

## 《研究ノート》

# 株価・為替レート時系列変動の長期依存性の検証

刈屋 武 昭  
勝 浦 正 樹

### 1 序

一般に定常時系列プロセス  $\{x_t\}$  が

$$(1.1) \quad \Delta \equiv \sum_{k=0}^{\infty} |\gamma_k| = \infty, \text{ ただし, } \gamma_k \text{ は } k \text{ 次の自己共分散}$$

を満たすとき、 $\{x_t\}$  は長期依存性をもつという。本稿の目的は、Lo (1991) に基づいて、日本の株価収益率（変化率）および円・ドル為替レート変化率（以下収益率）の時系列変動の中に長期依存性が存在するかどうかを検証することである。Lo は、Hurst の R/S 統計量から短期依存性を取り除いた修正 R/S 統計量に基づいて、アメリカの株式指数の収益率変動には、長期依存性が存在するという証拠はない、と結論する。本稿でも、日本の株価については、TOPIX（東証株価指数）、建設業株価指数、新日鉄、日立、トヨタおよび東京電力の株価を分析し、長期依存性の存在を示す十分な証拠はない、と結論する。また為替レートについても同じ結論を導く。円・ドル為替レートの水準について、長期依存性の R/S 分析については岡本 (1986) がある。また、日本の株価収益率の R/S 分析としては高橋 (1992) がある。長期依存性については矢島 (1989) をみよ。以下では長期依存性をもつモデルにふれ、次節では、Lo (1991) による帰無仮説と修正 R/S 統計量を与え、3 節で実証結果を提示する。

一般に日本のみならず欧米の金融資産価格収益率の時系列的変動は、

- a) 非正規性    b) 非独立性    c) 非線形性

の特徴をもつことが実証されている。ただし、c) は a) b) を意味する。このような特徴とある程度整合的なモデルとして、(条件付)分散が変動する Taylor モデル (Taylor (1987)), GARCH モデル (Engle (1982), Bollerslev (1986)) 等が提示されている。他方、長期依存性の視点から、Mandelbrot and Van Ness (1968) が提唱した分数 (フラクショナル) 幾何的ブラウン運動 (FBM) や Granger and Joyeux (1980), Hosking (1981) による分数 (フラクショナル) ARIMA

(FARIMA) モデルを応用する試みがなされている。(1.1) から長期依存性をもつプロセスでは,  $k \rightarrow \infty$  のとき  $\gamma_k$  の 0 への収束度はきわめて遅く, スペクトル密度  $f(\lambda)$  は 0 で絶対収束しない。

あるプロセス  $\{z_t\}$  が定常 FARIMA  $(p, d, q)$  モデルに従うとは,  $y_t = (1-L)^d z_t$ ,  $|d| < 1/2$  が定常 ARMA  $(p, q)$  モデルに従うことである。ここで  $L$  はラグ・オペレータで,  $(1-L)^d = \sum_{k=0}^{\infty} d C_k (-L)^k$  で定義される。 $|d| < 1/2$  のときは,  $\{z_t\}$  自身が定常で, その自己共分散の次数は

$$(1.2) \quad \gamma_k \sim |k|^{2d-1} \quad (k \rightarrow \infty)$$

を満たす (e. g. Hosking (1981), Yajima (1975) 等を見よ)。  $0 < d < 1/2$  のとき, 定常で  $\Delta = \sum_{k=0}^{\infty} |\gamma_k| = \infty$  となり  $\{z_t\}$  は長期依存性をもつ。

他方,  $\{z_t\}$  が FBM モデルに従うとは,  $\{z_t\}$  は正規確率プロセス ( $t \geq 0$ ) で,

$$(1.3) \quad E(z_t) = 0, \quad E(z_t - z_s)^2 = c(t-s)^{2H} \quad (t \geq s)$$

をもつモデルである。ここで  $H$  はパラメータで後に述べる Hurst の名に負う。FBM モデルについて次のことが確認される。

- (1)  $H=1/2$  のときブラウン運動である
- (2)  $z_t - z_s$  の分布は  $t^H(z_t - z_0)$  の分布と同じである (自己相似性)
- (3)  $\text{Var}(z_t) = t^{2H} \text{Var}(z_1)$
- (4)  $1/2 < H < 1$  のとき  $x_t = z_t - z_{t-1}$  は定常プロセスに従い,

$$\gamma_k \sim |k|^{2d} \quad (k \rightarrow \infty) \quad \text{ただし} \quad d = H - 1/2$$

