_{n+1} を

$\tilde{L}(n)$ と表すとき，$\tilde{L}(n)$ たちがヴィラソロ関係式

$$[\tilde{L}(m), \tilde{L}(n)] = (m-n)\tilde{L}(m+n) + \frac{m^3-m}{12} c\delta_{m+n,0}$$

をみたすならば，v は中心電荷 c の共形元（conformal vector）であるという．このとき，$\tilde{L}(n)\,; n \in \boldsymbol{Z}$ および1で張られる End V_L の部分空間 Vir は，中心電荷 c のヴィラソロ代数になる．このヴィラソロ代数の加群として，真空1から生成される V_L の部分 Vir-加群 $\mathrm{Vir}(v)$ は，頂点作用素代数 V_L の部分代数になり，中心電荷 c のヴィラソロ頂点作用素代数 $L(c,0)$ と同型になる（[FZ], [L], [M1]).

$$\mathrm{Vir}(v) = U(Vir)\mathbf{1} \cong L(c,0)$$

ここで，$U(Vir)$ はヴィラソロ代数 Vir の universal enveloping algebra を表す.

[DLMN] によれば，頂点作用素代数 V_L のヴィラソロ元

$$\omega = \frac{1}{2(l+1)} \sum_{\alpha \in \Phi_l^+} v_\alpha$$

は，互いに直交する $l+1$ 個の共形元 $\omega^1, \omega^2, \cdots, \omega^l, \tilde{\omega}^l$ の和として表せる.

$$\omega = \omega^1 + \omega^2 + \cdots + \omega^l + \tilde{\omega}^l$$

ここで,

$$\omega^i \text{ の中心電荷 } c(\omega^i) = 1 - \frac{6}{(i+2)(i+3)}; \quad 1 \leq i \leq l$$

$$\tilde{\omega}^l \text{ の中心電荷 } c(\tilde{\omega}^l) = \frac{2l}{l+3}$$

$$\omega \text{ の中心電荷 } c(\omega) = c(\omega^1) + \cdots + c(\omega^l) + c(\tilde{\omega}^l) = l$$

実際

$$s^i = \frac{1}{2i+6} \sum_{\alpha \in \Phi_i^+} (v_\alpha - 2x_\alpha)$$

とおくと，$\omega^1, \omega^2, \cdots, \omega^l, \tilde{\omega}^l$ は次のように定義される.

$$\omega^1 = s^1$$

$$\omega^i = s^i - s^{i-1}; \quad 2 \leq i \leq l$$

$$\tilde{\omega}^l = \omega - s^l$$

定義から明らかなように，第2節の最後に述べた V_L の自己同型 θ は s^i，ω を不変にすること，したがって $\omega^1, \omega^2, \cdots, \omega^l, \tilde{\omega}^l$ も θ により不変であることに注意する．

各共形元 ω^i は，上記のように中心電荷 $c(\omega^i)$ のヴィラソロ頂点作用素代数と同型な V_L の部分代数 $\mathrm{Vir}(\omega^i) \cong L(c(\omega^i), 0)$ を生成するが，ω^i たちが直交していることから，$\omega^1, \omega^2, \cdots, \omega^l, \tilde{\omega}^l$ の全体が生成する部分代数 T は，これらのテンソル積になる．

$$\begin{aligned} T &= \mathrm{Vir}(\omega^1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Vir}(\omega^l) \otimes \mathrm{Vir}(\tilde{\omega}^l) \\ &\cong L(c(\omega^1), 0) \otimes \cdots \otimes L(c(\omega^l), 0) \otimes L(c(\tilde{\omega}^l), 0) \end{aligned}$$

T は V_L の部分代数だから，V_L 自身を T-加群とみることができる．特に，V_L を既約 T-部分加群の直和に分解することができれば，V_L を詳しく調べる手段が得られることになる．そこで，本論説では V_L に含まれる T の最高ウエイトベクトルに注目する．

v が T のウエイト m の最高ウエイトベクトルであるとは，$v \in (V_L)_{(m)}$ であって，

（1）　v は $\omega_1^1, \omega_1^2, \cdots, \omega_1^l, \tilde{\omega}_1^l$ の同時固有ベクトル

