順序統計量にもとづくルックバック・オプション：試論

三　浦　良　造

1　はじめに

現在，オプションという名を付した金融商品は多種多様である．

株価指数オプション，債券オプション，債券先物オプション，通貨オプションなどが代表的である．その他オプションを組み込んだ商品，そして先物，先渡（スワップ）契約などオプションの一形態としてみなされるものがある．[1)]

一般的には，オプションは不確実性をもつ環境のもとで生じる結果に依存する内容をもつ権利の契約（Contingent Claim）として定義される．このような契約の価値を評価するためにその一般性あるいは汎用性に対応したオプション価格理論が主にこの20年間展開されてきた．オプション契約が対象とするものは概念上は広範であるが実務上扱われるものはその価格が各時点で明示的なものである．

オプション契約の内容を定める基本的な要素は3つある．オプションの対象（これを原証券と呼ぶことにする．）とオプションの期間そして権利行使の内容（そして機会）である．権利行使の内容が権利行使時点のオプション価値を表現するのであるがここで数学理論上2つのタイプに類別される．不確実性のもとで生じる結果としては権利行使時点の原証券価格だけを用いるものと権利行使時点を含めてこの時点に到るまでのオプション期間中の（またはその一部分の）各時点における原証券価格の経過をも合わせて用いるもの

である．前者は数理の扱い上単純とされ後者は複雑とされる．その理由は，後者が用いる，例えば期間中の原証券価格の最大値，最小値または平均値など，その値の挙動を不確実な環境下で表現することが，前者が用いる1時点の原証券価格の挙動の把握に比べて複雑だからである．後者は原証券価格の経過に依存するので経路依存型（path-dependent）と呼ばれ，それに対応して前者は経路独立型（path-independent）と呼ばれることもある．[2)]ルックバック（Look-back）という呼称は経路をふり返るという意味で経路依存型と同義である．本稿ではルックバック・オプションの新しい例として著者が概念上考案したものを紹介する．これは権利行使時のオプション価値又はペイオフ（pay-off）を表現するのにオプション期間中の各時点における原証券価格の順序統計量（order statistics）を用いるものである．[3)]

順序統計量とは観測された値の集まりを小さいものから順に並べ直したものである．最小値，最大値，中央値（メディアン）がこのなかに含まれる．しかし平均値は含まれない．一般にn個の観測値があるとき，その中で小さい方からk番目の値をk番目の順序統計量（k-th order statistic）と呼ぶこともある．最大又は最小値は極端な値であるから中央値とか下から（全体の）1/4の値つまり25％点，また上から1/4の値（75％点）などを扱うオプションの方が需要に見合うことがあるかも知れないと想像する．さらにこれらの数値の意味を吟味することが新しいタイプの預金等の権利契約を生みだす根拠となるかも知れない．数学理論上は，最大値，最小値を扱うオプションを一般の順序統計量を扱うオプションに拡張するという作業である．それは順序統計量を扱うオプションの発行者にとって義務として引き受けたオプション・リスクを管理する技術的見通しを与えるものである．

まず第2節では証券価格変動モデルを設定し記号の説明を行う．第3節では順序統計量の漸近分布を求める．第4節では順序統計量にもとづくオプションを例示しその機能について解説を加える．第3節と第4節が本稿の中心

であるが議論に不完全な所が残るので本稿を試論とした．第5節には今後の課題をいくつか述べる．

2　モデルの設定と記号

本節以降では原証券価格を端的に株価としておく．そして時刻を離散的にとり，株価を始めとするいくつかの統計量を表現し，時刻の間隔を無限に小さくするときの統計量の確率分布を表現するという数理統計学における漸近理論のアプローチを採用する．

オプション期間を $[0, T]$ とする．簡単のため

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots\cdots < t_n = T,$$

$$t_i - t_{i-1} = T/n$$

としておく．株価を S_t で表わすが簡単のため $S_{t_i} = S_i$, $i = 0, 1, \cdots, n$ と書くことにする．

株価変動モデル（Multiplicative Process）

各時刻の株価が

$$\begin{aligned} S_{i+1} &= S_i \cdot e^{X_{i+1}} \\ &= S_0 \cdot e^{X_1 + X_2 + \cdots + X_{i+1}}, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \end{aligned}$$

