弱 L^n 空間に属する Navier-Stokes 外部問題の定常解の存在，一意性および安定性

山 崎 昌 男

小文は，名古屋大学の小薗英雄氏との共同研究［15］，［16］および［17］に基いた，弱 L^n 空間に属する Navier-Stokes 外部問題の解についての解説で，［24］を元にしたものである．

1 定常問題

Ω は $\boldsymbol{R}^n$ の外部領域，即ちコンパクトな補集合 $\boldsymbol{R}^n\backslash\Omega$ を持つ領域で，$n\geq 3$ であり，境界 $\partial\Omega$ は C^∞ であるものとする．このとき Ω 内の非圧縮性流体の時間に依存しない運動は，以下の定常 Navier-Stokes 方程式で記述される．

$$\begin{cases} -\Delta w+w\cdot\nabla w+\nabla\pi = \operatorname{div} F & \text{in } x\in\Omega, \\ \operatorname{div} w = 0 & \text{in } x\in\Omega, \\ w = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ w(x)\to 0 & \text{as} |x|\to\infty. \end{cases} \tag{1}$$

ここで $w=w(x)=(w^1(x),\cdots,w^n(x))$ および $\pi=\pi(x)$ はそれぞれ未知量である，点 $x\in\Omega$ における速度および圧力を表し，$F=F(x)=(F_j^i(x))_{i,j=1,\cdots,n}$ は

$$\operatorname{div} F=\left(\sum_{j=1}^n\frac{\partial F_j^1}{\partial x_j},\cdots,\sum_{j=1}^n\frac{\partial F_j^n}{\partial x_j}\right)$$

が外力を表す，与えられたテンソルである．

上の問題の長い研究において，二つの主要な解のクラスが主に取り上げられてきた．一つは**弱解**，もう一つは physically reasonable solution（以下では PR 解と呼ぶ）である．

弱解は Leray［18］によって導入されたもので，Dirichlet 積分

$$\int_\Omega |\nabla w(x)|^2 dx$$

が有限となる（1）の distribution の意味の解 $w(x)$ である．任意の $F(x) \in L^2(\Omega)$ に対し，（1）の弱解 $w(x)$ で，エネルギー不等式

$$\|\nabla w\|_2^2 \leq -(F, \nabla w) \qquad (2)$$

をみたすものがあることは，以前から知られている．線型偏微分方程式および非定常 Navier-Stokes 方程式の場合と違って，弱解は必ずしも古典解以外の解を意味しない．例えば $n=3$ で，$F(x)$ は Ω 上で滑らかであると仮定し，$w(x)$ が（1）の弱解であるとする．すると Sobolev の埋蔵定理より $w(x) \in L^6(\Omega)$ が示され，これより $(w(x) \cdot \nabla) w(x) \in L^{3/2}(\Omega)$ が従う．すると，等式 $\operatorname{div} w(x) = 0$ より $w(x) \in \dot{H}^2_{3/2}(\Omega) \subset \dot{H}^{3/2}_2(\Omega)$ を得る．これより通常の bootstrap argument を用いて $w(x)$ が Ω 上滑らかであることがわかる．このクラスが弱解と呼ばれる理由は，このクラスにおける一意性が知られていないからである．さらに，$|x| \to \infty$ としたとき必ずしも減衰しない解をも考えると，一意性は一般には成り立たない．そこで，その中に属する解については一意性が成り立つような解のクラスを見つけることが重要になる．

PR 解は，条件

$$\sup_{x \in \Omega} |x||w(x)| + \sup_{x \in \Omega} \frac{|x|^2}{\log |x|} |\nabla w(x)| < \infty.$$

をみたす解である．PR 解の概念は，よく知られている Finn の一連の論文で導入された．与えられたテンソル $F(x)$ が十分小さく，かつ $|x| \to \infty$ としたとき十分早く減衰するという仮定の下で，PR 解の一意存在が示されている．（例えば藤田［4, Theorem 3. 2］および Finn［3, Theorem 4. 2］を見よ）

3次元外部領域において，Galdi-Simader［9］は，$\sup_{x \in \Omega} |x|^2 |F(x)|$ が十分小さいという仮定の下で，条件

$$\sup_{x \in \Omega} |x||w(x)| < \infty, \quad \nabla w \in L^r(\Omega)$$

をすべての $r > 3/2$ に対してみたす（1）の解 $w(x)$ を構成した．後に Novotny-Padula [21] および Borchers-宮川 [1] は，Finn [3] の与えた $\nabla w(x)$ に対する減衰の評価を改良し，$\sup_{x\in\Omega}|x|^{k+1}|F(x)|+\sup_{x\in\Omega}|x|^{k+2}|\nabla F(x)|$ が十分小さいという仮定の下で条件

$$\sup_{x\in\Omega}|x|^{k}|w(x)|+\sup_{x\in\Omega}|x|^{k+1}|\nabla w(x)|<\infty$$

をみたす (1) の解 $w(x)$ を構成した．ここで k は不等式 $1\leq k\leq n-2$ をみたす整数である．言い替えると，彼らは流体力学に現れるポテンシャル論を用いて PR 解の減衰の速さを詳細に評価し，$F(x)$ の減衰の速さに応じた解の減衰に対する最良の評価を与えたのである．

