VaR 計測における重み付き推定値の利用について

大　上　慎　吾

1　VaR 計測とその問題点

金融資産ポートフォリオの価値が，通常想定できる範囲内での最悪の場合，つまり 1% の確率でしか起こらない程度に下落してしまった際に，その予測損失額を示すリスク指標が VaR とよばれる．VaR の計測には，各 t 時点での金融資産の価値 S_t の変化率 $(S_{t+1}-S_t)/S_t$ あるいは対数価格差 $\log S_{t+1}-\log S_t$ の分布を基礎として考える．金融資産の価値の増分とこれら両者の関係は，

$$\begin{aligned} S_{t+1}-S_t &= S_t\left(\frac{S_{t+1}-S_t}{S_t}\right) \\ &= S_t\left[\exp\left\{\log\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)-1\right\}\right] \qquad (1) \\ &= S_t\left[\log\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)+\frac{1}{2}\left\{\log\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)\right\}^2+\cdots\right] \end{aligned}$$

で与えられる．したがって，変化率あるいは対数価格差の「確率 1% でしか起こらない程度の小さな値」が推測できれば，式 (1) を使って VaR が計算できる．言いかえれば，VaR 計測は変化率あるいは対数価格差の確率分布の下側 1% 点の推定という統計手法の問題に帰着するのである．

VaR 計測の最も単純なモデルの 1 つとしては，金融資産の対数価格差 X_t が独立同一 (i. i. d., independent and identically distributed) の正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従うと仮定する．ここで μ は確率分布の平均，σ^2 は分散であ

る．データ系列 $\{x_1, \cdots, x_t\}$ が与えられているとき，その標本平均 m と標本分散 s^2 を各々 μ と σ^2 の推定値として使うと，分布の下側 1% 点は $m-2.33s$ と推定できる．この方法はモデルの仮定が単純で分かりやすく，また計算コストが低いといった利点をもつが，必ずしも精度が高くない．その主な原因は，金融資産の対数価格差の分布が正規分布よりも裾が重いためであるか，もしくはその分散が実際には時点に依存して変化するからだと考えられている．実際に，分散がストカスティックに変化する正規分布から生成されたデータの経験分布は，正規分布よりも裾が重い形をしている．日々不確実に変化するヴォラティリティーを想定するとき，これを過去のデータから予測する方法としては，指数重みを使う方法，GARCH モデルに基づく方法 (Taylor [8])，その他が提案されている．

指数重みを使ったリスク計測の代表的な例である JP モルガン銀行のリスクメトリックスは，以下に示すような指数重み付き平均 m_w と指数重み付き分散 s_w^2 を各々正規分布の平均 μ と分散 σ^2 の推定値として採用している (J. P. Morgan [6])．

$$m_w = \sum_{i=1}^{t} w_i x_{t-i+1} \tag{2}$$

$$s_w^2 = \sum_{i=1}^{t} w_i (x_{t-i+1} - m_w)^2 \tag{3}$$

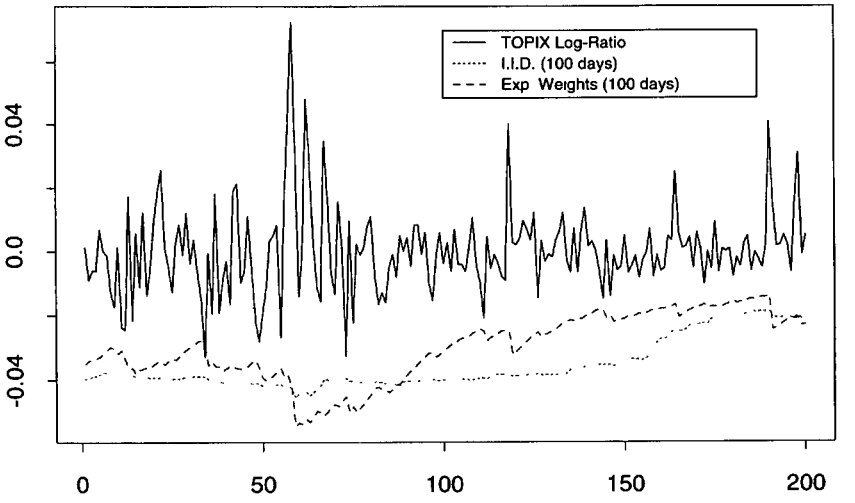
ただしウェイト $w_i, i=1, \cdots, t$ は，

$$w_i = \frac{\lambda^i}{\sum_{i=1}^{t} \lambda^i} \quad \text{and} \quad 0 < \lambda < 1. \tag{4}$$