であり, 従って長期依存性をもつ (Mandelbrot and Van Ness (1968), 矢島 (1989) 等を見よ)。  $H$  の推定量として Hurst (1951) は有名なダムの貯水量の問題で R/S 分析を行った。まず, 基準化レンジ (R/S) 統計量

$$(1.4) \quad Q_n = R_n/S_n = \left[ \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k \bar{x}_j - \min_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k \bar{x}_j \right] / S_n$$

$$\text{ただし, } \bar{x}_j = x_j - \bar{x}_n, \quad \bar{x}_n = \sum_{j=1}^n x_j/n, \quad S_n^2 = \sum_{j=1}^n \bar{x}_j^2/n$$

を定義し, 回帰式

$$(1.5) \quad \log Q_n = a + H \log n + \varepsilon_n$$

から  $H$  の推定量と  $t$  値を計算する。彼の場合  $H$  は  $1/2$  より有意に大きく, 従って  $x_t$  は iid (互いに独立に同じ分布に従う) 正規でないとした。  $Q_n$  自身仮説  $H=1/2$  を検証する検定統計量であり,  $Q_n/\sqrt{n}$  の分布は,  $n \rightarrow \infty$  のとき  $I=[0, 1]$  上のブラウニアン・ブリッジ  $\{BB_t : t \in I\}$  のレンジ  $V = \max_{t \in I} BB_t - \min_{t \in I} BB_t$  の分布に収束する。  $V$  に基づく採択域は比較的大きく, (1.5) の  $H$  の  $t$  値による有意性は誤った結果を生じさせる可能性があることが知られている。

収益率の時系列変動では短期依存性も考慮する必要がある、それを修正したのが修正 R/S 統計量である。

## 2 帰無仮説

我々の問題は、収益率  $x_t = \log Z_t - \log Z_{t-1}$  (ただし  $Z_t$  は  $t$  時点資産価格) のプロセスの時系列変動に対して、長期依存性の存在を Lo (1991) に基づいて検定することである。まず  $x_t = \mu + \varepsilon_t$ ,  $\{\varepsilon_t\}$  は正規定常と仮定する。そして帰無仮説を (H1)~(H4) を満たす  $\{\varepsilon_t\}$  のプロセスのクラスとする。

$$(H1) \quad E(\varepsilon_t) = 0, \quad (H2) \quad \sup_t E[|\varepsilon_t|^\beta] < \infty \quad (\text{ある } \beta > 2),$$

$$(H3) \quad 0 < \sigma_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \right)^2 \right] < \infty,$$

$$(H4) \quad \{\varepsilon_t\} \text{ は } \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{1-(2/\beta)} < \infty \text{ を満たす.}$$

ここで  $\alpha_k = \sup_j [\sup \{|P(A \cap B) - P(A)P(B)| | A \in \mathcal{B}_{-\infty}^j, B \in \mathcal{B}_{j+k}^{\infty}\}]$

$\mathcal{B}_s^t$  は  $\{\varepsilon_s, \dots, \varepsilon_t\}$  が生成する  $\sigma$  代数

(H3) の条件は、スペクトル密度  $f(\lambda)$  で  $f(0) = \infty$  なる場合を排除し、 $\Delta = \Sigma |\gamma_j| < \infty$  を保証する。従って (H2)~(H4) を満たすプロセスは短期依存性をもつプロセスである。Lo はこの 4 つの条件から成る帰無仮説に対して、検定統計量として修正 R/S 統計量

$$(2.1) \quad Q_n^* = R_n / \bar{\sigma}_n(q) \quad \text{ただし } \bar{\sigma}_n^2(q) = S_n^2 + 2 \sum_{j=1}^q w_j(q) \bar{\gamma}_j,$$

$$\bar{\gamma}_j = \sum_{i=j+1}^n (x_i - \bar{x}_n)(x_{i-j} - \bar{x}_n) / n, \quad w_j(q) = 1 - j / (q+1)$$