彼らの結果は，典型的な (1) の解 $w(x)$ の $|x|\to\infty$ としたときの減衰の速さは高々 (1) の線型化方程式の基本解 $E(x)$ の減衰の速さと同程度であることを示している．$|x|\to\infty$ のとき $\nabla E(x)=O(|x|^{1-n})$as $|x|\to\infty$ であるから，条件 $\nabla w\in L^{n/(n-1)}(\Omega)$ をみたす解 $w(x)$ を見つけるのはきわめて困難であることがわかる．

一方，藤田-加藤 [5] 以来非定常問題において多くの成果を収めている，函数解析的な手法がある．この手法においては，Stokes 方程式

$$\begin{cases} -\Delta w+\nabla\pi=\operatorname{div}F & \text{in } x\in\Omega, \\ \operatorname{div}w=0 & \text{in } x\in\Omega, \\ w=0 & \text{on } \partial\Omega, \\ w(x)\to 0 & \text{as} |x|\to\infty \end{cases} \tag{3}$$

に対する L^r-理論が重要な役割を果たす．そこで，非定常問題の研究に倣い，この手法で得られる解を**強解**と呼ぶことにする．条件 $\nabla w\in L^r(\Omega)$ をみたす (1) の強解 $w(x)$ を見つけることは，非線型項 $w\cdot\nabla w$ の形により，$r=n/2$ の場合のみ可能である．Caffarelli-Kohn-Nirenberg [2] は，$\Omega=\boldsymbol{R}^n$ のとき $(w(x),\pi(x))$ が (1) の解ならば，任意の $\lambda>0$ に対して $w_\lambda(x)=\lambda w(\lambda x)$ および $\pi_\lambda(x)=\lambda^2\pi(\lambda x)$ とおくと，$(w_\lambda(x),\pi_\lambda(x))$ も (1) の解になることに注目した．ノルム $\|\nabla w\|_{L^r}$ が上のスケール変換で不変になるのは $r=n/2$ の場合に限る．従ってノルム $\|\nabla w\|_{L^r}$ が小さいという条件が意味を持つのは $r=n/2$ の場合に限る．

$n \geq 4$ の時，小薗-Sohr［11］は $L^{n/2}(\Omega)$ に属し，かつ十分小さい $F(x)$ に対し，上の条件をみたす強解を構成した．しかし，最も物理的な意味のある $n=3$ の場合は，小薗-Sohr［13］およびBorchers-宮川［1］は，条件 $\nabla w \in L^{3/2}(\Omega)$ をみたす（1）の解 $w(x)$ が存在するのは，境界 $\partial\Omega$ が流体から受ける力の合力が0に等しい場合，即ち等式

$$\int_{\partial\Omega}(T(u,p)+F)\cdot vdS = 0 \tag{4}$$

が成立する場合に限ることを示した．ここで v は $\partial\Omega$ の単位法線ベクトルを表し，

$$T(u,p) = \left\{\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_j}-\delta_{jk}p\right\}_{j,k=1,2,3}$$

である．小薗-Sohr-山崎［14］は仮定 $\nabla w(x) \in L^{3/2}(\Omega)$ をより一般的な仮定 $w(x) \in L^3(\Omega)$ に置き換え，（4）が成立する場合のより精密な $w(x)$ の減衰の評価を得た．

言い替えると，$n=3$ の場合，典型的な強解は空間 $L^3(\Omega)$ には属さない．このことはさきに述べたNovotny-Padula［21］およびBorchers-宮川［1］のPR解に関する結果についての注意に対応している．

$n=3$ の場合に限り上のような現象が起こる理由は以下の通りである．方程式（3）は $n/(n-1)<r<n$ の時に限り，任意の $F \in L^r(\Omega)$ に対し $\nabla w \in L^r(\Omega)$ をみたす解 $w(x)$ をただ一つ持つ．このことは，方程式（3）で $F=0$ とおいたものが自明でない非有界な解 $(w(x), \pi(x))$ で，任意の $r \geq n$ に対して $\nabla w \in L^r$ となるものを持つことに由来する．このことは，$r \geq n$ の場合Stokes作用素が $\nabla w \in L^r$ をみたす $w(x)$ のクラスで単射でないことを意味する．同様の考察をStokes作用素の形式的双対作用素に対して行い，閉値域定理を用いると，Stokes作用素は $r>n/(n-1)$ の場合に限り全射になることがわかる．最も重要な場合 $n=3$ は，$n/2=n/(n-1)=3/2$ がちょうど（3）の可解性が成り立たない限界であるために排除されてしまう．即ち，任意の $F(x) \in L^{3/2}(\Omega)$ に対し，方程式（3）は必ずしも $\nabla w \in L^{3/2}(\Omega)$ をみたす解

$w(x)$ を持たない．従って方程式の線型化の方法は，$\nabla w \in L^{3/2}(\Omega)$ をみたす $w(x)$ のクラスにおける非線型方程式 (1) の可解性の研究の役には立たない．