と表わされるとする．ただし $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立で同一分布 F に従うとする．F は連続な分布関数であるが，とくに正規分布でなくてもよいとする．

順序統計量

ここでは簡単のため S_0 を除外して，$\{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ を値の小さいものから順に並べたものを

$$S_{(1)},\ S_{(2)},\ \cdots,\ S_{(n)}$$

と書く．

$$Y_i = X_1 + X_2 + \cdots + X_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

と表わすことにして $\{Y_1,\ Y_2,\ \cdots,\ Y_n\}$ を小さい方から順に並べたものを

$$Y_{(1)},\ Y_{(2)},\ \cdots,\ Y_{(n)}$$

と書く．$S_{(i)}$ は $\{S_i, 1\leq i\leq n\}$ の順序統計量であり $Y_{(i)}$ は $\{Y_i, 1\leq i\leq n\}$ のそれである．

$$\text{変換：} y \to e^y$$

は y の大きさ（小ささ）の順序を変えない，つまり $S_i=S_0\cdot e^{Y_i}$，$1\leq i\leq n$ であるから

$$S_i < S_j \Longleftrightarrow Y_i < Y_j$$

である．従って

$$S_{(i)} \equiv e^{Y_{(i)}},\quad 1\leq i\leq n$$

である．この関係が $S_{(i)}$ の確率分布を求める際の操作に使われる．すなわち

$$\begin{aligned} P\{S_{(i)} \leq x\} &= P\{S_0\cdot e^{Y_{(i)}} \leq x\} \\ &= P\left\{Y_{(i)} \leq \log\frac{x}{S_0}\right\} \end{aligned}$$

である．

$S_{(i)}$ の例として

$$\begin{aligned} &\text{最小値：}\min\{S_i\} \equiv S_{(1)} \equiv S_0\cdot e^{Y_{(1)}} \\ &\text{最大値：}\max\{S_i\} \equiv S_{(n)} \equiv S_0\cdot e^{Y_{(n)}} \\ &\text{中央値：}\mathrm{median}\{S_i\} S_{([n/2])} \equiv S_0\cdot e^{Y_{([n/2])}} \\ &100\cdot\alpha\,\%\text{ 値：}S_{([n\alpha])} \equiv S_0\cdot e^{Y_{([n\alpha])}} \end{aligned}$$

$$\alpha = 0.25,\quad \alpha = 0.75 \text{ など}$$

が考えられる．ここで [・] はガウス記号であり，[・] 内の数に下から最も近い整数値を表わす．

$Y_{(i)}$ の確率分布は次節で求める．それは $n\to\infty$ における極限分布である．極限によって n が有限の段階の様子を近似することになる．有限な n に対して精密に計算することも原理的には可能である．それは $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ に対して順序統計量の確率分布論を正確に（EXACT に）行うことである．$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ が互いに従属な（独立でない）確率変数なのでその点に注意する必要がある．本稿では $n\to\infty$ における様子をみるに留める．

3　確率分布論

X_i は，小期間 $[t_i, t_{i+1}]$ 内における不確実な変動値を表わすのだからその平均と分散の小ささは $1/n$ のオーダーであることが自然である．ここでは簡単のため，$i=1, 2, \cdots, n$ に対して

$$E[X_i] = (T/n)\cdot\mu \doteqdot \mu_n$$
$$Var[X_i] = (T/n)\cdot\sigma^2 \doteqdot \sigma^2{}_n$$

としておく．ただし μ と σ^2 は定数であり1単位期間の X の平均と分散とみてよい．

階段関数

$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ に対して階段関数 $G_n(\cdot)$ をつぎのように定義する．任意の実数値 y に対して

$$G_n(y) = (1/n)\sum_{i=1}^{n} I\{Y_i \leqq y\}$$

とする．ただし $I\{\cdot\}$ は定義関数と呼ばれ

$$I\{Y \leqq y\} = \begin{cases} 1 & Y \leqq y \text{ のとき} \\ 0 & Y > y \text{ のとき} \end{cases}$$

である．$G_n(\cdot)$ は数理統計学で用いられる経験分布関数とは異なるので注意を要する．それは $Y_i, 1\leqq i\leqq n$ が独立ではなくまた同一分布には従わないからである．ここで $G_n(\cdot)$ の漸近的表現を示しておく．

