

差異情報下の競争的証券市場における 資産価格付けの基本定理について

星 野 良 明

第1節 はじめに

本稿の目的は私的情報を明示的に導入して Dybvig and Ross (1987) による資産価格付けの基本定理 (Fundamental Theorem of Asset Pricing) を理論的に分析することである。より具体的には、無裁定、状態価格、そして個別経済主体の最適性という3つの概念の関係を2期間の純粋交換経済のモデルにおいて分析する。

証券価格付けの理論には大別して2つのアプローチがある。ひとつは市場を構成する経済主体の行動を明示的には定式化せずに観察可能な証券価格体系に対する無裁定条件のみから証券価格付けを行うアプローチである。もう一つは市場を構成する経済主体の行動を必ずしも観察可能とは限らない最適化問題として定式化しその問題に解が存在するための条件から資産価格付けを行うアプローチである。この2つの異なるアプローチは状態価格 (state price) の概念によって関連づけることが可能である。直感的には、将来時点での不確実な経済状態の生起に依存して1円を受け取るために現時点で必要な金額がその状態の状態価格である。状態価格は証券価格とその証券の将来配当の状態価格による評価額とを一致させるものとして定義される。このとき、状態価格の存在は無裁定条件あるいは最適解の存在の含意として導かれ、2つのアプローチが関連づけられる。よって、対称情報下の経済における証券価格付けに関してはすでに膨大な研究がなされているが、それらは裁定、状態価格、そして個別経済主体の最適性の関係の研究と表現されること

になる。

対称情報下の経済における証券価格付けの理論に関する上記のような統一的な視点は Dybvig and Ross (1987) において資産価格付けの基本定理として与えられた。その定理は (NA) 裁定は存在しない；(SP) 正值線形価格付けルールが存在する；(OP) 単調な選好を持つある経済主体に対して最適なポートフォリオが存在する、という3つの条件の同値性を主張するものである。

本稿ではこの資産価格付けの基本定理を状態集合が有限集合であり、各経済主体は不確実性に関して私的情報を有し、かつ証券の取引機会が1回のみである経済において定式化し、その成立を検討する。資産価格付けの基本定理自体を分析の対象とした研究で著者の知るほとんど唯一の文献は Back and Pliska (1991) である。彼らは状態集合が一般の集合で対称情報の場合における基本定理について議論している。Harrison and Kreps (1979) 流の不確実性を特定化しない一般的な多期間証券市場モデルに私的情報を導入して資産価格付けを議論している著者の知るほとんど唯一の文献は Duffie and Huang (1986) である。しかし、彼らは基本定理自体を考察の対象としているわけではなく、状態集合が一般の集合の場合ある経済主体にとって裁定が存在しないことと彼にとって状態価格が存在することの同値性について議論している。

本稿の構成は次のようである。第2節で分析の対象となる経済を定義する。第3節で差異情報下での裁定と状態価格の定義を与える。そして、第4節で基本定理の差異情報下での定式化とその証明を行う。

第2節 経済と均衡

2-1 (不確実性の表現) 有限の経済主体から構成される2期間(第1期と第2期)の純粹交換経済を考える。 A を経済主体の集合とし、個々の経済主体を a で表す。経済主体が意志決定の際に考慮する外生的パラメーターの記述の集合を Ω で表し、自然の状態(state of Nature)の集合と呼ぶ。 Ω の

元を ω で表す。このとき、不確実性は次のように表現される。「自然 (Nature) は事前に Ω のある元を選択する。しかし、経済主体は Ω のどの元が自然によって選択されたのかを知らない。」自然が事前に選択した Ω の元を真の状態 (true state) と呼ぶ。 $\omega \in \Omega$ は自然の状態の完全な特定化である。 E を Ω の部分集合とする。真の状態が E の元であるとき E が実現する、あるいは起こるといふ。経済主体が実現し得ると考えている Ω の部分集合の集合を Ω 上の σ -加法族 F で表す。 F の元を事象 (event) と呼ぶ。可測空間 (Ω, F) により経済主体が直面する不確実性を表現する。 Ω は K 個の元からなる有限集合であり、 F は Ω のベキ集合であることを以下では仮定する。

2-2 (情報の表現) 経済主体 a の情報は F の部分 σ -加法族 F^a によって表現される。その解釈は次のようである。「経済主体 a は第 1 期に F^a の各元が起きているか否かを知る。」 $\{F^a : a \in A\}$ の上限を $\bigvee_{a \in A} F^a$ で表す。 σ -加法族 $\bigvee_{a \in A} F^a$ は経済の全構成員の情報を集めて得られた、すべての構成員の情報よりも詳しい情報を表す。 F^a から生成された分割を $\mathcal{A}(F^a)$ で表す。 $\omega \in \Omega$ を含む $\mathcal{A}(F^a)$ の元を $\mathcal{A}(F^a)(\omega)$ で表す。この分割 $\mathcal{A}(F^a)$ を経済主体の私的情報の別表現として解釈する。即ち、「経済主体 a は分割 $\mathcal{A}(F^a)$ を私的情報としてもつならば、真の状態 $\omega \in \Omega$ をその元とする唯一の事象 $\mathcal{A}(F^a)(\omega)$ が実現していることを第 1 期に知ることが出来る。」