（2）　$\omega_n^i v = 0,\quad 1 \leq i \leq l,\quad \tilde{\omega}_n^l v = 0\quad \text{for all } n \geq 2$

の2つの条件をみたすものである．

$\omega_1^i v = h_i v$，すなわち v が ω_1^i の固有値 h_i の固有ベクトルのとき，この v を

$$v_{(h_1, h_2, \cdots, h_{l+1})}$$

と書くことにする．$h_1 + h_2 + \cdots + h_{l+1} = m$ に注意する．このような T の最高ウエイトベクトルが存在すれば，それにより生成される T-部分加群は

$$L(c(\omega^1), h_1) \otimes \cdots \otimes L(c(\omega^l), h_l) \otimes L(c(\tilde{\omega}^l), h_{l+1})$$

と同型になる．

以下，第4節と第5節で必要な計算の準備をしておく．

まず，$\alpha, \beta \in L$ について，$Y(\alpha(-1)\beta(-1), z)$ の定義により

$$Y(\alpha(-1)\beta(-1), z) = {:}\alpha(z)\beta(z){:}$$

$$=\beta(z)^{-}\alpha(z)+\alpha(z)\beta(z)^{+}$$
$$=\sum_{l<0}\sum_{k\in Z}\beta(l)\alpha(k)z^{-k-l-2}+\sum_{k\in Z}\sum_{l\geq 0}\alpha(k)\beta(l)z^{-k-l-2}$$
$$=\sum_{n\in Z}\{\sum_{l<0}\beta(l)\alpha(n-l-1)+\sum_{l\geq 0}\alpha(n-l-1)\beta(l)\}z^{-n-1}$$

となる．したがって，$Y(\alpha(-1)\beta(-1),z)$ の z^{-n-1} の係数 $(\alpha(-1)\beta(-1))_n$ は，

$$(\alpha(-1)\beta(-1))_n=\sum_{l<0}\beta(l)\alpha(n-l-1)+\sum_{l\geq 0}\alpha(n-l-1)\beta(l)$$

である．よって (2.1) と (2.2) より，$\gamma\in L$ に対し

$$(\alpha(-1)^2)_1\gamma(-1)=2\langle\alpha,\gamma\rangle\alpha(-1)$$
$$(\alpha(-1)^2)_n\gamma(-1)=0\quad\text{for}\quad n\geq 2$$

および

$$(\alpha(-1)^2)_1\gamma(-2)=4\langle\alpha,\gamma\rangle\alpha(-2)$$
$$(\alpha(-1)^2)_2\gamma(-2)=4\langle\alpha,\gamma\rangle\alpha(-1)$$
$$(\alpha(-1)^2)_n\gamma(-2)=0\quad\text{for}\quad n\geq 3$$

がわかる．同様に

$$(\alpha(-1)^2)_1\gamma(-1)^2=4\langle\alpha,\gamma\rangle\alpha(-1)\gamma(-1)$$
$$(\alpha(-1)^2)_2\gamma(-1)^2=0$$
$$(\alpha(-1)^2)_3\gamma(-1)^2=2\langle\alpha,\gamma\rangle^2\mathbf{1}$$
$$(\alpha(-1)^2)_n\gamma(-1)^2=0\quad\text{for}\quad n\geq 4$$

もわかる．さらに

$$(\alpha(-1)^2)_1e^{\sqrt{2}\gamma}=2\langle\alpha,\gamma\rangle^2e^{\sqrt{2}\gamma}$$
$$(\alpha(-1)^2)_ne^{\sqrt{2}\gamma}=0\quad\text{for}\quad n\geq 2$$