補題　1

任意の実数値 y に対して $n\to\infty$ のとき $G_n(y)$ の確率分布は

$$\int_0^1 I\{w(t) \leqq (y-t\cdot\mu\cdot T)/(\sigma\cdot T^{1/2})\}dt$$

の確率分布に収束する．ただし $W(t)$ は標準ウィーナー過程である．

証明

標準化された X_j の和の確率分布が，$n\to\infty$ のとき $i/n\to t$ として標準ウィーナー過程 $W(t)$ の確率分布に（各 i について一様に）収束することを用

いて証明する.

$$
\begin{aligned}
G_n(y) &= \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} I\{Y_i \leqq y\} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I\left\{\frac{Y_i - i\cdot\mu_n}{\sigma_n} \leqq \frac{y - i\cdot\mu_n}{\sigma_n}\right\} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I\left\{\frac{1}{n^{1/2}}\sum_{j=1}^{i}\left(\frac{X_j - \mu_n}{\sigma_n}\right) \leqq \frac{y - (i/n)\cdot\mu\cdot T}{\sigma\cdot T^{1/2}}\right\} \\
&\xrightarrow[(n\to\infty)]{} \int_0^1 I\left\{W(t) \leqq \frac{y - t\cdot\mu\cdot T}{\sigma\cdot T^{1/2}}\right\} dt
\end{aligned}
$$

($\fallingdotseq G(y:\mu,\sigma)$ とおく.)

である.

最後の収束については Shorack-Wellner (1986) の議論 (59～62 ページ) に負う.　(証明終り)

つぎに $Y_{(i)}$ と $S_{(i)}$ の漸近分布を表現する.

定理 1

$n\to\infty$ のとき $i/n\to t$ とする. 任意の実数 y に対して

$$n\to\infty \text{ のとき } P\{Y_{(i)} \leqq y\} \to P\{t \leqq G(y:\mu,\sigma)\}$$

である. そして任意の正数 x に対して, $n\to\infty$ のとき

$$P\{S_{(i)} \leqq x\} \to P\{t \leqq G(\log(x/S_0):\mu,\sigma)\}$$

である.

証明

$G_n^{-1}(t) = inf\{y : G_n(y) \geqq t\}$ と定義しておく.

$$
\begin{aligned}
P\{Y_{(i)} \leqq y\} &= P\left\{G_n^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right) \leqq y\right\} \\
&= P\{i/n \leqq G_n(y)\} \\
&\xrightarrow[(n\to\infty)]{} P\{t \leqq G(y:\mu,\sigma)\} \quad \text{(補題 1 による)}
\end{aligned}
$$

さらに同じ議論を用いて

$$
\begin{aligned}
P\{S_{(i)} \leqq x\} &= P\{S_0\cdot e^{Y_{(i)}} \leqq x\} \\
&= P\{Y_{(i)} \leqq \log(x/S_0)\}
\end{aligned}
$$

$$= P\{i/n \leqq G_n(\log(x/S_0))\}$$
$$\xrightarrow[(n\to\infty)]{} P\{t \leqq G(\log(x/S_0) : \mu, \sigma)\}.$$

である．　（証明終り）

定理1により $Y_{(i)}$ と $S_{(i)}$ の漸近分布が表現された．それぞれの密度関数は変数 y あるいは x に関して微分することによって表現される．$Y_{(i)}$, $S_{(i)}$ のいずれにしても漸近的な，分布関数又は密度関数を明示的な（EXPLICIT な）関数として表現するためには $G(y : \mu, \sigma)$ の分布関数を明示的な関数として表わさなければならない．それをつぎに $\mu = 0$, $\sigma = 1$ という特殊な場合について求めておく．μ と σ について一般的な場合にも通用するはずの方法で証明するのだが，後で指摘するように到達時刻（stopping time）の密度関数を利用できることがキーポイントである．

簡単のために新しい記号を用いる．

$$G^*(y) \equiv G(y \cdot T^{1/2} : 0, 1)$$
$$= \int_0^1 I\{W(t) \leqq y\}dt, \quad -\infty < y < \infty$$