2-3 (経済) 第 2 期に 1 種類のみ物理的に識別された財が存在する。よって、財空間は R である。各経済主体の消費集合を $X^a = R_+$ とする。各経済主体は不確実な初期保有を第 2 期にのみ持つ。経済主体 a の第 2 期における初期保有量を Ω 上の関数 $e^a : \Omega \rightarrow X^a$ で表す。経済主体 a の不確実性を考慮しない財消費に対する選好を効用関数 $u^a : X^a \rightarrow R$ で表す。財消費から得る効用は自然の状態に依存しないことを仮定する。また、関数 $u^a : X^a \rightarrow R$ は連続、狭義凹、そして狭義単調増加であることを仮定する。市場が開かれる前

の時点で各経済主体 a が持つ私的情報は F^a で与えられるものとする。

N 種類の証券が経済主体による財の状態間移転の手段として存在する。証券とは真の状態に依存して第2期に財単位で支払われる配当に対する請求権である。各証券 $n=1, \dots, N$ を Ω から財空間への関数 $d_n: \Omega \rightarrow R$ により表現する。 $d_n(\omega)$ は証券 n を一単位保有する経済主体に対して真の状態が ω のとき受け渡される財の数量を表す。証券のネットの供給量はゼロとし、空売りを許す。 D を証券の集合とする。即ち、 $D \equiv \{d_n: n=1, \dots, N\}$ 。集合 D を証券構造 (security structure) と呼ぶ。証券ポートフォリオを $\theta \in R^N$ で表す。以下では、あるポートフォリオ $\theta \in R^N$ が存在してすべての状態 $\omega \in \Omega$ において $\sum_{n=1}^N d_n(\omega)\theta_n > 0$ を満たすと仮定する。

経済主体 a は意志決定を私的情報 F^a を利用して行う。よって、経済主体 a が選択する各証券の取引量は自然の状態に依存するから、それを $\Theta^a: \Omega \rightarrow R^N$ で表し、ポートフォリオ関数と呼ぶ。このとき、市場で成立する証券価格も自然の状態に依存することになるから、それを $q: \Omega \rightarrow R^N$ で表し、価格関数と呼ぶ。価格関数が各経済主体に共通に伝達する情報を価格関数 q から生成される σ -加法族 $\sigma(q)$ によって表す。このことから各経済主体が意志決定をする際に利用可能な情報は $\sigma(F^a \cup \sigma(q))$ となる。この σ -加法族を H^a で表す。

各経済主体は第1期において、自身の初期保有、証券配当に関する主観的確率評価を持つ。それを (Ω, F) 上の確率測度 P^a で表す。 P^a を事前主観的確率と呼ぶ。各経済主体 $a \in A$ と空集合を除くすべての $E \in F$ に対して $P^a(E) > 0$ を仮定する。経済主体は私的情報を受け取るから、彼はポートフォリオを決定するのに事前主観的確率をそのまま用いることはしない。彼は私的情報を用いて事象の確率的評価を調整する。このことは条件付き確率を用いることを意味する。

2-4 (均衡) 上述の経済を $[(u^a, P^a, e^a, F^a)_{a \in A}, D]$ で表す。均衡概念としては合理的期待均衡を採用する。合理的期待均衡に関する基本的文献である

差異情報下の競争的証券市場における資産価格付けの基本定理について (131)

Radner (1979), Allen (1981) が分析の対象とした経済は、空売りが許容された証券市場を含んでいない。そのような証券市場を含む経済における合理的期待均衡の分析は McAllister (1990) によって行われており、本稿の均衡の定義はそれに依拠している。

定義 2-1: 経済 $[(u^a, P^a, e^a, F^a)_{a \in A}, D]$ の均衡は以下の 3 つの条件を満たす各経済主体のポートフォリオ関数と価格関数とからなる組 $(\theta^1, \dots, \theta^A, q)$ である。

(E-1) 価格関数 $q: \Omega \rightarrow R^N$ は $\vee_{a \in A} F^a$ -可測である。

(E-2) 各 $a \in A$ に対してポートフォリオ関数 $\theta^a: \Omega \rightarrow R^N$ は H^a -可測関数であり、各 $a \in A$ と $\omega_0 \in \Omega$ に対して $\theta^a(\omega_0)$ は次の問題 (P-1) の解である。

$$(P-1) \quad \max_{\theta \in R^N} E^a \left(u^a \left(e^a + \sum_{n=1}^N d_n \theta_n \right) \middle| H^a \right) (\omega_0)$$

$$\text{subject to } \theta \in \beta^a(q(\omega_0)).$$

ここで、

$$\beta^a(q(\omega_0)) \equiv \{ \theta \in R^N : e^a(\omega) + \sum_{n=1}^N d_n(\omega) \theta_n \geq 0 \quad \text{for all } \omega' \in \mathcal{I}(H^a)(\omega_0) \\ \text{and } q(\omega_0) \cdot \theta \leq 0 \}.$$

(E-3) 各 $\omega_0 \in \Omega$ に対して $\sum_{a=1}^A \theta^a(\omega_0) = 0$.