で与えられる．リスクメトリックスでは，対数価格差は（日次で）ほぼ独立同一分布をもつと仮定しているが，ヴォラティリティーの大きさが時期によっては異なることには注意している．そこで，現時点よりも離れた時期のデータが推定値に大きく影響を与えないようにしようというのが，指数重みを採用している背景になっている．

図 1 は，92 年 6 月 2 日から 93 年 3 月 19 日までの期間における TOPIX の対数価格差の系列と過去 100 日間のデータが与えられたときの下側 1% 点

図 1　TOPIX 日次データの時系列プロット



(1) 対数価格差（TOPIX Log-Ratio）
(2) 独立同一正規分布モデルの 1% 点推定値（I. I. D.）
(3) 指数重み付き推定値を使った 1% 点推定値（Exp. Weights）

推定値の系列をプロットしたものである．独立同一分布に基づく 1% 点推定値にはヴォラティリティーが比較的大きかった期間の観測値の影響が長く残っているのに比べて，指数重み付き推定値（$\lambda = 0.94$）はそうした変化により迅速に反応していることが見てとれる．

Miura and Oue [4] は重み付き尤度関数という概念を導入して，指数重みを使った 1% 点の推定方法が広いクラスの確率分布に拡張できることを示した．これによって，ロジスティック分布や t 分布といった非正規の分布だけではなく，変換モデルのような複雑なモデルに対しても，ストカスティックなヴォラティリティーを想定した 1% 点の予測を行うことが可能である．

2　重み付き尤度関数

以下の部分では，ベクトルは常に列ベクトルとし，a^{T} はベクトル a の転

置を意味するものとする．

$\{w_1, \cdots, w_t\}$ を

$$\sum_{i=1}^{t} w_i = 1, \quad w_i \geq 0, \quad i = 1, \cdots, t \tag{5}$$

を満たすウェイトとする．式（4）で与えられる指数重みはその一例である．今 $f(\cdot|\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Theta$ をパラメータ θ で規定される密度関数の族とすると，その重み付き尤度関数は

$$L_w(\boldsymbol{\theta}) = \Pi_{i=1}^{t} f(x_{t-i+1}|\boldsymbol{\theta})^{w_i} \tag{6}$$

で定義される．式（6）の1つの解釈は，観測値 x_i が各々1つずつではなく tw_i 個手元にあると考える．すると，各 tw_i 個ずつの観測値に基づく尤度関数は $[L_w(\boldsymbol{\theta})]^t$ で与えられる．例として，$\boldsymbol{\theta}=(\mu, \sigma^2)^{\mathrm{T}}$，$f(\cdot|\boldsymbol{\theta})$ を正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の密度関数

$$f(x|\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

とすると，重み付き尤度関数（6）を最大とするような θ の値 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}=(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2)^{\mathrm{T}}$ は式（2）および（3）で定義される重み付き推定値