が成立する．

次に，$\gamma\in L$ に対し $Y(e^{\sqrt{2}\gamma},z)$ の $z^{-2},z^{-3},\cdots$ の係数 $(e^{\sqrt{2}\gamma})_n\in\mathrm{End}\,V_L$，$n=1,2,\cdots$ の $\alpha(-1),\alpha(-2)$ および $\alpha(-1)^2$ への作用を，(2.1) と (2.2) を使って計算する．まず，

$$(e^{\sqrt{2}\gamma})_n\alpha(-1)=0\quad\text{for}\quad n\geq 1$$

が容易にわかる．同様に，

$$(e^{\sqrt{2}\gamma})_1\alpha(-2) = -\sqrt{2}\langle\alpha,\gamma\rangle e^{\sqrt{2}\gamma}$$
$$(e^{\sqrt{2}\gamma})_n\alpha(-2) = 0 \quad \text{for} \quad n \geq 2$$

がわかる．さらに，

$$(e^{\sqrt{2}\gamma})_1\alpha(-1)^2 = 2\langle\alpha,\gamma\rangle^2 e^{\sqrt{2}\gamma}$$
$$(e^{\sqrt{2}\gamma})_n\alpha(-1)^2 = 0 \quad \text{for} \quad n \geq 2$$

もわかる．

$Y(e^{\sqrt{2}\alpha},z)e^{\sqrt{2}\beta}$ については，

$$e^{\sqrt{2}\alpha}z^{\sqrt{2}\alpha}e^{\sqrt{2}\beta} = e^{\sqrt{2}\alpha+\sqrt{2}\beta}z^{2\langle\alpha,\beta\rangle}$$

に注意する．$\alpha,\beta\in\Phi_l^+$ に対して，$\langle\alpha,\beta\rangle$ の値によって3つの場合に分かれる．

（i）$\langle\alpha,\beta\rangle = 0, 1,$ または2のとき：

$$(e^{\sqrt{2}\alpha})_n e^{\sqrt{2}\beta} = 0 \quad \text{for} \quad n \geq 1$$

（ii）$\langle\alpha,\beta\rangle=-1$ のとき：$\alpha+\beta\in\Phi_l$ で

$$(e^{\sqrt{2}\alpha})_1 e^{\sqrt{2}\beta} = e^{\sqrt{2}\alpha+\sqrt{2}\beta}$$
$$(e^{\sqrt{2}\alpha})_n e^{\sqrt{2}\beta} = 0 \quad \text{for} \quad n \geq 2$$

（iii）$\langle\alpha,\beta\rangle=-2$ のとき：:$\beta=-\alpha$ で

$$(e^{\sqrt{2}\alpha})_1 e^{-\sqrt{2}\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha(-2)+\alpha(-1)^2$$
$$(e^{\sqrt{2}\alpha})_2 e^{-\sqrt{2}\alpha} = \sqrt{2}\alpha(-1)$$
$$(e^{\sqrt{2}\alpha})_3 e^{-\sqrt{2}\alpha} = 1$$
$$(e^{\sqrt{2}\alpha})_n e^{-\sqrt{2}\alpha} = 0 \quad \text{for} \quad n \geq 4$$

4　$L=\sqrt{2}(A_2\text{-lattice})$ の場合

この節では，前節の記号で階数 $l=2$ の場合について，V_L のウエイト1および2の最高ウエイトベクトルを決定する．

$l=2$ だから，基本ルートおよび正のルートの集合は，それぞれ

$$\Pi_2 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$$
$$\Phi_2^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{1,2}\}$$

である．また

$$s^1 = \frac{1}{8}\alpha_1(-1)^2 - \frac{1}{4}x_{\alpha 1}$$

$$s^2 = \frac{1}{10}\{\alpha_1(-1)^2+\alpha_2(-1)^2+\alpha_{1,2}(-1)^2\} - \frac{1}{5}\{x_{\alpha 1}+x_{\alpha 2}+x_{\alpha 1,2}\}$$

$$\omega = \frac{1}{6}\{\alpha_1(-1)^2+\alpha_2(-1)^2+\alpha_{1,2}(-1)^2\}$$

である．

$(V_L)_{(0)}$ の基底は $\{1\}$, $(V_L)_{(1)}$ の基底は

$$\{\alpha_1(-1), \alpha_2(-1)\}, \tag{4.1}$$

$(V_L)^+_{(2)}$ の基底は

$$\{v_{\alpha 1}, v_{\alpha 2}, v_{\alpha 1,2}, x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 1,2}\}, \tag{4.2}$$