条件 (E-1) は均衡において価格関数がどの経済主体も受け取らないような情報を含むことを排除している。均衡において価格関数は高々 $\vee_{a \in A} F^a$ -可測である。条件 (E-2) の前半は各経済主体が彼にとって利用可能な情報にのみ基づいて意志決定を行うことを要請している。条件 (E-2) の後半は各経済主体が価格を所与にして予算制約のもとで効用最大化するポートフォリオを選択することを要請している。証券のネットの供給量はゼロであるから条件 (E-3) は証券市場の需給の一致を要請している。本稿では均衡の存

在証明には立ち入らない。以下では経済に均衡が存在することを仮定して分析を進める。

第3節 裁定と状態価格

3-1 (裁定) 競争的市場において決定される証券価格体系が合理的経済主体の行動の結果であると考えるとき、証券価格体系が満たすべき性質のひとつはすべての経済主体に裁定取引を許容しないことである。なぜならば、ある一人の経済主体に裁定を許容する価格体系の下では彼はある方向のポートフォリオを組むことによって費用ゼロで収益を任意の規模で確保可能となり、彼の証券需要は定義されず、そのような価格体系は均衡として実現されないからである。既存の文献において経済主体間の情報差異を明示的に考慮した裁定の定義としては Duffie and Huang (1986) のものがあるが、彼らの設定では意志決定がなされる初期時点での情報の差異が存在しないからその定義を我々の2期間の設定で利用出来ない。そこで本稿では私的情報を伴う場合の裁定の概念を次のように定式化する。

定義 3-1: 価格関数 q と証券構造 D を所与にして、ポートフォリオ関数 $\Theta: \Omega \rightarrow R^N$ は各 $\omega_0 \in \Omega$ において以下の2つの条件 (A-1), (A-2) のいずれかを満たすとき、経済主体 $a \in A$ にとって裁定 (arbitrage for agent a) であると呼ばれる。

(A-1) $q(\omega_0) \cdot \Theta(\omega_0) \leq 0$, かつ

各 $\omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)$ について $\sum_{n=1}^N d_n(\omega') \Theta_n(\omega_0) \geq 0$, かつ
ある $\omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)$ について $\sum_{n=1}^N d_n(\omega') \Theta_n(\omega_0) > 0$;

(A-2) $q(\omega_0) \cdot \Theta(\omega_0) < 0$, かつ

各 $\omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)$ について $\sum_{n=1}^N d_n(\omega') \Theta_n(\omega_0) \geq 0$.

上の定義は Duffie (1992), p. 3 などに見られる対称情報下の市場における裁定の定義を差異情報下に拡張したものである。ある固定された証券価格

体系に対して裁定となるポートフォリオの集合は情報が全くない場合と比べて大きくなる。この点で私的情報を有することの優位性が表現されている。

3-2 (状態価格) 本稿のモデルにおいては第2期において証券市場は開かれないので、証券を保有することから生じる便益は保有するポートフォリオから得られる配当のみで売却することによって得られる利益は存在しない。よって、証券の市場価格はその証券を規定する配当の第1期における価値に等しくなると考えられる。配当は財単位で支払われるから、各状態依存財の第1期における価値がわかれば証券の価格が求められる。経済主体が状態の生起に関する情報を持つから、各状態依存財の第1期における価値は真の状態に依存する。経済主体が来期実現しないことを知っている状態における財の価値はゼロまたは負になる可能性も排除できない。そこで、私的情報を伴う場合の状態価格を次のように定義する。

定義 3-2: 価格関数 q と証券構造 D を所与にして、状態価格ベクトル関数とは次の等式を満たす Ω 上の K 次元非ゼロベクトル値関数 $\rho: \Omega \rightarrow R^K \setminus \{0\}$ である。各 $\omega_0 \in \Omega$ に対して、

$$q_n(\omega_0) = \sum_{\omega' \in \Omega} \rho_{\omega'}(\omega_0) d_n(\omega'), n = 1, \dots, N.$$

Duffie (1992), p. 3 における状態価格ベクトルの定義との違いは、本稿の定義では状態価格が真の状態に依存し、正かつ非ゼロではなく非ゼロとなっている点である。 $\rho_{\omega'}(\omega_0)$ は真の状態が ω_0 であるとき、自然の状態 ω' における財1単位の第1期における価値を表している。この状態価格ベクトル関数が Dybvig and Ross (1987) の呼ぶところの価格付けのルールに対応する。

第4節 差異情報下の競争的証券市場における資産価格付けの基本定理

本節で本論文の主要な結果を述べる。ある経済主体にとって裁定が存在し

ないこと,あるいは最適な証券ポートフォリオが存在することは,それぞれ状態価格ベクトル関数が存在することを意味するが,その逆は必ずしも成立しないことが示される。

4-1 (裁定と状態価格) まず,ある経済主体にとって裁定が存在しないならば,状態価格ベクトル関数が存在することを示す。その証明方法は本質的に Duffie (1992), pp. 4-5 と同じである。

命題 4-1: 価格関数 q と証券構造 D を所与にして, 経済主体 $a \in A$ にとって裁定が存在しないならば, 次の条件を満たす状態価格ベクトル関数 $\rho^a: \Omega \rightarrow R^K \setminus \{0\}$ が存在する: 各 $\omega_0 \in \Omega$ と $\omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)$ について, $\rho_{\omega'}^a(\omega_0) > 0$.