を提案し、 $q_n \rightarrow \infty, q_n/n \rightarrow 0$  のとき仮説のもとで  $V_n^* = Q_n^* / \sqrt{n}$  の分布はブラウニアン・ブリッジのレンジ  $V$  の分布に収束することを示した。また、対立仮説のもとで  $V_n^*$  による検定は一致性をもつことを示している。(1.4) による  $V_n = Q_n / \sqrt{n}$  と (2.1) による  $V_n^* = Q_n^* / \sqrt{n}$  の違いは、 $V_n = \hat{\xi} V_n^*$  より  $\hat{\xi} = \bar{\sigma}_n(q) / S_n$  であるが、 $\{x_t\}$  に短期依存性をもつ時系列構造があると  $V_n$  による検定は  $V_n^*$  の漸近的 95% 信頼区間  $[0.809, 1.862]$  を大きくゆがめ、実際には  $V_n^*$  で有意でなくとも  $V_n$  に基づくと有意となる可能性を引き起こす。Lo (1991) では、アメリカの株価指数に対して、 $V_n^*$  を用いて (H1)~(H4) に表現される短期依存性は棄却されないことを示している。

## 3 修正 R/S 統計量による日本の株価為替レートの分析

本節では  $V_n^* = Q_n^* / \sqrt{n} \bar{\sigma}_n(q)$  に基づいて日本の株価や為替レートに長期依存

性が存在するかどうかを検証する。それぞれ、日次データと月次データについて分析を行う。収益率  $x_t$  に基づいて  $V_n$  と  $V_n^*(q)$  を求めている。

### 3.1 株価の R/S 分析

表1は、東証株価指数 (TOPIX) と東証の建設業の株価指数の日次データについての  $V_n$  と  $V_n^*(q)$  の値である。データは1968年1月から1992年7月まで利用可能であるが、その標本期間全体と、それを1/2, 1/4に分けた場合 (sub-period) について、それぞれ計算した。表で\*がついている数字、すなわち、長期依存性があると判断される場合が、通常の R/S 分析では、TOPIX については3つの標本期間で、建設業種については1つの標本期間でみられる。しかし、修正 R/S 分析の  $V_n^*(q)$  によれば、いずれの場合でも、帰無仮説が棄却されず、長期依存性があるという証拠は存在していない。別の言い方をすれば、 $V_n^*(q)$  は標本期間のなかで、sub-period をどうとろうとも、結論は同じであり、その意味で安定的である。また、 $V_n^*(q)$  は、同じ標本期間においては、 $q$  の大きさに対して、かなり安定的な値をとっていることは、長期依存性が存在しないであろうという結論を支持する。

また、Hurst 指数を求めてみると (他の sub-period についても計算し、回帰式  
表1 TOPIX と建設業の株価指数に対する R/S 分析 (日次データ)

標本期間	$n$	$V_n$	$V_n^*(90)$	$V_n^*(180)$	$V_n^*(270)$	$V_n^*(360)$
TOPIX						
1968. 1. 8-1992. 7. 31	6912	1.63	1.23	1.17	1.12	1.07
1968. 1. 8-1979. 11. 19	3456	1.98	1.33	1.31	1.28	1.24
1979. 11. 20-1992. 7. 31	3456	2.01*	1.62	1.51	1.42	1.36
1968. 1. 8-1973. 10. 29	1728	1.99*	1.39	1.35	1.35	1.39
1973. 10. 30-1979. 11. 19	1728	1.85	1.34	1.64	1.81	1.69
1979. 11. 20-1985. 12. 7	1728	1.46	1.28	1.33	1.38	1.45
1985. 12. 9-1992. 7. 31	1728	1.88*	1.51	1.39	1.30	1.24
建設業株価指数						
1968. 1. 8-1992. 7. 31	6912	1.25	1.13	1.08	1.03	0.99
1968. 1. 8-1979. 11. 19	3456	1.51	1.40	1.41	1.38	1.36
1979. 11. 20-1992. 7. 31	3456	1.86*	1.62	1.51	1.39	1.31
1968. 1. 8-1973. 10. 29	1728	1.38	1.42	1.48	1.52	1.58
1973. 10. 30-1979. 11. 19	1728	1.74	1.33	1.45	1.49	1.46
1979. 11. 20-1985. 12. 7	1728	1.64	1.29	1.37	1.45	1.58
1985. 12. 9-1992. 7. 31	1728	1.68	1.49	1.33	1.22	1.17