また，$(V_L)^-_{(2)}$ の基底は

$$\{\alpha_1(-2), \alpha_2(-2), y_{\alpha 1}, y_{\alpha 2}, y_{\alpha 1,2}\}, \tag{4.3}$$

である．ここで (3.2) の記号を使った．

1 は T の最高ウエイトベクトルで，**1** から生成される T-部分加群は，T 自身である．

$(V_L)_{(1)}$ に含まれる T の最高ウエイトベクトルを決定しよう．$Y(s^1,z)$ および $Y(s^2,z)$ の z^{-2} の係数 s^1_1, s^2_1 の $(V_L)_{(1)}$ への作用は，(2.1)，(2.2)，(3.1) より，次のように計算できる．

$$s^1_1\alpha_1(-1) = \frac{1}{2}\alpha_1(-1)$$

$$s^1_1\alpha_2(-1) = -\frac{1}{4}\alpha_1(-1)$$

$$s^2_1\alpha_1(-1) = \frac{3}{5}\alpha_1(-1)$$

$$s^2_1\alpha_2(-1) = \frac{3}{5}\alpha_2(-1)$$

よって，(4.1) の $(V_L)_{(1)}$ の基底に関する s^1_1, s^2_1 の行列はそれぞれ

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

となる．これから，$(V_L)_{(1)}$ の中に s_1^1, s_1^2 の同時固有ベクトルが，定数倍を除いて

$$\alpha_1(-1), \qquad \alpha_1(-1)+2\alpha_2(-1)$$

のちょうど2個あることがわかる．

任意の $n\geq 2$ に対して，s_n^1, s_n^2, ω_n はすべて $(V_L)_{(1)}$ に0として作用するから，この2つのベクトルは T の最高ウエイトベクトルである．以上により次の定理が得られた．

定理 4.1　$(V_L)_{(1)}$ に含まれる T の最高ウエイトベクトルは，定数倍を除いて

$$v_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{10},\frac{2}{5}\right)} = \alpha_1(-1)$$
$$v_{\left(0,\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)} = \alpha_1(-1)+2\alpha_2(-1)$$

の2個存在する．

次に，$(V_L)_{(2)}$ に含まれる T の最高ウエイトベクトルを調べる．

(4.2) の $(V_L)_{(2)}^+$ の基底に関する s_1^1 の行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

同じく s_1^2 の行列は

$$
\begin{pmatrix}
\frac{6}{5} & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\
0 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & 0 \\
0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\
-\frac{8}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\
-\frac{2}{5} & -\frac{8}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \\
-\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{8}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{6}{5}
\end{pmatrix}
$$

であることが，計算によりわかる．

s^1, s^2, ω はいずれも $(V_L)^+_{(2)}$ の元である．したがって，s^1_2, s^2_2, ω_2 はすべて $(V_L)^+_{(2)}$ を $(V_L)^+_{(1)}$ に写す．しかし，V_L の自己同型 θ は $(V_L)_{(1)}$ の基底の元 $\alpha_1(-1)$，$\alpha_2(-1)$ をともに -1 倍するから，$(V_L)^+_{(1)}=0$ である．よって，s^1_2, s^2_2, ω_2 はどれも $(V_L)^+_{(2)}$ に 0 として作用することがわかる．

s^1_3, s^2_3, ω_3 は $(V_L)^+_{(2)}$ の元を $(V_L)_{(0)}=\boldsymbol{C}\mathbf{1}$ の元に写す．(4.2) の基底のそれぞれ s^1_3, s^2_3, ω_3 による行先は，$\mathbf{1}$ の定数倍であるが，その定数は簡単な計算で次のようであることがわかる．

	$v_{\alpha 1}$	$v_{\alpha 2}$	$v_{\alpha 1,2}$	$x_{\alpha 1}$	$x_{\alpha 2}$	$x_{\alpha 1,2}$
s^1_3 の作用	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	0
s^2_3 の作用	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$
ω_3 の作用	2	2	2	0	0	0