各 $\omega_0 \in \Omega$ について集合 $\mathcal{A}(H^a)(\omega_0)$ の添数集合を $\{1, 2, \dots, K(a, \omega_0)\}$ とする。そして, 集合 $L^a(\omega_0)$, $K^a(\omega_0)$, $M^a(\omega_0)$ を次のように定める。

$$\begin{aligned} L^a(\omega_0) &\equiv R \times R^{K(a, \omega_0)}, \quad K^a(\omega_0) \equiv R_+ \times R_+^{K(a, \omega_0)}, \\ M^a(\omega_0) &\equiv \left\{ (-q(\omega_0) \cdot \theta, \sum_{n=1}^N d_n(\omega_1) \theta_n, \dots, \sum_{n=1}^N d_n(\omega_{K(a, \omega_0)}) \theta_n) \in R \right. \\ &\quad \left. \times R^{K(a, \omega_0)} : \theta \in R^N \right\}. \end{aligned}$$

補題 4-1: 価格関数 q と証券構造 D を所与にして, 経済主体 $a \in A$ にとって裁定が存在しないことの必要十分条件は, 各 $\omega_0 \in \Omega$ において $M^a(\omega_0) \cap K^a(\omega_0) = \{0\}$ が成立することである。

証明: (必要性) 価格関数 q と証券構造 D を所与にして, 経済主体 a にとって ω_0 において裁定が存在しないことを仮定する。 $\theta = 0 \in R^N$ と置くことができるから, $\{0\} \subset M^a(\omega_0) \cap K^a(\omega_0)$ である。次に逆の包含関係を示す。 $x \neq 0$ を満たす $x \in M^a(\omega_0) \cap K^a(\omega_0)$ が存在すると仮定する。すると, この x

に対応してある $\hat{\theta} \in R^N$ が存在して, 「 $-q(\omega_0) \cdot \hat{\theta} \geq 0$ かつ

$(\forall \omega \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)) \sum_{n=1}^N d_n(\omega) \hat{\theta}_n \geq 0$ かつ $(\exists \omega \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)) \sum_{n=1}^N d_n(\omega) \hat{\theta}_n > 0$ 」 または,

「 $-q(\omega_0) \cdot \hat{\theta} > 0$ かつ $(\forall \omega \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)) \sum_{n=1}^N d_n(\omega) \hat{\theta}_n \geq 0$ 」のいずれかを

満たす. このことは $\hat{\theta}$ が経済主体 a にとって ω_0 において裁定であることを意味して, 仮定に矛盾する.

(十分性) $M^a(\omega_0) \cap K^a(\omega_0) = \{0\}$ を仮定する. 価格関数 q と証券構造 D を所与にして経済主体 a にとって ω_0 において裁定が存在すると仮定する. このことはある $x \in M^a(\omega_0) \cap K^a(\omega_0)$ が存在し $x \in K^a(\omega_0) \setminus \{0\}$ を満たすことを意味して, $M^a(\omega_0) \cap K^a(\omega_0) = \{0\}$ に矛盾する. ■

命題 4.1 の証明: $M^a(\omega_0) \cap K^a(\omega_0) = \{0\}$ を仮定する. $M^a(\omega_0)$ は $L^a(\omega_0)$

の閉凸線形部分空間, $K^a(\omega_0)$ は $L^a(\omega_0)$ の閉凸錘であるから, $M^a(\omega_0)$ と

$K^a(\omega_0)$ に分離超平面定理が適用できる. よって, ある線形汎関数 $f: L^a(\omega_0)$

$\rightarrow R$ が存在して, $(\forall z \in M^a(\omega_0)) (\forall x (\neq 0) \in K^a(\omega_0)) f(z) < f(x)$ を満たす.

$M^a(\omega_0)$ は $L^a(\omega_0)$ の線形部分空間であるから, $(\forall z \in M^a(\omega_0)) f(z) = 0$ が成

立する. よって, ある $\delta^a(\omega_0) \in R_{++}$ とある $\phi^a(\omega_0) \in R_{++}^{K^a(\omega_0)}$ が存在して,

$(\forall (v, c) \in L^a(\omega_0)) f(v, c) = \delta^a(\omega_0)v + \phi^a(\omega_0) \cdot c$. 即ち, 任意の $\theta \in R^N$ に対して,

$q(\omega_0) \cdot \theta = \frac{\phi^a(\omega_0)}{\delta^a(\omega_0)} \cdot \left(\sum_{n=1}^N d_n(\omega_1) \theta_n, \dots, \sum_{n=1}^N d_n(\omega_{K^a(\omega_0)}) \theta_n \right)$. したがって, 任意の n

$= 1, \dots, N$ に対して, $q_n(\omega_0) = \sum_{\omega \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)} d_n(\omega) \left(\frac{\phi_\omega^a(\omega_0)}{\delta^a(\omega_0)} \right)$. 各 $\omega \in \Omega \setminus \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)$

に対しては $\phi_\omega^a(\omega_0) = 0$ と置けば, 任意の $n = 1, \dots, N$ に対して, $q_n(\omega_0) =$

$\sum_{\omega \in \Omega} d_n(\omega) \left(\frac{\phi_\omega^a(\omega_0)}{\delta^a(\omega_0)} \right)$ となり, 命題の条件を満たす $\omega_0 \in \Omega$ における状態価格ベ

クトル $\rho^a(\omega_0) = \frac{\phi^a(\omega_0)}{\delta^a(\omega_0)}$ を得る. 任意の $\omega_0 \in \Omega$ について上記の議論は成立するから,

状態価格ベクトル関数 $\rho^a: \Omega \rightarrow R^K \setminus \{0\}$ で命題の条件を満たすもの

が存在することが証明された. ■

命題 4.1 の証明の中で経済主体が来期起こらないことを知っている状態に

おける状態価格はすべてゼロと置いて状態価格を構成した. しかし, 裁定が

存在しないとき、経済主体が来期起こらないことを知っている状態における状態価格がゼロに一意に定まるわけではない。それは経済の証券構造に依存することを示すのが次の命題である。