\*有意水準 5% で有意 (以下同様)

表2 個別銘柄に対するR/S分析(日次)

銘柄	$n$	$V_n$	$V_n^*(90)$	$V_n^*(180)$	$V_n^*(270)$	$V_n^*(360)$
新日鉄	1687	1.79	1.54	1.47	1.32	1.24
日立	1687	1.13	1.60	1.66	1.56	1.44
トヨタ	1687	0.98	1.30	1.51	1.43	1.41
東京電力	1687	1.43	1.33	1.20	1.15	1.16

標本期間 1986.1.6-1992.6.30

表3 TOPIX・個別銘柄に対するR/S分析(月次)

銘柄	$n$	$V_n$	$V_n^*(3)$	$V_n^*(6)$	$V_n^*(9)$	$V_n^*(12)$
TOPIX	269	1.60	1.44	1.39	1.34	1.28
新日鉄	269	1.51	1.18	1.14	1.12	1.09
日立	269	1.62	1.55	1.47	1.38	1.33
トヨタ	269	1.09	1.04	1.05	1.01	0.99
東京電力	269	0.82	0.88	0.90	0.89	0.89

標本期間 1970.2-1992.6

を用いる), 通常のR/S分析については,  $H=0.58$ , 修正R/S分析については  $H=0.21$  になる。

表2は, いくつかの個別銘柄の日次データに対する  $V_n$  と  $V_n^*(q)$ , 表3は, TOPIX と個別銘柄の月次データに  $V_n$  と  $V_n^*(q)$  の結果である。どちらの表でも,  $V_n$  と  $V_n^*(q)$  のいずれも有意なものはなく, 長期依存性は存在していないという結果が得られた。特に気づくことは, 表2で, 日立やトヨタなどでは,  $V_n$  より  $V_n^*(q)$  の方が大きくなっていること, 表3の月次データでは,  $V_n$  と  $V_n^*(q)$  の差が, 表1や表2よりも小さくなっていること, 等が挙げられる。表1からは  $V_n$  の方が  $V_n^*(q)$  よりも常に大きくなるような印象を与えられるが, 必ずしもそのような系統的な関係はない。

いずれにせよ, 修正R/S統計量によれば, これら日本の株価の変動には, 長期依存性が存在するという証拠はないことになる。また, これらの結果は, Lo (1991) のアメリカの株価指数の実証結果とほとんど同様の結果になっていることは興味深い。

### 3.2 為替レートのR/S分析

同様の計算を為替レート(東京市場の円/ドルレート)について行ったのが, 表4(日次データ)と表5(月次データ)である。株価の場合とはほぼ同様のことが確認される。

表4 為替レートに対する R/S 分析 (日次データ)

標本期間	$n$	$V_n$	$V_n^*(90)$	$V_n^*(180)$	$V_n^*(270)$	$V_n^*(360)$
1975. 1. 9-1992. 6. 30	4340	1.75	1.36	1.29	1.24	1.23
1975. 1. 9-1983. 10. 3	2170	2.04*	1.60	1.50	1.49	1.53
1983. 10. 4-1992. 6. 30	2170	1.88*	1.47	1.41	1.33	1.31
1975. 1. 9-1979. 5. 29	1085	2.47*	1.61	1.44	1.46	1.53
1979. 5. 30-1983. 10. 3	1085	1.34	1.22	1.33	1.56	1.17
1983. 10. 4-1988. 2. 8	1085	1.77	1.38	1.23	1.16	1.21
1988. 2. 9-1992. 6. 30	1085	1.35	1.19	1.45	1.52	1.49