$(V_L)^+_{(2)}$ の元 $a_1 v_{\alpha 1}+a_2 v_{\alpha 2}+\cdots+a_6 x_{\alpha 1,2}$ を，簡単に $(a_1, a_2, \cdots, a_6)$ で表すことにする．$(V_L)^+_{(2)}$ への s^1_1 の作用について，上記の行列を調べることにより

固有値 0 に属する固有空間の基底として

$$w_{1,1} = (1, -2, -2, 0, 0, 0)$$

$$w_{1,2} = (1, 0, 0, 2, 0, 0)$$

$$w_{1,3}=(0,0,0,0,1,1)$$

固有値 $\frac{1}{2}$ に属する固有空間の基底として

$$w_{1,4}=(0,1,-1,0,0,0)$$

$$w_{1,5}=(0,0,0,0,1,-1)$$

固有値2に属する固有空間の基底として

$$w_{1,6}=(1,0,0,-2,0,0)$$

がとれることがわかる．

同様に，s_1^2 の作用について，

固有値0に属する固有空間の基底として

$$w_{2,1}=(1,1,1,3,3,3)$$

固有値 $\frac{3}{5}$ に属する固有空間の基底として

$$w_{2,2}=(2,-2,0,3,-3,0)$$

$$w_{2,3}=(2,0,-2,3,0,-3)$$

固有値2に属する固有空間の基底として

$$w_{2,4}=(1,0,0,-2,0,0)$$

$$w_{2,5}=(0,1,0,0,-2,0)$$

$$w_{2,6}=(0,0,1,0,0,-2)$$

がとれる．

$(V_L)^+_{(2)}$ は6次元空間であるが，s_1^1 と s_1^2 の同時固有ベクトルからなる基底がとれることを，次に示す．実際

$$w_{2,1}=-\frac{1}{2}w_{1,1}+\frac{3}{2}w_{1,2}+3w_{1,3}$$

であるから，

$$\begin{aligned}w_{2,1}&=(1,1,1,3,3,3)\\&=v_{\alpha1}+v_{\alpha2}+v_{\alpha1,2}+3x_{\alpha1}+3x_{\alpha2}+3x_{\alpha1,2}\end{aligned}$$

は，s_1^1 の固有値 $0, s_1^2$ の固有値0に属する同時固有ベクトルである．

また，s_1^1 の固有値 $0, s_1^2$ の固有値 $\frac{3}{5}$ に属する同時固有ベクトルは，適当な定数 a_1, a_2, a_3, b_2, b_3 により

$$a_1w_{1,1}+a_2w_{1,2}+a_3w_{1,3} = b_2w_{2,2}+b_3w_{2,3}$$

と表されるが，この両辺の $v_{\alpha 1}, v_{\alpha 2}, v_{\alpha 1,2}, x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 1,2}$ の係数を比べることにより

$$b_2 = b_3,\ a_1 = b_2,\ a_2 = 3b_2,\ a_3 = -3b_2$$

という条件が得られる．よって，このような同時固有ベクトルは，定数倍を除いて一意的に定まることがわかる．たとえば，$b_2 = \frac{1}{2}$ とすると

$$\frac{1}{2}w_{2,2}+\frac{1}{2}w_{2,3} = \left(2, -1, -1, 3, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$
$$= 2v_{\alpha 1}-v_{\alpha 2}-v_{\alpha 1,2}+3x_{\alpha 1}-\frac{3}{2}x_{\alpha 2}-\frac{3}{2}x_{\alpha 1,2}$$