この困難は強解のクラスを拡張することによって回避される．またこれによってポテンシャル論に基く結果を，より弱い仮定の下で得ることができる．即ち，以前から行われていた，強解のクラスを L^n からより広い空間 $L^{n,\infty}$ に置き換える非定常問題の研究からヒントを得て，$\nabla w \in L^{p,q}(\Omega)$ をみたす解 $w(x)$ からなるより一般的なクラスを導入し，$n\geq 3$ ならば任意の $F(x)\in L^{n/2,\infty}(\Omega)$ に対し，方程式 (3) は $\nabla w \in L^{n/2,\infty}(\Omega)$ をみたす解 $w(x)\in L^{n,\infty}(\Omega)$ をただ一つ持つことを証明する．ここで $L^{p,q}(\Omega)$ は Ω 上の Lorentz 空間を表す．この方法が成立する理由は，$\nabla w \in L^n$ をみたす $w(x)$ のクラスよりやや狭い $\nabla w \in L^{n,1}$ をみたす $w(x)$ のクラス上では Stokes 作用素が単射であることである．このことを Stokes 作用素の形式的双対作用素に適用し，閉値域定理を用いると，Stokes 作用素が $\nabla w \in L^{n/(n-1),\infty}=(L^{n,1})^*$ をみたす $w(x)$ のクラスで全射であることがわかる．

上のような Lorentz 空間上での線型化の方法により，任意の十分小さい $F(x)\in L^{n/2,\infty}(\Omega)$ に対し，方程式 (1) は条件 $\nabla w \in L^{n/2,\infty}(\Omega)$ をみたす解 $w(x)\in L^{n,\infty}(\Omega)$ をただ一つ持つことを示す．これらの空間のノルムは，前に述べた解のスケール変換に関して不変である．また，ここで述べた方法が適用できるポテンシャル $F(x)$ のクラスは，Borchers-Miyakawa [1] および Novotny-Padula [21] の結果より広く，さらに $\nabla F(x)$ についての付加的な条件は全く不要である．またこうして得られた強解は，$F(x)$ が然るべき条件をみたすならば，それに応じて然るべき減衰あるいは滑らかさを持つ．

結果を述べるために，いくつかの函数空間を導入する．$1<p<\infty$ をみたす p に対し，$\dot{H}^1_p(\Omega)$ はノルム $\|\nabla\cdot\|_p$ についての空間 $C_0^\infty(\Omega)$ の閉包を表す．ここで $\|\cdot\|_p$ は通常の L^p ノルムである．Ω が外部領域であるから，空間 $\dot{H}^1_p(\Omega)$ は通常の Sobolev 空間 $H^1_p(\Omega)$ より真に大きい．実補間法によって空間 $\dot{H}^1_{p,q}(\Omega)$ を $\dot{H}^1_{p,q}(\Omega)\equiv(\dot{H}^1_{p0}(\Omega),\dot{H}^1_{p1}(\Omega))_{\theta,q}$ によって定める．ここで $1<p_0<$

$p<p_1<\infty, 0<\theta<1$ は等式 $1/p=(1-\theta)/p_0+\theta/p_1$ をみたし，$1\leq q\leq\infty$ である．この空間は同値なノルムを除いて p_0 と p_1 の選び方に無関係に定まる．また，$1\leq q<\infty$ ならば，空間 $\dot{H}^1_{p,q}(\Omega)$ はノルム $\|\nabla\cdot\|_{p,q}$ に関する空間 $C_0^\infty(\Omega)$ の閉包に一致する．ここで $L^{p,q}(\Omega)$ は Ω 上の Lorentz 空間で，そのノルムを $\|\cdot\|_{p,q}$ で表す．このとき $L^{r,r}=L^r$ が成り立つ．等式 $1/p+1/p'=1$ および $1/q+1/q'=1$ が成り立つとき，空間 $L^{p,q}(\Omega)$ と $L^{p',q'}(\Omega)$ の間の duality pairing を $(\cdot,\cdot)$ で表す．以下ではスカラー値の函数空間とベクトル値の函数空間とを同じ記号で表す．

定常問題の強解に関する我々の結果を次に述べる．

定理　1

（1）（存在）定数 $\delta=\delta(n)>0$ で，以下の条件をみたすものが存在する．$F\in L^{n/2,\infty}(\Omega)$ が $\|F\|_{n/2,\infty}\leq\delta$ をみたせば，(1) を以下の意味でみたす解 $\{w,\pi\}\in\dot{H}^1_{n/2,\infty}(\Omega)\times L^{n/2,\infty}(\Omega)$ が存在する．

$$\begin{cases}(\nabla w,\nabla\varphi)-(w\cdot\nabla\varphi,w)-(\pi,\nabla\varphi)=-(F,\nabla\varphi)\\ \qquad\qquad\qquad \textit{for all } \varphi\in C_0^\infty(\Omega),\\ \operatorname{div} w=0 \quad \textit{in } \Omega.\end{cases}\tag{5}$$

（2）（一意性）定数 $k=k(n)$ を十分小さくとると，(5) および

$$\|w\|_{n,\infty}\leq k \tag{6}$$

をみたす組 $\{w,\pi\}\in\dot{H}^1_{n/2,\infty}(\Omega)\times L^{n/2,\infty}(\Omega)$ はただ一つに限る．

（3）（減衰または滑らかさ）$n'=n/(n-1)<r<\infty$, をみたす r に対し，不等式 $0<\delta'(n,r)\leq\delta(n)$ をみたす定数 $\delta'(n,r)$ で，$F\in L^{n/2,\infty}(\Omega)\cap L^{r,\infty}(\Omega)$ が条件 $\|F\|_{n/2,\infty}\infty\leq\delta'(n,r)$ をみたせば，(1) で与えられる (1) の解 $\{w,\pi\}$ は以下の性質を持つものがある．

$$\nabla w\in L^{n/2,\infty}(\Omega)\cap L^{r,\infty}(\Omega),\quad \pi\in L^{n/2,\infty}(\Omega)\cap L^{r,\infty}(\Omega). \tag{7}$$