命題 4-2: 価格関数 q と証券構造 D を所与にして、経済主体 $a \in A$ にとって $\omega_0 \in \Omega$ において裁定が存在しないと仮定する。このとき、経済主体 $a \in A$ が起こらないことを知っている状態 $\hat{\omega} \in \Omega \setminus \Delta(H^a)(\omega_0)$ に対して $\sum_{n=1}^N d_n \hat{\theta}_n = I_{\{\hat{\omega}\}}$ を満たすポートフォリオ $\hat{\theta} \in R^N$ が存在するならば、 $\rho_{\hat{\omega}}^a(\omega_0) = 0$ である。ここで、 $I_{\{\hat{\omega}\}}$ は $I_{\{\hat{\omega}\}}(\hat{\omega}) = 1$, $I_{\{\hat{\omega}\}}(\omega) = 0$, $\omega \neq \hat{\omega}$ を満たす関数である。

証明: 命題 4-1 の結果から ω_0 における状態価格ベクトル $\rho^a(\omega_0) \in R^K \setminus \{0\}$ で各 $\omega' \in \Delta(H^a)(\omega_0)$ について $\rho_{\omega'}^a(\omega_0) > 0$ を満たすものが存在する。 $\rho_{\hat{\omega}}^a(\omega_0) > 0$ を仮定する。状態価格ベクトル関数の定義より各 $n=1, \dots, N$ に対して $q_n(\omega_0) = \sum_{\omega' \in \Omega} \rho_{\omega'}^a(\omega_0) d_n(\omega')$ 。このとき、

$$\begin{aligned} q(\hat{\omega}_0) \cdot (-\hat{\theta}) &= -(\hat{\theta}_1 \cdots \hat{\theta}_N) \begin{pmatrix} d_1(\omega_1) \cdots d_1(\omega_K) \\ \vdots \\ d_N(\omega_1) \cdots d_N(\omega_K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{\omega_1}^a(\omega_0) \\ \vdots \\ \rho_{\omega_K}^a(\omega_0) \end{pmatrix} \\ &= -\left(\sum_{n=1}^N d_n(\omega_1) \hat{\theta}_n \rho_{\omega_1}^a(\omega_0) + \cdots + \sum_{n=1}^N d_n(\omega_K) \hat{\theta}_n \rho_{\omega_K}^a(\omega_0) \right) \\ &= -\rho_{\hat{\omega}}^a(\omega_0) \\ &< 0. \end{aligned}$$

そして、任意の $\omega' \in \Delta(H^a)(\omega_0)$ に対して $\sum_{n=1}^N d_n(\omega') (-\hat{\theta}_n) = 0$ 。よって、ポートフォリオ $-\hat{\theta} \in R^N$ は経済主体 a にとって、 ω_0 において裁定となり、命題の仮定に反する。よって、 $\rho_{\hat{\omega}}^a(\omega_0) = 0$ である。■

命題 4-3: 経済主体 $a \in A$ にとって裁定は存在しないための十分条件は、状態価格ベクトル関数 $\rho^a: \Omega \rightarrow R^K \setminus \{0\}$ で、以下の条件を満たすものが存在することである：各 $\omega' \in \Delta(H^a)(\omega_0)$ について $\rho_{\omega'}^a(\omega_0) > 0$ 、かつ各 $\omega' \in \Omega \setminus$

$\mathcal{A}(H^a)(\omega_0)$ について $\rho_{\omega'}^a(\omega_0) = 0$.

証明： ω_0 における状態価格ベクトル $\rho^a(\omega_0) \in R_+^K \setminus \{0\}$ で、各 $\omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)$ について $\rho_{\omega'}^a(\omega_0) > 0$ 、各 $\omega' \in \Omega \setminus \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)$ について $\rho_{\omega'}^a(\omega_0) = 0$ を満たすものが存在すると仮定する。経済主体 a にとって ω_0 において裁定が存在すると仮定する。裁定の定義において (A-1) の場合、あるポートフォリオ $\theta \in R^N$ が存在して、 $q(\omega_0) \cdot \theta \leq 0$ かつ各 $\omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)$ について $\sum_{n=1}^N d_n(\omega') \theta_n \geq 0$ かつある $\omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)$ について $\sum_{n=1}^N d_n(\omega') \theta_n > 0$ を満たす。このとき、第 2, 3 番目の不等式に状態価格 $\rho_{\omega'}^a(\omega_0)$ を乗じて $\mathcal{A}(H^a)(\omega_0)$ 上で和を取れば、
 $\sum_{\omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)} \sum_{n=1}^N d_n(\omega') \rho_{\omega'}^a(\omega_0) \theta_n > 0$ 。仮定より、各 $\omega' \in \Omega \setminus \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)$ について $\rho_{\omega'}^a(\omega_0) = 0$ であるから、 $\sum_{\omega' \in \Omega} \sum_{n=1}^N d_n(\omega') \rho_{\omega'}^a(\omega_0) \theta_n > 0$ 。よって、状態価格ベクトル関数の定義から、 $q(\omega_0) \cdot \theta > 0$ 。これは、 $\theta \in R^N$ が裁定であることに矛盾する。同様にして、(A-2) の場合も矛盾を導くことができる。■

命題 4-1, 4-2 によれば、経済主体 a にとって裁定が存在しないとき、我々が主張できるのは経済主体 a にとって起こり得る状態上では正である状態価格ベクトル関数の存在のみであり、経済主体 a にとって起こり得ない状態上での状態価格は必ずゼロである必要はない。