と定義する．

定理2

$-\infty < y < \infty$,　$0 < x\ 1$ に対して

$$P\{G^*(y) \leqq x\}$$
$$= \int_0^x \frac{2}{\pi} \cdot \sin^{-1}\left(\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^{1/2}\right) \cdot h_y(t)\,dt$$

である．ただし

$$h_y(t) = \frac{y}{(2\pi t^3)^{1/2}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2t}}, \quad 0 < t < \infty$$

である．

証明

まず定義により $-\infty < y < \infty$ に対して $0 \leqq G^*(y) \leqq 1$ であることを確認しておく．

$y>0$ に対して証明する．$y<0$ に対しては

$$\begin{aligned}P\{G^*(y) \leqq x\} &= P\left\{\int_0^1 I\{W(t) \leqq y\}\, dt \leqq x\right\}\\ &= P\left\{\int_0^1 I\{-W(t) \geqq -y\} dt \leqq x\right\}\\ &= P\left\{\int_0^1 I\{W(t) \geqq -y\}\, dt \leqq x\right\}\\ &= P\left\{\int_0^1 [1-I\{W(t) \leqq -y\}] dt \leqq x\right\}\\ &= P\left\{\int_0^1 I\{W(t) \leqq -y\} dt \geqq 1-x\right\}\\ &= P\{G^*(-y) \geqq 1-x\}\\ &= 1-P\{G^*(-y) \leqq 1-x\}\end{aligned}$$

であるから $y>0$ の場合についての結果を用いれば求まる．

$y>0$ に対して τ_y を今用いている標準ウィーナー過程 $\{W(t), 0<t<\infty\}$ が y へ初めて到達する時刻とする．

τ_y の密度関数 $h_y(t)$ は

$$h_y(t) = \frac{y}{(2\pi t^3)^{1/2}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2t}}, \quad 0<t<\infty$$

である．[4]

これをつぎのように利用する．

$$\begin{aligned}&P\{G^*(y) \leqq x\}\\ &= P\left\{\int_0^1 \{W(t) \leqq y\} dt \leqq x\right\}\\ &= P\left\{\int_0^1 I\{W(t) \leqq y\} dt \leqq x, \text{そして } \tau_y \leqq x\right\}\end{aligned}$$

(事象の包含関係 $\left\{\int_0^1 I\{W(t) \leqq y\} dt \leqq x\right\} \subset \{\tau_y \leqq x\}$ に依る．つまり $W(t)$ が y より下にある時間の和が x より小さければ $W(\cdot)$ は時刻 x までに y に到達している．)

$$= \int_0^x P\left\{\int_0^1 I\{W(t) \leqq y\} dt \leqq x \mid \tau_y = s\right\} h_y(s)\, ds$$

$$= \int_0^x P\left\{\int_0^{1-s} I\{W(t) \leqq 0\}dt + s \leqq x\right\} h_y(s)\,ds$$

（s 時点において初めて y に到達するということは，それまでは $W(\cdot)<y$ であったことを意味する．さらにその後 $W(\cdot)$ が y から下がるということはウィーナー過程が出発点であるゼロから下がることと同じである．）

$$= \int_0^x \frac{2}{\pi} S_{in}{}^{-1}\left(\left(\frac{x-s}{1-s}\right)^{1/2}\right) h_y(s)\,ds$$

（これは Arc Sine Law と呼ばれる命題である．
例えば，Feller (1968) 418ページを参照せよ．）

（証明終り）

定理2は $\mu=0$ の場合について $G(y:\mu,\sigma)$ の確率分布を明示的に与えている．一般に $\mu \neq 0$ の場合には，$G^*(y)$ の表現のなかで y のところが t の一次式になっていることを意味する．従って上の証明のなかで水平線に対する $W(\cdot)$ の位置の上下関係を傾きのある直線に対する $W(\cdot)$ の位置の上下関係に置き換えて議論すればよい．そのためには傾きのある直線に $W(\cdot)$ が初めて到達する時刻の密度関数と

$$\int_0^{1-s} I\{W(t) \leqq -k\cdot t\}dt$$

の分布関数を用いることになる．ただし k は定数である．

系1

$\mu=0$ の場合，任意の正数 x に対して $n\rightarrow\infty$ のとき，

$$P\{S_{(i)} \leqq x\} \rightarrow 1 - \int_0^t \frac{2}{\pi}\cdot Sin^{-1}\left(\left(\frac{t-u}{1-u}\right)^{1/2}\right) h_L(u)\,du.$$