注意 1

(1) Sobolev の埋め込み定理と実補間により，包含関係 $\dot{H}^1_{n/2,\infty}(\Omega)\subset L^{n,\infty}(\Omega)$ と不等式 $\|w\|_{n,\infty}\le C\|\nabla w\|_{n/2,\infty}$ が成り立つことがわかる．ここで C は n にのみ依存する定数である．従って，(5) における試験函数として，$\varphi\in\dot{H}^1_{n/(n-2),1}(\Omega)$ をとることができる．

(2) 一意性のためには，ノルム $\|\nabla w\|_{n/2,\infty}$ が小さい必要はなく，より弱いノルム $\|w\|_{n,\infty}$ が小さければよい．

(3) 滑らかさのためには，ノルム $\|F\|_{r,\infty}$ が小さい必要はない．このことは，さきに述べたノルム $\|\nabla w\|_{n/2,\infty}$ のスケール変換における不変性と密接に関連している．

(4) $n=3$ のときは，Galdi-Simader [9] が (1) の解 $w(x)$ で，条件 $\sup_{x\in\Omega}|x||w(x)|<\infty$ をみたし，さらに $\nabla w\in L^r(\Omega)$ をすべての $r>3/2$ についてみたすものを，$\sup_{x\in\Omega}|x|^2|F(x)|$ が十分小さいという条件の下で構成した．その後 Novotny-Padula [21] および Borchers-宮川 [1] は

$$\sup_{x\in\Omega}|x|^{n-2}|w(x)|+\sup_{x\in\Omega}|x|^{n-1}|\nabla w(x)|<\infty$$

をみたす解 $w(x)$ を，$\sup_{x\in\Omega}|x|^{n-1}|F(x)|+\sup_{x\in\Omega}|x|^n|\nabla F(x)|$ が十分小さい $F(x)$ に対して構成した．上に述べた定理では，$\nabla F(x)$ に新たな条件を仮定する必要はなく，さらに $F(x)$ の属すべきクラスは，これらの結果より真に広い．

2 弱解の一意性

前節で考えた解と弱解の一意性との関係を考える．$n\le 4$ の場合の $\boldsymbol{R}^n$ の有界領域では，$F(x)$ が L^2 に属し，小さいという条件の下で，空間 H^1_0 に属する弱解は一意的である．これに対応する外部領域の結果は，$n=4$ の場合にのみ知られている．外部領域における困難は，$n=4$ の場合を除いて，弱解の L^n-ノルムをその Dirichlet 積分で評価することができないことに由来す

る.

小薗-Sohr ［12］は，$w(x)$ が弱解で $\|w\|_{L^n}$ が十分小さいならば，エネルギー不等式をみたす弱解は $w(x)$ に限ることを示した．この結果は非定常解の一意性に関する Serrin ［22］の定常解版にあたると見なせる．しかし前節で既に見たように，$n=3$ の場合は，このような解 $w(x)$ は例外的である．一方 Galdi ［7］は PR 解と弱解の一意性との関連を調べ，$n=3$ で $F(x)$ が小さく，無限遠で十分早く減衰するならば，エネルギー不等式（2）をみたす弱解は一意的で PR 解と一致するという結果を得た．次いで［8, Theorems 9.2-9.4］では $n\geq 3$ の場合に拡張し，さらに解がエネルギー等式

$$\|\nabla w\|_2^2 = -(F, \nabla w). \tag{8}$$

をみたすことを示した．宮川［20］は $n\geq 3$ のときに，すべての PR 解は（8）をみたすこと，および PR 解 $w(x)$ が十分小さければ，（2）をみたすすべての（1）の定常解は $w(x)$ と一致することを示した．

ここでは彼らの結果を一般の強解に拡張する．即ち，まず $w(x)\in L^{n,\infty}(\Omega)$ をみたすすべての解がエネルギー等式（8）をみたすことを示し，次にもし $\|w\|_{n,\infty}$ が十分小さければ，（2）をみたすすべての（1）の弱解は $w(x)$ と一致することを示す．我々の判定法によれば，$F(x)$ の属するクラスとしてこれまでの結果よりも真に広いものが取れる．我々の判定法を確立するために，（1）の弱解の定義に現れる試験函数としてこれまでのものより広いクラスに属するものを考える必要がある．即ち，試験函数として $\nabla\varphi\in L^2(\Omega)$ をみたす $\varphi\in L^{n,\infty}(\Omega)$ が取れることを示す．通常の L^p 空間と弱 L^p 空間の最大の相違点の一つは，$C_0^\infty(\Omega)$ が弱 L^p-空間では稠密でないことである．しかし，ソレノイダルなベクトル場の弱 L^p-位相でのある種の稠密性を用いて適切な試験函数を求めることができる．

結果を述べるために，いくつかの函数空間を定義し，弱解の定義を与える．台が Ω のコンパクト部分集合である C^∞ ベクトル値函数 $\varphi=(\varphi^1,\cdots,\varphi^n)$ で $\operatorname{div}\varphi=0$ をみたすものからなる空間を $C_{0,\sigma}^\infty$ で表し，この空間のノルム $\|\nabla\varphi\|_2$