4-2 (個別経済主体の最適性と状態価格) まず、各経済主体にとって最適な証券ポートフォリオ関数の存在が状態価格ベクトル関数の存在を含意することを示す。本稿では経済主体の効用最大化の一階条件から状態価格ベクトルを具体的に求める方法は採らず、無裁定を経由して間接的に個人の最適性と状態価格とを関係づける。

補題 4-2： 経済主体 $a \in A$ の効用最大化問題 (P-1) が各 $\omega_0 \in \Omega$ において解を持つならば、経済主体 a にとって裁定は存在しない。

証明： 経済主体 a の ω_0 における効用最大化問題 (P-1) の解を $\theta^* \in R^N$ とする。ポートフォリオ $\hat{\theta} \in R^N$ が経済主体 a にとって ω_0 において裁定であると仮定する。

(A-1) の場合：ポートフォリオ $\theta^* + \hat{\theta}$ は $\theta^* + \hat{\theta} \in \beta^a(q(\omega_0))$ を満たす。そして、各 $\omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)$ について $e^a(\omega') + \sum_{n=1}^N d_n(\omega')(\theta_n^* + \hat{\theta}_n) \geq e^a(\omega') + \sum_{n=1}^N d_n(\omega')\theta_n^*$; あるいは $\omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)$ について $e^a(\omega') + \sum_{n=1}^N d_n(\omega')(\theta_n^* + \hat{\theta}_n) > e^a(\omega') + \sum_{n=1}^N d_n(\omega')\theta_n^*$ 。よって、 $E^a\left(u^a\left(e^a + \sum_{n=1}^N d_n(\theta_n^* + \hat{\theta}_n)\right) \middle| H^a\right)(\omega_0) > E^a\left(u^a\left(e^a + \sum_{n=1}^N d_n\theta_n^*\right) \middle| H^a\right)(\omega_0)$ 。この不等式は θ^* の最適性に矛盾する。

(A-2) の場合：仮定より、あるポートフォリオ $\theta \in R^N$ が存在してすべての $\omega \in \Omega$ について $\sum_{n=1}^N d_n(\omega)\theta_n > 0$ を満たす。経済主体 a の ω_0 における効用最大化問題 (P-1) の解が存在するから、 $q(\omega_0)\theta > 0$ である。 $\lambda \equiv \frac{-q(\omega_0)\hat{\theta}}{q(\omega_0)\theta} > 0$ とおく。ポートフォリオ $\theta^* + \hat{\theta} + \lambda\theta$ は $\theta^* + \hat{\theta} + \lambda\theta \in \beta^a(q(\omega_0))$ を満たす。そして、各 $\omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)$ について $e^a(\omega') + \sum_{n=1}^N d_n(\omega')(\theta_n^* + \hat{\theta}_n + \lambda\theta_n) > e^a(\omega') + \sum_{n=1}^N d_n(\omega')\theta_n^*$ である。よって、 $E^a\left(u^a\left(e^a + \sum_{n=1}^N d_n(\theta_n^* + \hat{\theta}_n + \lambda\theta_n)\right) \middle| H^a\right)(\omega_0) > E^a\left(u^a\left(e^a + \sum_{n=1}^N d_n\theta_n^*\right) \middle| H^a\right)(\omega_0)$ である。この不等式は θ^* の最適性に矛盾する。 ■

命題 4-4： 経済主体 $a \in A$ にとって最適な証券ポートフォリオ関数が存在するならば、状態価格ベクトル関数 $\rho^a: \Omega \rightarrow R^K \setminus \{0\}$ で次の条件を満たすものが存在する：各 $\omega_0 \in \Omega$ と $\omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)$ について $\rho_{\omega'}^a(\omega_0) > 0$ 。

証明： 経済主体 a にとって最適な証券ポートフォリオ関数が存在すると仮定する。補題 4-2 から経済主体 a にとって裁定は存在しない。よって命題 4-1 より状態価格ベクトル関数 ρ^a で次の条件を満たすものが存在する：各 $\omega_0 \in \Omega$ と $\omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)$ について $\rho_{\omega'}^a(\omega_0) > 0$ 。 ■

次に、最適な証券ポートフォリオ関数が存在するための十分条件を状態価

格ベクトル関数を用いて示す。最適な証券ポートフォリオ関数の存在を示すために Bolzano-Weierstrass の定理を用いたい。しかし、本稿の設定では経済主体はポートフォリオを選択することによって間接的に第 2 期の消費計画を決定する市場構造になっており、証券の空売りが許されているので直接的に問題 (P-1) の制約を満たすポートフォリオの集合がコンパクトになることを示せない。そこで状態価格ベクトルを用いて第 2 期の消費計画を直接決定する仮想的な市場構造のもとでの効用最大化問題をつくり、その解を問題 (P-1) と関連づけることにより最適な証券ポートフォリオの存在を証明する。本稿では経済主体は来期起り得ることを知っている状態上のみで消費計画を立てることを仮定する。

経済の証券構造の下で各経済主体にとって物理的に実行可能な消費計画の集合を次のように定義する。

$$MC^a(\omega_0) \equiv \left\{ c \in R_+^{K(a, \omega_0)} : (\exists \theta \in R^N) (\forall \omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)) \right. \\ \left. c_{\omega'} = e^a(\omega') + \sum_{n=1}^N d_n(\omega') \theta_n \right\}.$$