ただし，$i/n \rightarrow t$，$0<t<1$ とする．そして $L=(\log(x/S_0))/(\sigma\cdot T^{1/2})$ である．

証明

定義により $G(\alpha:0,\sigma)=G^*(a/(\sigma\cdot T^{1/2}))$ だから定理1, 2より

$$\begin{aligned}P\{S_{(i)} \leqq x\} &\xrightarrow[(n\to\infty)]{} P\{t \leqq G(\log(x/S_0):0,\sigma)\} \\ &= P\{t \leq G^*((\log(x/S_0))/(\sigma\cdot T^{1/2}))\} \\ &= 1-P\{G^*(L) \leqq t\} \\ &= 1-\int_0^t \frac{2}{\pi}\cdot S_{in}{}^{-1}\left(\left(\frac{t-u}{1-u}\right)^{1/2}\right)\cdot h_L(u)\,du\end{aligned}$$

である． (証明終り)

これで $S_{(i)}$ の漸近分布が求まったのであるがルック・バック・オプションとして最初に登場した $\max\{S_i\}$ と $\min\{S_i\}$ はそれぞれ $S_{(n)}$ と $S_{(1)}$ であり，上の命題のなかでは $i/n\to 0$，そして，1 の場合に対応する．しかし，これらの両極端の値に対しては上の命題は使えない．個別に扱うことになるがそれらについてはすでに結果が得られている．[5)]

次節に述べるように $S_{(i)}$ を扱うオプションはいくらでも考案できる．しかしそこでオプション価格評価のためには扱う確率変数の分布論を必要とする．本節では $S_{(i)}$ の漸近分布を求めたが，それと同様の手順と工夫を用いて，例えば $S_{(i)}$ と S_n の同時分布や $S_{(i)}$ と $S_{(j)}$ の同時分布を求める必要が生じる．

詳しく述べることは別の機会にゆずることにするが，ここでは $S_{(i)}$ と S_n の同時分布について簡単にふれておく．

a, b を任意の正数とする．

$$\begin{aligned}&P\{S_{(i)} \leqq a, S_n \leqq b\} \\ &= P\{e^{Y_{(i)}} \leqq a/S_0, e^{Y_n} \leqq b/S_0\} \\ &= P\{Y_{(i)} \leqq \log(a/S_0), Y_n \leqq \log(b/S_0)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\log(b/S_0)} P\{Y_{(i)} \leqq \log(a/S_0) \mid Y_n = y\} f_{Y_n}(y)\,dy\end{aligned}$$

と展開される．積分記号の内側にある条件付確率はブラウン橋（Brownian Bridge）BB(・) を用いた形で表現される．$W(t)-t\cdot W(1)$ がブラウン橋であることを用いて上の $G(x)$ に対応するものとしては，$Y_n=y$ という条件のもとで

$$\int_0^1 I\left\{BB(t) \leqq \frac{x-t\cdot y}{\sigma\cdot T^{1/2}}\right\}dt$$

であり，これを用いて上の条件付確率は $i/n\to t$ として，

$$P\left\{t \leqq \int_0^1 I\left\{BB(s) \leqq \frac{\log(a/S_0)-s\cdot y}{\sigma\cdot T^{1/2}}\right\}ds\right\}$$

のような形で表現される．

4　順序統計量にもとづくオプションとその機能

順序統計量 $S_{(i)}$ にもとづくオプションの基本的な例としてつぎの2つをとりあげてその機能について述べておく．

(A)　$S_{(i)}$ と S_n を交換するオプション

満期におけるペイオフを

$$\text{コール}：\max\{S_{(i)}-S_n, 0\}$$

$$\text{プット}：\max\{S_n-S_{(i)}, 0\}$$

とする．

(B)　$S_{(i)}$ とキャッシュを交換するオプション

満期におけるペイオフを

$$\text{コール}：\max\{S_{(i)}-K, 0\}$$

$$\text{プット}：\max\{K-S_{(i)}, 0\}$$

とする．ただし K は定数である．

交換の対象が S_n である通常の株式オプションのペイオフ

$$\text{コール}：\max\{S_n-K, 0\}$$

$$\text{プット}：\max\{K-S_n, 0\}$$

と比較すると (A) (B) いずれも，交換の対象として $S_{(i)}$を置いている．$S_{(i)}$ が持つ特徴はオプション期間中の特定の時期，例えば満期時期，の株価の影響をうけにくいことである．従って期間中の株価の特徴を i の値に応じて表現しており，i の値は前もって契約時に指定できるのである．このような特徴をふまえてそれぞれのオプションの機能をみることにする．オプション期間中の各営業日の例えば終り値を S_t としよう．営業日は n 日あるとしよう．