に関する完備化を $\hat{H}^1_{0,\sigma}$ で表す．Ω は外部領域であるから，$\hat{H}^1_{0,\sigma}$ は空間 $C^\infty_{0,\sigma}$ の通常の H^1 ノルム $\|\varphi\|_{H^1}=\|\nabla\varphi\|_2+\|\varphi\|_2$ に関する完備化である $H^1_{0,\sigma}$ より真に広い．次に，(1) の弱解の定義を以下に与える．

定義 1　$F\in L^2(\Omega)$ と仮定する．函数 $w(x)\in\hat{H}^1_{0,\sigma}$ は，等式

$$(\nabla w,\nabla\varphi)+(w\cdot\nabla w,\varphi)=-(F,\nabla\varphi) \tag{9}$$

がすべての $\varphi\in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$ に対して成り立つとき，(1) の**弱解**と呼ばれる．

このとき，エネルギー等式についての我々の結果は以下の通りである．

定理 2　$F(x)\in L^2(\Omega)$ で，$w(x)\in L^{n,\infty}(\Omega)$ は方程式 (1) の弱解であるとする．このとき $w(x)$ はエネルギー等式 (8) をみたす．

さらに，弱解の一意性については以下の結果がある．

定理 3　正の定数 $\delta=\delta(n)$ で，以下をみたすものがある．$F(x)\in L^2(\Omega)$ で，$u(x)$ と $w(x)$ はともに (1) の弱解であり，$u(x)$ は条件 $\|u\|_{n,\infty}<\delta$ をみたす $L^{n,\infty}(\Omega)$ の要素であり，$w(x)$ はエネルギー不等式 (2) をみたしているとする．このとき Ω 上で $w(x)\equiv u(x)$ が成り立つ．

注意 2

(1)　上の定理で，$w\in L^{n,\infty}(\Omega)$ を仮定する必要はない．

(2)　定理 3 における定数 δ は $F(x)$，$w(x)$ および $u(x)$ のとり方にはよらない．詳しく言えば，δ は Marcinkiewicz の補間定理，および Sobolev の埋め込み定理 $H^1_0\subset L^{2n/(n-2)}$ に現れる定数のみによって定まる．

(3)　宮川 [20] は，$\sup_{x\in\Omega}|x||u(x)|$ が小さいという，より強い仮定のもとで，一意性についての類似の結果を得ている．この条件をみたす函数は $L^{n,\infty}(\Omega)$ に属する．

3　安定性

これまで考えてきた強解の安定性を考える．定常解 $w(x)$ に初期摂動 $a(x)$ を加えたときの流れ $v(x,t)$ は，以下の非定常 Navier-Stokes 方程式で記述される．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}-\Delta v+v\cdot\nabla v+\nabla q = \operatorname{div} F & \text{in } x\in\Omega, t>0, \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{in } x\in\Omega, t>0, \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega, t>0, \\ v(x,t)\to 0 & \text{as} |x|\to\infty, \\ v(x,0) = w(x)+a(x) & \text{for } x\in\Omega. \end{cases} \tag{10}$$

以下では，定常解 $w(x)$ および初期摂動 $a(x)$ がともに，共通の空間 $L^{n,\infty}(\Omega)$ に属し，十分小さいならば，(10) の時間大域的な強解 $v(t,x)$ で，積分

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |v(x,t)-w(x)|^r dx \quad \text{for} \quad \frac{n}{n-1}<r<\infty, \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla v(x,t)-\nabla w(x)|^r dx \quad \text{for} \quad \frac{n}{n-1}<r<n \end{cases}$$

が $t\to\infty$ としたとき決まった order で減衰するようなものがあることを示す．小薗-小川［10］は，$\nabla w(x)$ が空間 $L^{n/2}(\Omega)$ に属し，十分小さいとき，$L^n(\Omega)$ に属する小さい初期摂動 $a(x)$ に対して類似の結果を得た．しかし，既に第1節でみたように，$n=3$ のときは $\nabla w\in L^{3/2}(\Omega)$ をみたす (1) の定常解 $w(x)$ は特別の場合にしか存在しない．

一方，Borchers-宮川［1］は定常解のクラス

$$\sup_{x\in\Omega}|x||w(x)|+\sup_{x\in\Omega}|x|^2|\nabla w(x)|\equiv C_w<\infty$$

を考え，C_w が小さいときに，$L^{n,\infty}(\Omega)$ に属する小さい初期摂動 $a(x)$ についての安定性を示した．我々のクラスはこの結果に現れるクラスより真に広く，特に $\nabla w(x)$ についての付加的な条件を必要としない．また，定常解と初期摂動を考える共通の空間として $L^{n,\infty}(\Omega)$ が取れる．即ち，存在，一意性，および安定性が，すべて共通の空間 $L^{n,\infty}(\Omega)$ 上で統一的に考えられる．

$w(x)$ および $v(x,t)$ は，それぞれ方程式（1）と（10）の解であるとする．このとき函数 $u(x,t)\equiv v(x,t)-w(x)$ と $p(x,t)\equiv q(x,t)-\pi(x)$ の組は，方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\Delta u+w\cdot\nabla u+u\cdot\nabla w+u\cdot\nabla u+\nabla p=0 & \text{in } \Omega, t>0, \\ \operatorname{div} u=0 & \text{in } \Omega, t>0, \\ u=0 & \text{on } \partial\Omega, t>0, \\ u(x,t)\to 0 & \text{as } |x|\to\infty, \\ u(x,0)=a(x) & \text{for } x\in\Omega \end{cases} \tag{11}$$