は，s_1^1 の固有値 0, s_1^2 の固有値 $\frac{3}{5}$ に属する同時固有ベクトルである．

このようにして，s_1^1 と s_1^2 の同時固有ベクトルでそれぞれ別の固有値に属するものが，定数倍を除いてちょうど 6 個存在することが計算でわかる．

さらに，この 6 個の同時固有ベクトルのうち，s_3^1, s_3^2, ω_3 のすべてにより 0 に写されるもの，すなわち最高ウエイトベクトルは，つぎの 3 個である．

$$v_{\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},0\right)} = v_{\alpha 2}-v_{\alpha 1,2}-2x_{\alpha 2}+2x_{\alpha 1,2}$$
$$v_{\left(0,\frac{3}{5},\frac{7}{5}\right)} = 2v_{\alpha 1}-v_{\alpha 2}-v_{\alpha 1,2}+3x_{\alpha 1}-\frac{3}{2}x_{\alpha 2}-\frac{3}{2}x_{\alpha 1,2}$$
$$v_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{10},\frac{7}{5}\right)} = v_{\alpha 2}-v_{\alpha 1,2}+\frac{3}{2}x_{\alpha 2}-\frac{3}{2}x_{\alpha 1,2}$$

最後に，$(V_L)_{(2)}^-$ の中に T の最高ウエイトベクトルが存在しないことを示す．s_2^1, s_2^2, ω_2 はいずれも $(V_L)_{(2)}^-$ を $(V_L)_{(1)}$ に写す．(4.3) の $(V_L)_{(2)}^-$ の基底と，(4.1) の $(V_L)_{(1)}$ の基底に関するこれらの行列は，

$$s_2^1 \text{ の行列} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s_2^2 \text{ の行列} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{5} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{5} \\ 0 & \frac{6}{5} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{5} & \frac{2\sqrt{2}}{5} \end{pmatrix}$$

$$\omega_2 \text{ の行列} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であることが計算できる．

これから，s_2^1, s_2^2, ω_2 のすべてにより0に写される $(V_L)_{(2)}^-$ の元は，0だけであることがわかる．特に，$(V_L)_{(2)}^-$ の中に T の最高ウエイトベクトルは存在しない．

以上により，

定理 4.2　$(V_L)_{(2)}$ に含まれる T の最高ウエイトベクトルはすべて $(V_L)_{(2)}^+$ に属し，それらは定数倍を除いて上記の

$$v_{\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},0\right)}, \qquad v_{\left(0,\frac{3}{5},\frac{7}{5}\right)}, \qquad v_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{10},\frac{7}{5}\right)}$$

の3個存在する．

5　$L=\sqrt{2}\,(A_3\text{-lattice})$ の場合

この節では，$l=3$ の場合について，V_L のウエイト1および2の最高ウエイトベクトルを決定する．基本ルートおよび正のルートの集合は，それぞれ

$$\Pi_3 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$$
$$\Phi_3^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,2,3}\}$$

である．また s^1 と s^2 は $l=2$ のときと同じで，

$$s^3 = \frac{1}{12}\sum_{\alpha\in\Phi_3^+}(v_\alpha - 2x_\alpha), \qquad \omega = \frac{1}{8}\sum_{\alpha\in\Phi_3^+} v_\alpha$$

である．

前節と同様の計算により，

定理 5.1　$(V_L)_{(1)}$ に含まれる T の最高ウエイトベクトルは，定数倍を除いて

$$v_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{10},\frac{1}{15},\frac{1}{3}\right)} = \alpha_1(-1)$$
$$v_{\left(0,\frac{3}{5},\frac{1}{15},\frac{1}{3}\right)} = \alpha_1(-1) + 2\alpha_2(-1)$$
$$v_{\left(0,0,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)} = \alpha_1(-1) + 2\alpha_2(-1) + 3\alpha_3(-1)$$

の3個存在する．

定理 5.2　$(V_L)_{(2)}$ に含まれる T の最高ウエイトベクトルはすべて $(V_L)_{(2)}^+$ に属し，それらは定数倍を除いて

$$v_{\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},0,0\right)} = v_{\alpha 2}-v_{\alpha 1,2}-2x_{\alpha 2}+2x_{\alpha 1,2}$$

$$v_{\left(0,\frac{3}{5},\frac{7}{5},0\right)} = v_{\alpha 1}-\frac{1}{2}v_{\alpha 2}+7v_{\alpha 3}-\frac{1}{2}v_{\alpha 1,2}-\frac{7}{2}v_{\alpha 2,3}-\frac{7}{2}v_{\alpha 1,2,3}-2x_{\alpha 1}+x_{\alpha 2}-14x_{\alpha 3} +x_{\alpha 1,2}+7x_{\alpha 2,3}+7x_{\alpha 1,2,3}$$