経済主体 a に対して各 $\omega_0 \in \Omega$ において第 2 期の消費計画をを直接決定する仮想的な市場構造のもとでの効用最大化問題を状態価格ベクトル関数 ρ^a を所与として次のように定義する。

$$(P-2) \quad \max_{c \in R_+^{K(a, \omega_0)}} \sum_{\omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)} u^a(c_{\omega'}) \frac{P^a(\omega')}{P^a(\mathcal{A}(H^a)(\omega_0))} \\ \text{subject to } c \in \hat{\beta}^a(\rho^a(\omega_0)).$$

ここで、

$$\hat{\beta}^a(\rho^a(\omega_0)) \equiv \left\{ c \in MC^a(\omega_0) : \sum_{\omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)} \rho_{\omega'}^a(\omega_0) c_{\omega'} = \sum_{\omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)} \rho_{\omega'}^a(\omega_0) e^a(\omega') \right\}.$$

所与の消費計画 $c \in R_+^{K(a, \omega_0)}$ を物理的に実行可能とするポートフォリオの集合を $V^a(c, \omega_0)$ で表す。

$$V^a(c, \omega_0) \equiv \left\{ \theta \in R^N : (\forall \omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)) c_{\omega'} = e^a(\omega') + \sum_{n=1}^N d_n(\omega') \theta_n \right\}.$$

補題 4-3: 以下の条件をみたす状態価格ベクトル関数 $\rho^a: \Omega \rightarrow R^X \setminus \{0\}$ が存在するならば各 $\omega_0 \in \Omega$ において問題 (P-2) の解 $c^*(\omega_0)$ が存在し、かつ各 $\omega_0 \in \Omega$ において任意の $\theta^* \in V^a(c^*(\omega_0), \omega_0)$ は問題 (P-1) の解となる: 各 $\omega_0 \in \Omega$ と $\omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)$ について $\rho_{\omega'}^a(\omega_0) > 0$, 各 $\omega_0 \in \Omega$ と $\omega' \in \Omega \setminus \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)$ について $\rho_{\omega'}^a(\omega_0) = 0$.

証明: 補題の条件から $\omega_0 \in \Omega$ において予算集合 $\beta^a(\rho^a(\omega_0))$ はコンパクト集合になり、かつ目的関数は連続関数であるから Bolzano-Weierstrass の定理より各 $\omega_0 \in \Omega$ において問題 (P-2) の解 $c^*(\omega_0)$ が存在する。次に、各 $\omega_0 \in \Omega$ と各 $\theta^* \in V^a(c^*(\omega_0), \omega_0)$ について $\theta^* \in \beta^a(q(\omega_0))$ であることを示す。

θ^* の定義により各 $\omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)$ について $c_{\omega'}^*(\omega_0) = e^a(\omega') + \sum_{n=1}^N d_n(\omega') \theta_n^*$. $c^*(\omega_0) \in M^a(\omega_0)$ であるから、任意の $\omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)$ について $e^a(\omega') + \sum_{n=1}^N d_n(\omega') \theta_n^* \geq 0$. また、 $c_{\omega'}^*(\omega_0) = e^a(\omega') + \sum_{n=1}^N d_n(\omega') \theta_n^*$ の両辺の状態価格 $\rho_{\omega'}^a(\omega_0)$ を乗じて $\mathcal{A}(H^a)(\omega_0)$ 上で和を取って整理すれば、

$$\sum_{\omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)} \rho_{\omega'}^a(\omega_0) c_{\omega'}^*(\omega_0) = \sum_{\omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)} \rho_{\omega'}^a(\omega_0) e^a(\omega') + \sum_{n=1}^N \sum_{\omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)} \rho_{\omega'}^a(\omega_0) d_n(\omega')$$

θ_n^* . 補題の条件から各証券 n について $q_n(\omega_0) = \sum_{\omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)} \rho_{\omega'}^a(\omega_0) d_n(\omega')$ であるから $\sum_{\omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)} \rho_{\omega'}^a(\omega_0) c_{\omega'}^*(\omega_0) = \sum_{\omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)} \rho_{\omega'}^a(\omega_0) e^a(\omega') + q(\omega_0) \cdot \theta^*$. $c^*(\omega_0) \in \beta^a(\rho^a(\omega_0))$ より $q(\omega_0) \cdot \theta^* = 0$ を得る。よって $\theta^* \in \beta^a(q(\omega_0))$ である。このとき、任意の $c \in \beta^a(\rho^a(\omega_0))$ について、

$$\begin{aligned} E^a\left(u^a\left(e^a + \sum_{n=1}^N d_n \theta_n^*\right) \middle| H^a\right)(\omega_0) &= \sum_{\omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)} u^a(c_{\omega'}^*(\omega_0)) \frac{P^a(\omega')}{P^a(\mathcal{A}(H^a)(\omega_0))} \\ &\geq \sum_{\omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)} u^a(c_{\omega'}(\omega_0)) \frac{P^a(\omega')}{P^a(\mathcal{A}(H^a)(\omega_0))}. \end{aligned}$$

ここで、 $\beta^a(q(\omega_0)) \subset \bigcup_{c \in \beta^a(q(\omega_0))} V^a(c, \omega_0)$ であるから、任意の $\theta \in \beta^a(q(\omega_0))$ について、

$$\begin{aligned} E^a\left(u^a\left(e^a + \sum_{n=1}^N d_n \theta_n^*\right) \middle| H^a\right)(\omega_0) &\geq \sum_{\omega' \in \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)} u^a\left(e^a(\omega') + \sum_{n=1}^N d_n(\omega') \theta_n\right) \frac{P^a(\omega')}{P^a(\mathcal{A}(H^a)(\omega_0))} \end{aligned}$$