をみたす．こうして（10）の時間大域解の存在，一意性および漸近挙動問題は，（11）のそれに帰着される．（11）を時間大域的に解くためには，

$$L_r\equiv A_r+P_r(w\cdot\nabla u+u\cdot\nabla w).$$

によって定義される作用素 L_r の生成する半群 $\exp(-tL_r)$ に対する L^p-L^r 評価を得る必要がある．ここで P_r は $(L^r(\Omega))^n$ から $L^r_\sigma(\Omega)$ の上への射影作用素で，$A_r=-P_r\Delta$ は Stokes 作用素を表す．もし $w(x)\equiv 0$ ならば，$L_r=A_r$ であり，従って我々の問題は Navier-Stokes 方程式に対する通常の初期値境界値問題と一致する．非有界領域における Stokes 半群に対する L^p-L^q 評価についてはこれまでに多くの結果がある．L_r を，L^p-L^q 評価がそのまま成立するような A_r の摂動作用素として扱うために，小薗-小川［10］および Borchers-宮川［1］では，それぞれ $\|\nabla w\|_{L^{n/2}}$ および C_w が小さいことを仮定した．しかし，非線型項 $w\cdot\nabla u+u\cdot\nabla w$ の構造の特殊性と，等式 $\operatorname{div} u=\operatorname{div} w=0$ を用いることにより，$\nabla w(x)$ に対する仮定を取り除くことができる．実際，$w(x)$ が $L^{n,\infty}(\Omega)$ に属し，小さいという仮定のみの下で，半群 $\exp(-tL_r)$ に対する L^p-L^r 評価を示すことができる．

そのために，弱解と強解の中間的概念である mild solution の概念を導入する必要がある．より正確に言えば，mild solution は，微分方程式を書き直して得られる積分方程式の distribution の意味での解である．その上で，$a(x)\in L^{n,\infty}(\Omega)$ が小さいという仮定の下で，クラス $BC((0,\infty);L^{n,\infty}(\Omega))$ に

属する（11）の時間大域的な mild solution の存在と一意性を示す．そして Serrin［22］, Sohr-von Wahl［23］および増田［19］等の与えたものと同様の一意性の判定条件を用いることによって，我々の与えた mild solution が強解と一致することが示せる．

結果を述べるために，また函数空間をいくつか導入する．$1<r<\infty$ をみたす r に対し，通常の L^r ノルム $\|\cdot\|_r$ に関する $C_{0,\sigma}^\infty$ の完備化を L_σ^r で表す．このとき，$L_\sigma^r=\{u\in(L^r)^n; \operatorname{div} u=0 \text{ in } \Omega, u\cdot\nu=0 \text{ on } \partial\Omega\}$ となることが知られている．また，$1<r<\infty$ ならば，Helmholtz 分解 $L^r=L_\sigma^r\oplus G^r$ が成り立つ．ここで $G^r=\{\nabla p\in L^r; p\in L_{\mathrm{loc}}^r(\bar{\Omega})\}$ である．この直和分解に対応する $(L_r)^n$ から L_σ^r への射影作用素を P_r で表す．すると L_σ^r 上の Stokes 作用素 A_r は，空間 $D(A_r)=H_r^2(\Omega)\cap H_{0,\sigma,r}^1$ を定義域として $A_r=-P_r\Delta$ によって定義される．ここで $H_{0,\sigma,r}^1$ は通常の H_r^1-ノルム $\|\varphi\|_{H_r^1}=\|\varphi\|_r+\|\nabla\varphi\|_r$ に関する $C_{0,\sigma}^\infty$ の完備化である．空間 $D(A_r)$ は $\|u\|_{D(A_r)}=\|u\|_r+\|A_r u\|_r$ をノルムとして Banach 空間になる．次に，$1<r_0<r<r_1<\infty$ で $0<\theta<1$ が条件 $1/r=(1-\theta)/r_0+\theta/r_1$ をみたし，$1\le q\le\infty$ に対し，実補間を用いて空間 $L_\sigma^{r,q}$ を $L_\sigma^{r,q}\equiv(L_\sigma^{r_0}, L_\sigma^{r_1})_{\theta,q}$ によって定める．このとき Borchers-宮川［1］により，

$$L_\sigma^{r,q} = \{u \in L^{r,q}; \operatorname{div} u = 0 \text{ in } \Omega, u\cdot\nu = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$$

となり，Stokes 作用素 $A_{r,q}$ は $L_\sigma^{r,q}$ 上でも

$$D(A_{r,q}) = \{u \in L_\sigma^{r,q}; \nabla^j u \in L^{r,q}(\Omega) \ \text{ for } j = 1, 2, u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

を定義域とする作用素として well-defined であることが知られている．

定常解について，以下の仮定をする．

仮定　1　$w(x)$ は $\bar{\Omega}$ 上のソレノイダルなベクトル場で，条件 $w|_{\partial\Omega}=0$ をみたし，条件 $n<r_*<\infty$ をみたすある r_* について $w\in L_\sigma^{n,\infty}\cap L^\infty$ および $\nabla w\in L^{r_*}$ をみたす．

注意　3　r_0 を $r_*<r_0<\infty$ をみたすようにとる．もし $F(x)\in L^{n/2,\infty}\cap L^{r_0,\infty}$ が $\|F\|_{n/2,\infty}\le\delta'(n,r_0)$ をみたせば，第1節の結果と Sobolev の埋め込み定理