(A) では投資家が何を持っているかに依ってコールとプットの名称を入

れ替えなければいけない．ここでは投資家が株式を持っていると想定して名付けた．

(A) のコールはオプション満期における株式の価格が期間中の下から i 番目より低いのは不都合だとしてその差を回復するためにもつオプションである．株価上昇期には，$i=[0.75\cdot n]$ などの高い値に設定し，満期近くの不確実な株価下降に影響されないように備えるかも知れない．また逆に株価下降期には 0.75 を 0.25 に置きかえて S_n が期間中の最低価格になることをさけるかも知れない．そして特に上昇でも下降でもない時期には，期間中の中央値 $i=[0.5\cdot n]$ 程度の価値を満期にもてばよいと考えるかも知れない．i の設定に応じてオプション価格が定まる．i が大きい程 (A) のコールの価格は高い．

(A) のプットは，オプション満期時に株式を購入しようとする投資家が，自らの都合と予測に応じて i を定めて，不確実な価格変動に備えるために用いてよい．コールとプットいずれにしても等式

$$S_n+\max\{S_{(i)}-S_n, 0\} = \max\{S_{(i)}, S_n\}$$

$$S_{(i)}+\max\{S_n-S_{(i)}, 0\} = \max\{S_n, S_{(i)}\}$$

が示すように，S_n 又は $S_{(i)}$ の所有者が $S_{(i)}$ と S_n のうち大きい方の値をとろうとして持つオプションである．

(B) のコールとプットについても上と同様に等式

$$K+\max\{S_{(i)}-K, 0\} = \max\{S_{(i)}, K\}$$

$$S_{(i)}+\max\{K-S_{(i)}, 0\} = \max\{S_{(i)}, K\}$$

にもとづいてキャッシュ K または $S_{(i)}$ の所有者にとっての機能をみればよい．ここでは K を特別の値 $K=S_0$ としてコールの場合について考える．

S_0 を持つ投資家が期首にオプション料を払っておいて満期時に $\max\{S_{(i)}, S_0\}$ を持つというのは，一種の変動利率預金である．

$$S_{(i)} \fallingdotseq S_0+S_0\cdot(\text{市中金利})$$

となるような i の値が前もって見通せれば通常の預金に近い．それより大きな i の値を設定すれば，それなりのオプション料を支払うことになる．こう

してみるとこのオプションは銀行業務を端的に表わしているといえる．r を一定の預金金利とすれば，

$$S_{(i)}-S_0=(S_{(i)}-S_0\cdot e^{rt})+(S_0\cdot e^{rt}-S_0)$$
$$=(\text{銀行業務の利益})+(\text{預金者の利益})$$

のように分解されて，大きな i の値に対応する $S_{(i)}$ を求めて銀行は貸付を行い利益を挙げようとする．従って $\max\{S_{(i)}-S_0\cdot e^{rt},0\}$ の一部はいわば銀行株の株式の利益（配当）に対応する．

このような議論は S が株価であるという実態を離れて $S_{(i)}$ の数値だけをみて行ったものなので説得力に乏しい．しかし株価が企業の業績をよく反映し S_i を株価指数とし，株価指数が経済成長を直接的に反映しているとするならば，理解しやすいであろう．預金者を納得させ得る i を同定して，

$$S_0+\max\{S_{(i)}-S_0,0\}$$

を預金契約内容とすることもできよう．この i よりも大きな値 i' に対応する $S_{(i')}$ を資金 S_0 から出発して達成すれば，$S_{(i')}-S_{(i)}$ が銀行業務の利益である．i' が i より小さければそれに対応する分が負の利益となる．