差異情報下の競争的証券市場における資産価格付けの基本定理について (141)

$$= E^a \left(u^a \left(e^a + \sum_{n=1}^N d_n \theta_n \right) \middle| H^a \right) (\omega_0).$$

したがって $\theta^* \in V^a(c^*(\omega_0), \omega_0)$ は問題 (P-1) の解である。■

上記の補題では各 $\omega_0 \in \Omega$ について $\Omega \setminus \Delta(H^a)(\omega_0)$ 上の状態がゼロである状態価格ベクトル関数の存在が十分条件となっている。しかし、各 $\omega_0 \in \Omega$ について $\Delta(H^a)(\omega_0)$ 上に制限した証券配当の評価を価格に等しくさせる状態価格ベクトル関数の存在を仮定すれば補題の成立には十分であり、 $\Omega \setminus \Delta(H^a)(\omega_0)$ 上の状態価格が必ずゼロである必要はない。

命題 4-5: 各経済主体 $a \in A$ にとって最適な証券ポートフォリオ関数が存在するための十分条件は次の条件を満たす状態価格ベクトル関数が存在することである: 各 $\omega_0 \in \Omega$ と $\omega' \in \Delta(H^a)(\omega_0)$ について $\rho_{\omega'}^a(\omega_0) > 0$, 各 $\omega_0 \in \Omega$ と $\omega' \in \Omega \setminus \Delta(H^a)(\omega_0)$ について $\rho_{\omega'}^a(\omega_0) = 0$.

証明: 補題 4-3 より命題の条件を満たす状態価格ベクトル関数が存在すれば経済主体 $a \in A$ にとって最適な証券ポートフォリオ関数が存在する。■

4-3 (差異情報下の資産価格付けの基本定理) 命題 4-1, 4-3, 4-4, 4-5 の主張をまとめることにより、次のような差異情報下の競争的証券市場における資産価格付けの基本定理を得る。

定理 4-1: 経済 $[(u^a, P^a, e^a, F^a)_{a \in A}, D]$ において各経済主体 $a \in A$ にとって次の 2 つの命題が成立する: (NA) 裁定が存在しない, あるいは (OP) 最適なポートフォリオ関数が存在するならば, (SP) 状態価格ベクトル関数で各 $\omega_0 \in \Omega$ と $\omega' \in \Delta(H^a)(\omega_0)$ について $\rho_{\omega'}^a(\omega_0) > 0$ を満たすものが存在する。逆に, (SP)' 状態価格ベクトル関数で各 $\omega_0 \in \Omega$ と $\omega' \in \Delta(H^a)(\omega_0)$ について $\rho_{\omega'}^a(\omega_0) > 0$, 各 $\omega_0 \in \Omega$ と $\omega' \in \Omega \setminus \Delta(H^a)(\omega_0)$ について $\rho_{\omega'}^a(\omega_0) = 0$ であるもの存

在するならば、(NA) 裁定が存在せず、かつ (OP) 最適なポートフォリオ関数が存在する。

上記の定理から $\Omega \setminus \mathcal{A}(H^a)(\omega_0)$ 上での状態価格の正值性は一般に保証されないから、無裁定あるいは最適なポートフォリオの存在の含意として導かれる価格付けルールは正值性を満たさない。また、価格付けルールは形式的には経済の証券構造 D によって複製可能な証券以外の証券にも価値を与えるが、私的情報を伴う本稿の設定ではその証券の市場価格が価格付けルールによる評価値に等しくなるかは疑問である。経済への新たな証券の導入は証券価格体系の情報伝達能力に影響を与え得るので経済主体の事後情報集合 H^a を変化させる可能性が生じる。よって、状態価格ベクトル関数そのものが変化する可能性があるからである。

参考文献

- Allen, B. (1981), "Generic Existence of Completely Revealing Equilibrium for Economies with Uncertainty when Prices Convey Information," *Econometrica*, Vol. 49, 1173-1199.
- Arrow, K. J. (1964), "The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-bearing," *Review of Economic Studies*, Vol. 31, 91-96.
- Back, K. and S. R. Pliska (1991), "On the Fundamental Theorem of Asset Pricing with an Infinite State Space," *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 20, 1-18.
- Duffie, D. (1992), *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton: Princeton University Press.
- Duffie, D. and C. Huang (1986), "Multiperiod Security Markets with Differential Information-Martingales and Resolution Times," *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 15, 283-303.
- Dybvig, P. H. and S. A. Ross (1987), "Arbitrage," In J. Eatwell, M. Milgate, and P. Newman, *The New Palgrave, A Dictionary of Economics*, 100-106. London: MacMillan.
- Harrison, J. M. and D. M. Kreps (1979), "Martingale and Arbitrage in Multiple

差異情報下の競争的証券市場における資産価格付けの基本定理について (143)

riod Securities Markets," *Journal of Economic Theory*, Vol. 20, 381-408.

McAllister, P. H. (1990), "Rational Behavior and Rational Expectations," *Journal Economic Theory*, Vol. 52, 332-363.

Radner, R. (1979), "Rational Expectations Equilibrium : Generic Existence and the Information Revealed by Prices," *Econometrica*, Vol. 47, 655-678.

* 本論文は著者の修士論文の 2, 4 章を修正, 加筆したものである.

(一橋大学大学院博士課程)