$H^1_{r_*}\subset L^\infty$ より，仮定 1 をみたす (1) の解 $w(x)$ が存在することがわかる．次に，$1<r\leq r_*$ をみたす r に対し，$D(B_r)=H^1_{0,\sigma,r}$ を定義域とする L^r_σ 上の作用素 B_r を $B_r u\equiv P_r(w\cdot\nabla u+u\cdot\nabla w)$ によって定義する．もし $1<r\leq r_*$ なるある r_* に対して $\nabla w\in L^{r_*}$ ならば，任意の $u\in H^1_{0,\sigma,r}$ に対して $u\cdot\nabla w\in L^r$ が成り立つ．従って B_r は $H^1_{0,\sigma,r}$ 上で well-defined である．次に，このような r に対し，定義域 $D(L_r)$ を $D(A_r)$ とする作用素 L_r を $L_r\equiv A_r+B_r$ によって定める．

(11) の初期摂動 $a(x)$ に対し，以下の仮定をおく．

仮定　2　初期摂動 $a(x)$ は空間 $L^{n,\infty}_\sigma$ に属する．

このとき安定性についての結果は以下の通りである．

定理　4

(1)　(時間大域的存在) $w(x)$ および $a(x)$ はそれぞれ仮定 1 および仮定 2 をみたすとする．このとき正の数 $k=k(n,r_*)$ で，もし

$$\|w\|_{n,\infty}\leq k,\quad \|a\|_{n,\infty}\leq k \tag{12}$$

が成り立つならば，時間大域的な (11) の強解 $u(t,x)$ で，以下の性質をもつものが存在する．

(i)　$u\in BC((0,\infty);L^{n,\infty}_\sigma)\cap C((0,\infty);D(A_{r_*}))\cap C^1((0,\infty);L^{r_*}_\sigma)$.

(ii)　$t>0$ において $\dfrac{du}{dt}+L_{r_*}u+p_{r_*}(u\cdot\nabla u)=0,\quad in\ L^{r_*}_\sigma$

(iii)　$t\to+0$ としたとき $L^{n,\infty}_\sigma$ の *weak-** 位相について $u(t)\to a$ をみたす．

(iv)　(一様評価) $n<r\leq r_*$ をみたす n,r および r_* のみに依存する正の定数 C で，任意の $t>0$ に対し

$$\|u(t)\|_r\leq Ct^{-n/2(1/n-1/r)} \tag{13}$$

をみたすものが存在する．

ここで $BC(I;X)$ は区間 I 上で定義され，空間 X に値をとる有界連続函数のなす集合を表す．

(2)　（一意性）正の定数 $k=k(n, r_*)$ で，上の性質（i）―（iv）および

$$\limsup_{t\to+0} t^{n/2(1/n-1/r_*)} \| u(t) \|_{r_*} \le k \tag{14}$$

をみたす方程式（11）の解 $u(t,x)$ は一意的に定まる．

初期摂動により速い空間的減衰を仮定すれば，$u(t,x)$ の $t\to\infty$ におけるより速い減衰を得る．

定理　5　不等式 $n'=n/(n-1)<p<n$ をみたす p に対し，(12) に現れる定数 $k(n, r_*)$ 以下の正の定数 $\tilde{k}=\tilde{k}(n, r_*, p)$ で，以下をみたすものが存在する．初期摂動 $a(x)$ が空間 $L^{n,\infty}_\sigma \cap L^p_\sigma$ に属し，

$$\| w \|_{n,\infty} \le \tilde{k}, \quad \| a \|_{n,\infty} \le \tilde{k} \tag{15}$$

が成り立つならば，定理 4 の与える解 $u(t,x)$ は以下の付帯的な性質を持つ．

$$u(\cdot) \text{ および } t^{1/2}\nabla u(\cdot) \text{ は空間 } BC([0,\infty); L^p) \text{ に属する.} \tag{16}$$

$t\to\infty$ としたとき，$p\le \ell \le r_*$ をみたす任意の l について

$$\| u(t) \|_\ell = O(t^{-n/2(1/p-1/\ell)}) \tag{17}$$

が成り立つ．さらに，$p\le q<n$ をみたす任意の q に対し，$\tilde{k}$ 以下の正の定数 $\hat{k}=\hat{k}(n, r_*, p, q)$ で，(15) に加えて

$$\| w \|_{n,\infty} \le \hat{k} \text{ および } \| a \|_{n,\infty} \le \hat{k} \tag{18}$$

を仮定すると，$t\to\infty$ としたとき，$p\le \ell \le q$ をみたす任意の l に対して

$$\| \nabla u(t) \|_\ell = O(t^{-n/2(1/p-1/\ell)-1/2}) \tag{19}$$

が成り立つものがある．

注意　4

(1)　定理 4 は，空間 $L^{n,\infty}_\sigma$ が安定な定常解の空間で，初期摂動の空間と同一であることを示している．Borchers-宮川 [1] は，他の結果と同時に，ここに示したものと同様で，(17) で $r=\infty$ とおいたもの，および (19) で $q=n$ とおいたものを含んだ結果を得ている．しかし彼らは，

$$\sup_{x\in\Omega}|x||w(x)|+\sup_{x\in\Omega}|x|^2|\nabla w(x)|$$

が十分小さいという，我々より強い仮定をおいている．我々の結果は，$\nabla w(x)$ についての仮定は $n<r<\infty$ をみたす L^r における安定性のためには不要であることを示している．また $w(x)$ 自身に対しても，我々のクラス $L^{n,\infty}_\sigma$ は $\sup_{x\in\Omega}|x||w(x)|<\infty$ をみたす $w(x)$ のクラスよりも真に広い．