$$v_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{10},\frac{7}{5},0\right)} = \frac{1}{2}v_{\alpha 2}-\frac{1}{2}v_{\alpha 1,2}-\frac{7}{2}v_{\alpha 2,3}+\frac{7}{2}v_{\alpha 1,2,3}-x_{\alpha 2}+x_{\alpha 1,2}+7x_{\alpha 2,3}-7x_{\alpha 1,2,3}$$

$$v_{\left(0,0,\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)} = v_{\alpha 1}+v_{\alpha 2}-v_{\alpha 3}+v_{\alpha 1,2}-v_{\alpha 2,3}-v_{\alpha 1,2,3}+2x_{\alpha 1}+2x_{\alpha 2}-2x_{\alpha 3}+2x_{\alpha 1,2} -2x_{\alpha 2,3}-2x_{\alpha 1,2,3}$$

$$v_{\left(0,\frac{3}{5},\frac{1}{15},\frac{4}{3}\right)} = v_{\alpha 1}-\frac{1}{2}v_{\alpha 2}-v_{\alpha 3}-\frac{1}{2}v_{\alpha 1,2}+\frac{1}{2}v_{\alpha 2,3}+\frac{1}{2}v_{\alpha 1,2,3}+2x_{\alpha 1}-x_{\alpha 2}-2x_{\alpha 3} -x_{\alpha 1,2}+x_{\alpha 2,3}+x_{\alpha 1,2,3}$$

$$v_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{10},\frac{1}{15},\frac{4}{3}\right)} = -\frac{1}{2}v_{\alpha 2}+\frac{1}{2}v_{\alpha 1,2}-\frac{1}{2}v_{\alpha 2,3}+\frac{1}{2}v_{\alpha 1,2,3}-x_{\alpha 2}+x_{\alpha 1,2}-x_{\alpha 2,3}+x_{\alpha 1,2,3}$$

$$v_{\left(0,\frac{3}{5},\frac{2}{5},1\right)} = 2v_{\alpha 1}-v_{\alpha 2}+2v_{\alpha 3}-v_{\alpha 1,2}-v_{\alpha 2,3}-v_{\alpha 1,2,3}+2x_{\alpha 1}-x_{\alpha 2}+2x_{\alpha 3}-x_{\alpha 1,2}-x_{\alpha 2,3} -x_{\alpha 1,2,3}$$

$$v_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{10},\frac{2}{5},1\right)} = v_{\alpha 2}-v_{\alpha 1,2}-v_{\alpha 2,3}+v_{\alpha 1,2,3}+x_{\alpha 2}-x_{\alpha 1,2}-x_{\alpha 2,3}+x_{\alpha 1,2,3}$$

の8個存在する．

References

[DMZ] C. Dong, G. Mason and Y. Zhu, Discrete series of the Virasoro algebra and the Moonshine module, *Proc. Symp. Pure Math., Amer. Math. Soc.* **56** II (1994), 295-316.

[DLMN] C. Dong, H. Li, G. Mason and S. P. Norton, Associative subalgebras of the Griess algebra and related topics, preprint (q-alg/9607013).

[FLM] I. B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Pure and Applied Math., Vol. **134**, Academic Press, 1988.

[FZ] I. B. Frenkel and Y. -C. Zhu, Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras, *Duke. Math. J.*, **66** (1992),123-168.

[KMY] M. Kitazume, M. Miyamoto and H. Yamada, Ternary codes and vertex operator algebras, preprint.

[L] H.-S. Li, Local system of vertex operators, vertex superalgebras and modules, *J. Pure Appl. Alg.*, **109** (1996),143-195.

[M1] M. Miyamoto, Griess algebras and conformal vectors in vertex operator algebras, *J. Algebra* **179** (1996), 523-548.

[M2] M. Miyamoto, Binary codes and vertex operator (super) algebras, *J. Algebra* **181** (1996), 207-222.

(一橋大学教授)