表5 為替レートに対する R/S 分析 (月次データ)

標本期間	$n$	$V_n$	$V_n^*(3)$	$V_n^*(6)$	$V_n^*(9)$	$V_n^*(12)$
1973. 3-1992. 6	233	1.31	1.22	1.16	1.14	1.11
1973. 3-1991. 9	116	1.43	1.35	1.26	1.22	1.20
1981. 10-1992. 6	117	1.48	1.37	1.32	1.32	1.26

表4では、 $V_n$ に基づく、3つの sub-period で長期依存性が存在するという結論が導かれるが、 $V_n^*(q)$ によれば、長期依存性は存在しないだろうということになる。 $V_n^*(q)$ の値は、どの場合も帰無仮説を棄却していない、すなわち安定的な結果をもたらすということは、為替レートに長期依存性が存在していないということを示唆している。また、表5の月次データについても、同様に、長期依存性の存在を示す証拠はない。Hurst指数を計算すると、通常のR/S分析では $H=0.62$ 、修正R/S分析では $H=0.21$ となった。

日本の為替レートについては、岡本(1986)、Okamoto(1992)で長期依存性の分析が行われている。そこにおいては、長期依存性があるという結果になっているが、それは、為替レートの水準そのものについてのR/S分析であり、ここで行った収益率のR/S分析とは、比較はできないであろう。

### 3.3 まとめ

以上のように、修正R/S統計量によって、日本の株価および為替レートの収益率の変動には、長期依存性が存在するという強い証拠は得られなかった。修正R/S統計量がすべて有意でなかったということは、帰無仮説、すなわち、短期依存性の仮説が反証されず、長期依存性ではなく、短期依存性を意識したモデルが重要であろう、と推論されよう。

## 参考文献

- Bhattacharya, R. N., V. K. Gupta and E. Waymire (1983). "The Hurst effect under trends", *Jour. of Applied Probability* **20**, 649-662.
- Bollerslev, T. P. (1986), "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity", *Jour. of Econometrics* **31**, 307-327.
- Davis, R. B. and D. S. Harte (1987). "Tests for Hurst effect", *Biometrika* **74**, 95-101.
- Engle, R. F. (1982). "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation", *Econometrica* **50**, 987-1007.
- Granger, C. W. J. and R. Joyeux (1980). "An introduction to long-memory time series models and fractional differencing", *Jour. of Time Series Analysis*, **1**, 15-29.
- Green, M. and B. Fielitz (1977). "Long-term dependence in common stock returns", *Jour. of Financial Economics* **4**, 339-349.
- Hosking, J. R. M. (1981). "Fractional differencing", *Biometrika* **68**, 165-176.
- Lo, A. W. (1991). "Long-term memory in stock market prices", *Econometrica* **59**, 1279-1313.
- Lo, A. W. and C. Mackinlay (1988). "Stock market prices do not follow random walks: Evidence from sample specification tests", *Review of Financial Studies* **1**, 41-66.
- Lo, A. W. and C. Mackinlay (1990). "When are contrarian profits due to stock market overreaction?", *Review of Financial Studies* **3**, 175-206.
- Mandelbrot, B. and J. W. Van Ness (1968). "Fractional Brownian motions, fractional noise and applications", *SIAM Review* **10**, 422-437.
- Yajima, Y. (1985). "On estimation of long time series models", *Austral. Jour. Statist.* **27**, 303-320.
- Okamoto, M. B. (1992), "Long-range dependence of foreign-exchange rate and estimation of parameter in fractionally differences process", 広島大学『年報経済学』**13**, 1-11.
- 岡本雅典 (1986). 「日別変動為替レートにおける Hurst 効果」広島大学経済論叢 **9**, 51-58.
- 高橋正文 (1992). 「ハースト指数を利用した派生証券価格評価」筑波大学修士論

(128) 一橋論叢 第108巻 第6号 平成4年(1992年)12月号

文.

矢島美寛(1989).「Long-memory モデルとその統計的性質」日本統計学会誌 19,  
209-216.

(一橋大学教授)

(名城大学講師)