(2) Furioli-Lemarié-Rieusset-Terraneo [6] は最近 $u\in C([0,\infty);L^n_\sigma)$ に属する Navier-Stokes 方程式の解は一意的であることを示した．その証明では $t=0$ で解が t について強連続であることが本質的である．しかし，空間 $C^\infty_{0,\sigma}$ は $L^{n,\infty}_\sigma$ で稠密ではないから，一般に我々の扱った空間 $L^{n,\infty}_\sigma$ に属する解は $t=0$ で強連続ではない．従って我々の解が彼らの一意性の条件をみたすかどうかは不明である．従って条件 (14) を一意性のためにおいた．

参考文献

[1] Borchers, W., Miyakawa, T.: On stability of exterior stationary Navier-Stokes flows. Acta Math. **174**, 311-382 (1995).

[2] Caffarelli, L., Kohn, R., Nirenberg, L.: Partial regularity of suitable weak solutions for the Navier-Stokes equations. Comm. Pure Appl. Math. **35**, 771-831 (1982).

[3] Finn, R.: On exterior stationary problem for the Navier-Stokes equations and associated perturbation problems. Arch. Rational Mech. Anal. **19**, 363-406 (1965).

[4] Fujita, H.: On the existence and regularity of steady state solutions of the Navier-Stokes equations. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I **9**, 59-102 (1961).

[5] Fujita, H., Kato, T.: On the Navier-Stokes initial value problem 1. Arch. Rational Mech. Anal. **46**, 269-315 (1964).

[6] Furioli, G., Lemarié-Rieusset, P. G., Terraneo, E.: Sur l'unicité dans $L^3(\boldsymbol{R}^3)$ des solutions mild des équations de Navier-Stokes. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **325**, 1253-1256 (1997).

[7] Galdi, G. P.: On the asymptotic properties of Leray's solutions to the exterior stationary three-dimensional Navier-Stokes equations with zero velocity at infinity. preprint.

[8] Galdi, G. P.: An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations, Vol. II Nonlinear steady problems. Springer, New York, 1994.

[9] Galdi, G. P., Simader, C. G.: New estimates for the steady-state Stokes problem in exterior domains with application to the Navier-Stokes problem. Differential and Integral Equations **7**, 847-861 (1994).

[10] Kozono, H., Ogawa, T.: On stability of the Navier-Stokes flows in exterior domains. Arch. Rational Mech. Anal. **128**, 1-31 (1994).

[11] Kozono, H., Sohr, H.: On a new class of generalized solutions for the Stokes equations in exterior domains. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **19**, 155-181 (1992).

[12] Kozono, H., Sohr, H.: Density properties for solenoidal vector fields, with applications to the Navier-Stokes equations in exterior domains. J. Math. Soc. Japan **44**, 307-330 (1992).

[13] Kozono, H., Sohr, H.: On stationary Navier-Stokes equations in unbounded domains. Richerche Mat. **42**, 69-86 (1993).

[14] Kozono, H., Sohr, H., Yamazaki, M.: Representation formula, net force and energy relation to the stationary Navier-Stokes equations in3-dimensional exterior domains. Kyushu J. Math. **51**, 239-260 (1997).

[15] Kozono, H., Yamazaki, M.: Exterior Problem for the stationary Navier-Stokes equations in the Lorentz spaces. Math. Ann. **310**, 279-305 (1998).

[16] Kozono, H., Yamazaki, M.: On a larger class of the stable solutions to the Navier-Stokes equations in exterior domains. to appear in Math. Z.

[17] Kozono, H., Yamazaki, M.: Uniqueness criterion of weak solutions to the stationary Navier-Stokes equations in exterior domains. to appear in Nonlinear Anal. Theory, Methods and Appl.

[18] Leray, J.: Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique. J. Math. Pures Appl. **9**, 1-82 (1933).

[19] Masuda, K.: Weak solutions of the Navier-Stokes equations. Tohoku Math. J. **36**, 623-646 (1984).

[20] Miyakawa, T.: On uniqueness of steady Navier-Stokes flows in an exterior domain. Adv. Math. Sci. Appl. **5**, 411-420 (1995).

[21] Novotny, A., Padula, M.: Note on decay of solutions of steady Navier-Stokes equations in 3-D exterior domains. Differential and Integral Equations **8**, 1833-1842 (1995).

[22] Serrin, J.: The initial value problem for the Navier-Stokes equations. Nonlinear Problems, R. E. Langer ed., University of Wisconsin Press, Madison, 69-98 (1963).

[23] Sohr, H., von Wahl, W.: On the singular set and the uniqueness of weak solutions of the Navier-Stokes equations. Manuscripta Math. **49**, 27-59 (1984).

[24] Yamazaki, M.: Existence, uniqueness and stability of stationary solutions in the weak-L^n space to the Navier-Stokes exterior problem. Recent Topics on Mathematical Theory of Viscous Incompressible Fluid, H. Kozono and Y. Shibata, eds., Lecture Notes in Numerical and Applied Mathematics, 16, Kinokuniya, Tokyo, 225-270 (1998).

(一橋大学助教授)