$$\tilde{\mu} = m_w, \quad \tilde{\sigma}^2 = s_w^2$$

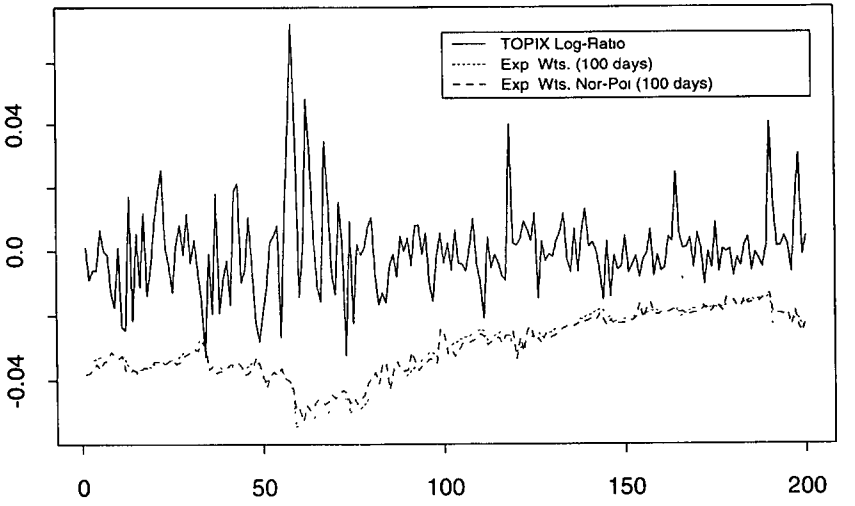
である．

重み付き尤度関数の持つ利点の1つは，正規分布に限らない広いクラスの確率モデルに対して適用可能であるという一般性である．例えば，変換モデル（三浦 [2]，Miura and Tsukahara [5]）を使って，各時点での正規分布からの歪みをその都度補正するといったことも可能である．$f(\cdot|\boldsymbol{\theta})$ を非正規の密度関数，$\tilde{\boldsymbol{\theta}}=\tilde{\boldsymbol{\theta}}(x)$ を重み付き尤度関数に基づく θ の推定値とすると，1% 点は $F^{-1}(0.01|\tilde{\boldsymbol{\theta}})$ で与えられる．ただしここで $F(\cdot|\boldsymbol{\theta})$ は $f(\cdot|\boldsymbol{\theta})$ の分布関数

$$F^{-1}(x|\boldsymbol{\theta}) = \int_{-\infty}^{x} f(y|\boldsymbol{\theta})dy$$

である．$\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ として，例えば重み付き尤度関数を最大とするような重み付き最

図 2　TOPIX 日次データの時系列プロット



(1) 対数価格差（TOPIX Log-Ratio）
(2) 指数重み付き推定値（正規分布）を使った 1% 点推定値（Exp. Wts.）
(3) 指数重み付き推定値（Truncated Poisson Compound）を使った 1% 点推定値（Exp. Wts. Nor-Poi）.

尤推定値などを使うことができる.

図 2 は，図 1 と同じデータおよび指数ウェイトを使って，リスクメトリックスの指数重み付き推定値を使った 1% 点と変換モデルの重み付き最尤推定値を使った 1% 点とを比較したものである．ここで使われている Truncated Poisson Compound 変換モデルは正規分布からの対称性の崩れを表現することができる（Miura and Oue [4]）．対数価格差に大きな正の値が比較的頻繁に出ている，つまり分布が右に偏っている時期においては，単純な指数重み付き推定値は下側 1% 点を過大評価していることが分かる．λ の値を小さくしてやれば，2 つのモデルの差はさらにはっきりとするだろう．

3　重み付き対数尤度関数と情報量

これまでデータ分析例を使って，重み付き尤度関数に基づく 1% 点推定値

が，ヴォラティリティーの変化により素早く対応することを見てきた．しかし式（6）で定義される重み付き尤度関数が実際に何を推定しているのかについては明らかにしていない．この問題を考えるにあたっては，式（6）よりもその自然対数をとった重みつき対数尤度関数

$$l_w(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{t} w_i \log f(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{\theta}) \qquad (7)$$

を使う方が便利である．本節では赤池の考え方にならって，統計的推定の問題を情報量という視点から見ることにしよう（Akaike [1]，坂本，石黒，北川 [7]）．

$g_{t+1}(\cdot)$ を $t+1$ 時点の対数価格差 X_{t+1} の「真の」密度関数とする．各 $\theta\in\Theta$ の値に対して，モデル $f(\cdot|\boldsymbol{\theta})$ に関する Kullback-Leibler 情報量（以下 K-L 情報量）は次の通りに定義される．

$$I(g_{t+1}(\cdot);f(\cdot|\boldsymbol{\theta})) = \int \log\left\{\frac{g_{t+1}(x)}{f(x|\boldsymbol{\theta})}\right\} g_{t+1}dx$$
$$= \int g_{t+1}(x)\log g_{t+1}(x)dx - \int g_{t+1}(x)\log f(x|\boldsymbol{\theta})dx \qquad (8)$$