さらに視点を変えてこのオプションの機能をみよう．T を1ヶ月とし，ポートフォリオ・マネージャーが資金 S_0 を預かり投資の代行にたずさわるとしよう．

$S_{(i)}-S_0$ はこのマネージャーの力量を示し，$\max\{S_{(i)}-S_0,0\}$ を基礎として投資代行の報酬をきめることになるだろう．i の値が大きい程，このマネージャーの力量が高いことになる．この i の計測を毎月記録することによりマネージャーの力量の計測も可能となるであろう．

オプション発行者のリスク管理

オプションの発行者は，権利行使に備えてオプションの価値の変動を把握しなければならない．コールでいえば，$S_{(i)}-S_n$　又は，$S_{(i)}-K$ の支払いに備えるのである．金融証券のリバランスあるいはヘッジングによってこれを行うのであれば，オプション期間中の各時点 t_j，$j=1,2,\cdots,n-1$，においてオプションの価値

$$e^{-r\tau}\cdot E[\max\{S_{(i)}-K, 0\}\,|\,S_0, S_1, S_2, \cdots, S_j]$$

又は,

$$e^{-r\tau}\cdot E[\max\{S_{(i)}-S_n, 0\}\,|\,S_0, S_1, \cdots, S_j]$$

を考えることになる．ただし，$\tau=T-t_j$，である．

この条件付期待値が原証券の価格の関数として明示的に得られれば，それに沿ってリバランス又はヘッジングを行えばよい．そのためには株価の経過 $S_0, S_1, \cdots, S_j$ に依存した $S_{(i)}$ の条件付分布を算出しなければならない．これはめんどうではあっても原理的には可能である．

5　おわりに

第2節で $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が互いに独立で同一分布に従うと仮定したが，これは，すでによく知られているように現実を理想化した仮定である．例えば日本の株価指数などでは，X_i は互いに独立ではなく，わずかながら相関をもっている．このような関係をとり入れたモデルのもとで，きちんとした分布論が，行われることが望ましいが，まだ単純なオプションについても成功していないようである．

第3節の分布論は，確率論の世界における成果に依存している．著者は本稿の議論に必要な確率論の成果についてまだ十分に把握していない所があるので，今後の努力によって本稿の内容が改良されるであろう．

第4節では新しいタイプの預金という視点で説明を試みたが，これは裏返していえば，不確実な経済環境における金利，そして銀行業務をオプション価格理論の枠組を通して考えるという試みの1つである．金融活動そして金融手段の全体をこのような視点からとらえることにより，見通しのよいまとまった表現が得られると期待している．

(注)

1)　Cox. Ingersoll. and Ross (1981) を参照せよ．

2)　最大値と最小値を扱ったオプションについては Goldman 他 (1979) が最

初であるが，このタイプのオプションについて総合的に知るには池田昌幸（1990）がよい．平均オプションについてはBergman（1985）とIngersoll（1987）に説明がある．

3)　本稿は1990年12月15日東京工業大学において開かれた「OR・金融研究部会」での著者の講演をもとに多少の改良を加えたものである．

4)　例えばShorack-Wellner（1981）．33ページを参照せよ．

5)　Goldman他（1979），池田（1990），Bergman（1985）を参照せよ．

引用文献

Bergman, Yaacov Z.（1985）．「Pricing Path Contingent Claims」 Research in Finance, Vol. 5, pp, 229-241.

Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll, Jr. and Stephan A. Ross（1981）．「The Relation Between Forward Prices And Future Prices.」 Journal of Financial Economics. Vol. 9. pp. 321-346.

Feller, William.（1971）．
『An Introduction To Probability Theory and Its Applications. Vol. 2』 John Wiley and Sons, Inc.

Goldman, M. Barry, Howard B. Sosin and Marry Ann Gatto（1979）．「Path Dependent Options；"Buy at the Low, Sell at the High".」 Journal of Finance. Vol. 34, pp. 1111-1127.

池田昌幸（1990）．
「経路依存型オプション契約の評価について」ファイナンス研究，Vol. 13, pp. 1-19.

Ingersoll, Jonathan E. Jr.（1987）．
『Theory of Financial Decision Making』 Rowman & Littlefield Publishers.

Shorack, Galen R. and Jon A. Wellner（1986）．
『Empirical Processes With Applications To Statistics』 John Wiley and Sons, Inc.

（一橋大学教授）