K-L 情報量は次の 1 および 2 を満たし，モデルの真の分布からの隔たりを測る基準として採用することができる．

1. $I(g;f) \geq 0$
2. $I(g;f) = 0 \Leftrightarrow g = f$

式（8）の右辺の第 1 項はモデルに依存しない量であるから，右辺の第 2 項

$$E_Z[\log f(Z|\boldsymbol{\theta})] = \int g_{t+1}(x)\log f(x|\boldsymbol{\theta})dx \qquad (9)$$

が大きいほど K-L 情報量は小さいことが分かる．ただしここで Z は真の密度関数 g_{t+1} に従う確率変数である．式（9）で定義される量は，モデル $f(\cdot|\boldsymbol{\theta})$ の平均対数尤度と呼ばれる．

もし対数価格差 $X_i, i=1,\cdots,t$ が全て同じ周辺分布をもつ，つまり $g_1=\cdots=g_t$ である場合には，t 個の確率変数

$$\log f(X_i|\boldsymbol{\theta}),\quad X_i \sim g_i,\quad i=1,\cdots,t \tag{10}$$

の期待値は全て等しくなる．したがって $X_i, i=1,\cdots,t$ に基づく平均対数尤度 (9) の推定量として，

$$\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}\log f(X_i|\boldsymbol{\theta}) \tag{11}$$

が不偏であることが分かる．また，式 (11) を最大とするような最尤推定値 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ を使って，X_{t+1} の予測密度関数は $f(\cdot|\hat{\boldsymbol{\theta}})$ で与えられる．ところが対数価格差の周辺分布が少しずつ変化しているような状況においては，(10) はもはや等しい期待値をもつとは限らない．そこで，式 (11) のような単純平均よりも，適切なウェイト $w_i, i=1\cdots,t$ を使ったスムージング (smoothing) 推定量

$$\sum_{i=1}^{t} w_i \log f(X_i|\boldsymbol{\theta})$$

の方がバイアスや予測誤差を小さくすることができる (Hastie and Tibshirani [3]).

4　おわりに

本稿では，Miura and Oue [4] の重み付き尤度関数による1% 点の推定法を紹介し，また重み付き対数尤度関数 (7) が平均対数尤度のスムージング推定量であることを示した．

重み付き尤度関数に基づく推定値の理論的性質については研究の余地が多く残されている．今後，特定の確率モデルを仮定した下での重み付き最尤推定値の漸近分布などについて，さらに研究が進められることになるだろう．また，本論文ではウェイトを常に固定した値として扱ってきたが，これをデータから推定することも考えられる．このような手法に関してはスムージング推定量に関する研究成果を応用することが期待できる．

参考文献

[1] Akaike, H. (1973) Information Theory and an Extension of the Maxi-

mum Likelihood Principle. *Inter. Symp. on Information Theory* (Petrov, B. N. and Csaki, F. eds.), Akademiai Kiado, Budapest, 267-281.

[2] 三浦良造「形状母数の推定」『一橋論叢』第 103 巻 第 5 号 523-535

[3] Hastie, T. J. and Tibshirani, R. J. (1990) *Generalized Additive Models*. Chapman and Hall.

[4] Miura, R. and Oue, S. (1997) A Measurement of Heaviness of Tails for the Distribution of Log-Ratio of Financial Variables I : Transformation Models and Exponentially Weighted Likelihood. *Hitotsubashi University Faculty of Commerce Working Paper Series*, **28**

[5] Miura, R. and Tsukahara, H. (1993) One-sample Estimation for Generalized Lehmann's Alternative Models. *Statistica Sincia*, **3**, 1, 83-101.

[6] J. P. Morgan (1995) *Technical document 3rd. ed.*

[7] 坂本慶行，石黒真木夫，北川源四郎 (1983)『情報量統計学』共立出版

[8] Taylor, S. (1994) Modeling Stochastic Volatility : A Review and Comparative Study. *Mathematical Finance*, **4**, 2, 183-204.

(一橋大学専任講師)